

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Прикладная математика и информатика

Отчёт по заданию 4

Приближённое вычисление интеграла по квадратурным формулам.  
Приближённое вычисление интеграла по составным квадратурным  
формулам.

Выполнила:

Бабенко Полина Александровна

Группа 21.Б06-мм

Проверил:

Алцыбеев Глеб Олегович,

Кафедра вычислительной  
математики

Санкт-Петербург

### Постановка задачи 4.1

Написать программу для вычисления определенного интеграла при помощи предложенных квадратурных формул (КФ).

- 1) Параметры задачи: пределы интегрирования  $a$ ,  $b$  (запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).
- 2) Для случая легко интегрируемой функции  $f(x)$  (выбрать на свое усмотрение) вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от  $f(x)$  по конечному  $[a, b]$  (считаем вес  $\rho(x) \equiv 1$ ). (Обозначим это значение за  $J$ ).
- 3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от  $f(x)$  по  $[a, b]$  при помощи
  - a. КФ левого прямоугольника;
  - b. КФ правого прямоугольника;
  - c. КФ среднего прямоугольника;
  - d. КФ трапеции;
  - e. КФ Симпсона (или парабол);
  - f. КФ 3/8.
- 4) Посчитать и вывести на печать абсолютную фактическую погрешность для каждой КФ

# Результаты 4.1

```
Функция: f(x)=1-e^(-2x)
Весовая функция: го(x)=1

Полином нулевой степени: 5

Полином первой степени: 2x+3

Полином второй степени: x^2-x+1

Полином третьей степени: 2x^3-4x^2+x+7

Правая граница отрезка [a, b]: a=0

Левая граница отрезка [a, b]: b=1

Точное значение интеграла f(x) по [0.0, 1.0]: J=0.5676676416183064

Квадратурная формула левого прямоугольника:
+-----+-----+-----+
| Функция/полином | Значение интеграла | Фактическая погрешность |
+-----+-----+-----+
|      5          |      5.0          |      0.0                |
|      2x+3       |      3.0          |      1.0                |
|      x^2-x+1    |      1.0          |      0.1666666666666674  |
|      2x^3-4x^2+x+7 |      7.0          |      0.33333333333333304  |
|      1-e^(-2x)  |      0.0          |      0.5676676416183064  |
+-----+-----+-----+
```

Квадратурная формула правого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность
5	5.0	0.0
$2x+3$	5.0	1.0
$x^2-x+1$	1.0	0.16666666666666674
$2x^3-4x^2+x+7$	6.0	0.6666666666666667
$1-e^{-2x}$	0.8646647167633873	0.2969970751450809

Квадратурная формула среднего прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность
5	5.0	0.0
$2x+3$	4.0	0.0
$x^2-x+1$	0.75	0.08333333333333326
$2x^3-4x^2+x+7$	6.75	0.08333333333333304
$1-e^{-2x}$	0.6321205588285577	0.06445291721025126

Квадратурная формула трапеции:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность
5	5.0	0.0
$2x+3$	4.0	0.0
$x^2-x+1$	1.0	0.16666666666666674

	$x^2-x+1$		1.0		0.16666666666666674	
	$2x^3-4x^2+x+7$		6.5		0.16666666666666696	
	$1-e^{(-2x)}$		0.43233235838169365		0.13533528323661276	
+-----+-----+-----+						
Квадратурная формула Симпсона:						
+-----+-----+-----+						
	Функция/полином		Значение интеграла		Фактическая погрешность	
+-----+-----+-----+						
	5		5.0		0.0	
	$2x+3$		4.0		0.0	
	$x^2-x+1$		0.8333333333333333		0.0	
	$2x^3-4x^2+x+7$		6.666666666666666		$8.881784197001252e-16$	
	$1-e^{(-2x)}$		0.5655244920129363		0.0021431496053700982	
+-----+-----+-----+						
Квадратурная формула 3/8:						
+-----+-----+-----+						
	Функция/полином		Значение интеграла		Фактическая погрешность	
+-----+-----+-----+						
	5		5.0		0.0	
	$2x+3$		4.0		0.0	
	$x^2-x+1$		0.8333333333333334		$1.1102230246251565e-16$	
	$2x^3-4x^2+x+7$		6.666666666666667		0.0	
	$1-e^{(-2x)}$		0.566702743164804		0.0009648984535024496	
+-----+-----+-----+						

## Постановка задачи 4.2

- 1) Параметры задачи: пределы интегрирования  $A$ ,  $B$ , весовая функция  $\rho(x)$  и функция  $f(x)$ ,  $m$  – число промежутков деления  $[A, B]$ .
- 2) Для случая  $\rho(x) \equiv 1$  и легко интегрируемой функции  $f(x)$  вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от  $\rho(x) \cdot f(x)$  по конечному  $[A, B]$ . (Обозначим это значение за  $J$ ).
- 3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от  $\rho(x) \cdot f(x)$  по  $[A, B]$  при помощи СКФ
  - a. Левых прямоугольников;
  - b. Правых прямоугольников;
  - c. средних прямоугольников;
  - d. трапеций;
  - e. Симпсона
- 2) с параметром  $m$ . Обозначим эти значения  $J(h)$ , здесