UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

Tarea de Respuesta Sísmica
Dinámica de Suelos

CI7411-1 - Dinámica de Suelos

Integrantes: Pablo Pizarro R.
Rodrigo Saavedra A.
Profesor: César Pasten
Auxiliar: Diego Pavez C.

Fecha de entrega: Viernes 26 de Octubre
Santiago, Chile

Índice de Contenidos

Lista de Figuras

Lista de Códigos

1. Pregunta 1

Implemente las ecuaciones de propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico en condición permanente y grafique el desplazamiento de partícula en profundidad en forma animada. Siga el ejemplo del software Quake visto en clases (disponible en material docente de u-cursos).

Teoría

Para estudiar la propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico se realiza equilibrio de fuerzas en un elemento infinitesimal sometido a corte dentro del medio, tal como se observa en la Figura 1, en donde ρ es la densidad del medio, G el módulo de corte y H la altura del medio elástico.

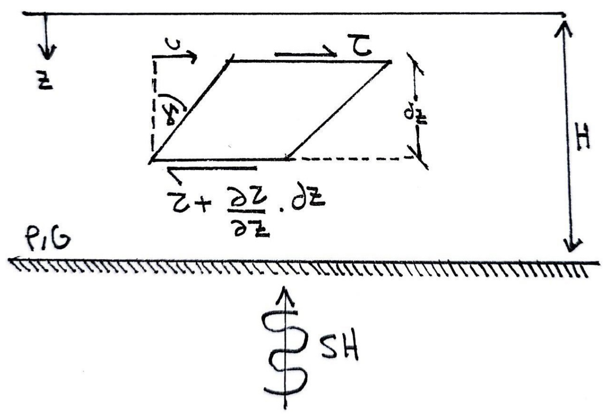

Figura 1: Elemento infinitesimal sometido a corte.

Al realizar equilibrio dinámico de fuerzas en el eje u se tiene que:

$$\underbrace{\left(\cancel{\tau} + \frac{\partial \tau}{\partial z}\cancel{dz}\right)\cancel{dxdy} - \cancel{\tau dxdy}}_{Eq.\ fuerzas} = \underbrace{\rho\cancel{dxdy}\cancel{dz}}_{Masa} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{Aceleración} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Para un material elástico se tiene que el corte es directamente proporcional a la deformación angular, con constante de proporción el módulo de corte o cizalle G:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \tag{3}$$

Al utilizar (3) en (2) se obtiene finalmente:

$$G \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

La forma de la ecuación anterior (4) es similar a la ecuación de onda $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nu^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, conocida también como la ecuación de D'Alembert, en donde describe una onda de velocidad ν relacionando tanto espacio como tiempo.

Considerando luego que $V_s^2 = \frac{\rho}{G}$ corresponde a la velocidad de la onda de corte se puede utilizar la solución característica de la ecuación de onda como solución del problema de propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico:

$$u(t,z) = A \cdot e^{i\left(\omega t + kz\right)} \tag{5}$$

Cuyas derivadas corresponden a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Ai\omega \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= Aik \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -Ak^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz} \end{aligned} \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (4) se obtiene la siguiente relación:

$$-GAk^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz} = -\rho A\omega^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{ikz}$$

$$\frac{G}{\rho} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = {V_s}^2 \tag{7}$$

En donde k corresponde al número de onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ la longitud de la onda. Finalmente, suponiendo que $-z$ también es solución de la ecuación se obtiene la solución final:

$$\boxed{u(z,t) = A \cdot e^{i\omega\left(t + \frac{z}{V_s}\right)} + B \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{z}{V_s}\right)}} \tag{8}$$

Para resolver el problema de un estrato sobre roca es necesario identificar las condiciones de borde del problema:

- **Condición natural de borde en superficie, no transmite corte**
  En este caso se tiene que $\tau(z=0) = 0$, por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$:

  $$\frac{\partial u}{\partial z} = A \cdot \frac{i\omega}{V_s} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\frac{z}{V_s}} - B \cdot \frac{i\omega}{V_s} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\frac{z}{V_s}} = 0 \longmapsto A = B$$

  Así la solución se reduce a $u(z,t) = A \cdot e^{i\omega t}\left(e^{i\omega\frac{z}{V_s}} + e^{i\omega\frac{-z}{V_s}}\right) = 2Ae^{i\omega t}\cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right)$

- **En el basamiento se tiene igual desplazamiento que en roca**

  Para este caso se tiene que $\|u(z,t=H)\| = a_b = 2A \cdot \cancelto{1}{\|e^{i\omega t}\|} \cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right) = 2A\cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right)$, en donde a_b corresponde a la amplitud basal del movimiento en la base a_b, así:

  $$A = \frac{a_b}{2\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)} \tag{9}$$

Por tanto, con ambas condiciones de borde se obtiene la solución para el problema:

$$\boxed{u(z,t) = \frac{a_b}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)} e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right)} \tag{10}$$

Implementación en Matlab

Con el fin de poder implementar y graficar el desplazamiento de partícula en profundidad en forma animada se desarrolló la ecuación (10) en matlab (ver archivo `u_elt.m`). En dicha función se pide como parámetro T período, H la altura del estrato, V_s velocidad de corte y a_b amplitud basal.

Dicha función retorna otra función que pide tanto z como t para entregar el desplazamiento, esto se desarrolló así para hacer el análogo a $u(z,t)$, en otras palabras:

$$u\_elt(V_s, H, a_b, T) \mapsto u(z,t)$$

Código 1: Código más importante de `u_elt.m`.

```matlab
%% Calcula la frecuencia
w = 2 * pi / T;
cosval = cos(w*H/Vs);
if cosval == 0
  error('El periodo de la onda genera resonancia');
elseif cosval < 1e-15
  warning('El periodo de la onda está cerca de la resonancia, posible inestabilidad numérica');
end

%% Retorna la funcion de desplazamiento
u = @(z, t) (ab / cos(w*H/Vs)) * exp(1i*w*t) * cos(w*z/Vs);
```