



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

Tarea de Respuesta Sísmica Dinámica de Suelos

CI7411-1 - Dinámica de Suelos

Integrantes: Pablo Pizarro R.
Rodrigo Saavedra A.
Profesor: César Pasten
Auxiliar: Diego Pavez C.

Fecha de entrega: Viernes 26 de Octubre
Santiago, Chile

Índice de Contenidos

1. Pregunta 1	1
Teoría	1
Implementación en Matlab	3
Validación de la metodología	3
Test analítico	3
Test resonancia	4
2. Pregunta 2	6

Lista de Figuras

1. Elemento infinitesimal sometido a corte.	1
2. Resultado caso analítico.	4
3. Evaluación del caso en resonancia.	5
4. Depósito de sueos conformado por capas horizontales.	6

Lista de Tablas

1. Casos de prueba función y resultados analíticos	4
--	---

Lista de Códigos

1. Código más importante de <code>u_elt.m</code>	3
--	---

1. Pregunta 1

Implemente las ecuaciones de propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico en condición permanente y grafique el desplazamiento de partícula en profundidad en forma animada. Siga el ejemplo del software Quake visto en clases (disponible en material docente de u-cursos).

Teoría

Para estudiar la propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico se realiza equilibrio de fuerzas en un elemento infinitesimal sometido a corte dentro del medio, tal como se observa en la Figura 1, en donde ρ es la densidad del medio, G el módulo de corte y H la altura del medio elástico.

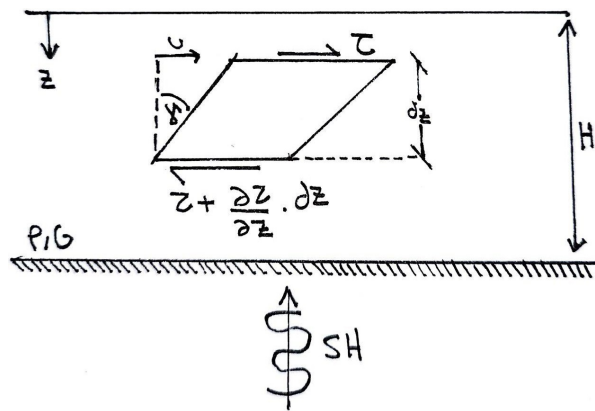


Figura 1: Elemento infinitesimal sometido a corte.

Al realizar equilibrio dinámico de fuerzas en el eje u se tiene que:

$$\underbrace{\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau dx dy}_{\text{Eq. fuerzas}} = \underbrace{\rho dx dy dz}_{\text{Masa}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{Aceleración}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

Para un material elástico se tiene que el corte es directamente proporcional a la deformación angular, con constante de proporción el módulo de corte o cizalle G :

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

Al utilizar (3) en (2) se obtiene finalmente:

$$G \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

La forma de la ecuación anterior (4) es similar a la ecuación de onda $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nu^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, conocida también como la ecuación de D'Alembert, en donde describe una onda de velocidad ν relacionando tanto espacio como tiempo.

Considerando luego que $V_s^2 = \frac{\rho}{G}$ corresponde a la velocidad de la onda de corte se puede utilizar la solución característica de la ecuación de onda como solución del problema de propagación unidimensional de onda de corte para un medio elástico:

$$u(t, z) = A \cdot e^{i(\omega t + kz)} \quad (5)$$

Cuyas derivadas corresponden a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A i \omega \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -A \omega^2 \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= A i k \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -A k^2 \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} \end{aligned} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (4) se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} -G A k^2 \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} &= -\rho A \omega^2 \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i k z} \\ \frac{G}{\rho} &= \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = V_s^2 \end{aligned} \quad (7)$$

En donde k corresponde al número de onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ la longitud de la onda. Finalmente, suponiendo que $-z$ también es solución de la ecuación se obtiene la solución final:

$$u(z, t) = A \cdot e^{i \omega \left(t + \frac{z}{V_s} \right)} + B \cdot e^{i \omega \left(t - \frac{z}{V_s} \right)} \quad (8)$$

Para resolver el problema de un estrato sobre roca es necesario identificar las condiciones de borde del problema:

■ **Condición natural de borde en superficie, no transmite corte**

En este caso se tiene que $\tau(z = 0) = 0$, por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A \cdot \frac{i \omega}{V_s} \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i \omega \frac{z}{V_s}} - B \cdot \frac{i \omega}{V_s} \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{i \omega \frac{z}{V_s}} = 0 \mapsto A = B$$

Así la solución se reduce a $u(z, t) = A \cdot e^{i \omega t} \left(e^{i \omega \frac{z}{V_s}} + e^{i \omega \frac{-z}{V_s}} \right) = 2A e^{i \omega t} \cos \left(\frac{\omega z}{V_s} \right)$

■ **En el basamiento se tiene igual desplazamiento que en roca**

Para este caso se tiene que $\|u(z, t = H)\| = a_b = 2A \cdot \|e^{i \omega t}\| \cos \left(\frac{\omega H}{V_s} \right) = 2A \cos \left(\frac{\omega H}{V_s} \right)$, en donde a_b corresponde a la amplitud basal del movimiento en la base a_b , así:

$$A = \frac{a_b}{2 \cos \left(\frac{\omega H}{V_s} \right)} \quad (9)$$

Por tanto, con ambas condiciones de borde se obtiene la solución para el problema:

$$u(z, t) = \frac{a_b}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)} e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right) \quad (10)$$

Implementación en Matlab

Con el fin de poder implementar y graficar el desplazamiento de partícula en profundidad en forma animada se desarrolló la ecuación (10) en matlab (ver archivo `u_elt.m`). En dicha función se pide como parámetro T período, H la altura del estrato, V_s velocidad de corte y a_b amplitud basal.

Dicha función retorna otra función que pide tanto z como t para entregar el desplazamiento, esto se desarrolló así para hacer el análogo a $u(z, t)$, en otras palabras:

$$u_elt(V_s, H, a_b, T) \mapsto u(z, t)$$

Código 1: Código más importante de `u_elt.m`.

```

27 %% Calcula la frecuencia
28 w = 2 * pi / T;
29 cosval = cos(w*H/Vs);
30 if cosval == 0
31     error('El periodo de la onda genera resonancia');
32 elseif abs(cosval) < 1e-15
33     warning('El periodo de la onda está cerca de la resonancia, posible inestabilidad numérica');
34 end
35
36 %% Retorna la funcion de desplazamiento
37 u = @(z, t) (ab / cosval) * exp(1i*w*t) * cos(w*z/Vs);

```

Al tener $u(z, t)$ la generación del gráfico animado es trivial, ya que se mantiene un ciclo *for* en donde se calcula la posición para un arreglo de z en un determinado t_i , al finalizar la instancia del ciclo se actualiza el tiempo $t_{i+1} = t_i + dt$. Para mantener la velocidad de la animación se hace uso de la instrucción *pause(t)* el cual permite pausar la ejecución del programa en un determinado tiempo t . La función que se encarga de graficar la animación corresponde a `quake_elt`.

Validación de la metodología

A modo de testear que el código sea consistente se crearon dos tests, uno tiene por objetivo contrastar el resultado obtenido de forma analítica, y en otro caso se prueba el código en el estado de resonancia.

Test analítico

Sea un estrato de $H=20$ metros de profundidad, con una velocidad de corte de $V_s=150$ metros por segundo. En este caso, para cualquier valor de amplitud basal a_b , sea $a_b=10$ metros, evaluado en un período de $T=1.8$ segundos, se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3,4907 \text{ Hz} \quad u(z, t) = \frac{10}{\cos\left(\frac{3,4907 \cdot 20}{150}\right)} e^{i3,4907t} \cos\left(\frac{3,4907z}{150}\right)$$

$$u(z, t) = 11,1907 e^{i3,4907t} \cos(0,0233 \cdot z)$$

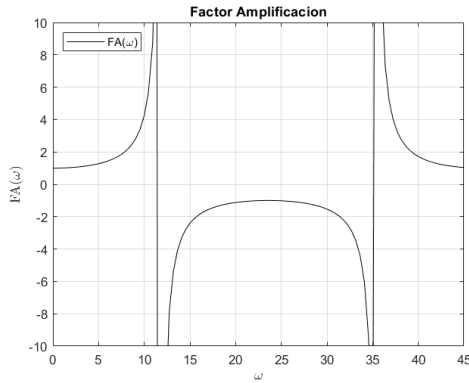
Algunos puntos de prueba:

Tabla 1: Casos de prueba función y resultados analíticos

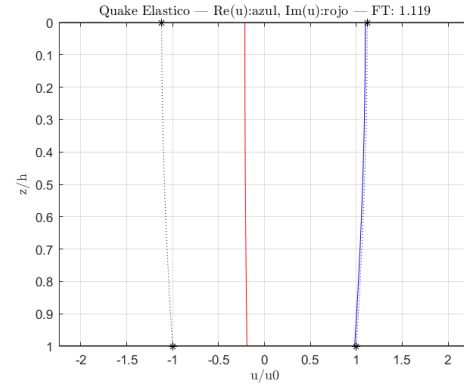
u (m)	t (s)	u(z,t)
0	0	11.1903
20	0	10.0000
10	5	1.8908

Por otra parte, teóricamente el factor de amplificación corresponde a $FA = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)} = 1,1191$.

El script programado en `test_p1_analitico.m` retornó los siguientes gráficos:



(a) Gráfico factor de amplificación.



(b) Quake.

Figura 2: Resultado caso analítico.

Test resonancia

En este test se busca llegar a la resonancia. Para ello se utilizó el mismo suelo, pero evaluado en $T = \frac{4H}{V_s}$, valor del período para el cual el coseno del denominador de la expresión se indefiniría, logrando teóricamente un factor de amplificación infinito.

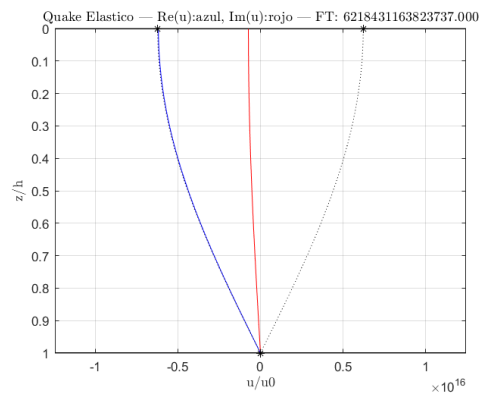


Figura 3: Evaluación del caso en resonancia.

Tal como se puede observar en la figura anterior, se obtuvo un FA muy alto, numéricamente inestable. Esto indica claramente que la solución es correcta, ya que amplifica en el período teóricamente resonante.

2. Pregunta 2

Implemente las ecuaciones de propagación unidimensional de ondas de corte para un medio visco-elástico compuesto por capas en condición permanente y grafique el desplazamiento de partícula en profundidad en forma animada. Considere un depósito compuesto por tres capas.

Considérese un depósito de suelo conformado por capas perfectamente horizontales y de extensión infinita, tal como se indica en la Figura

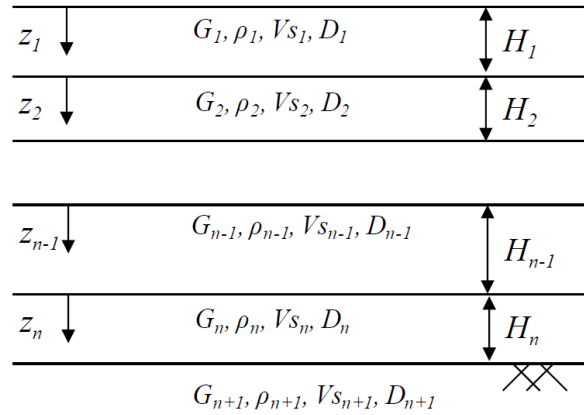


Figura 4: Depósito de suelos conformado por capas horizontales.

Al igual que el caso anterior, al realizar equilibrio dinámico sobre un elemento diferencial sometido a corte se obtiene nuevamente la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

Considerando un modelo constitutivo visco-elástico de tipo Kelvin-Voigt ¹:

$$\tau = G\gamma + c \cdot \dot{\gamma} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = G \frac{\partial \gamma}{\partial z} + c \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial z} \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \quad (13)$$

Se concluye que $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}$, luego suponiendo una solución general del tipo $u(z, t) = U(z)e^{i\omega t}$:

$$-\rho \cdot U(z)\omega^2 e^{i\omega t} = G \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} e^{i\omega t} + i\omega c \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} e^{i\omega t}$$

¹ El cual considera un sistema en paralelo de disipador y resorte.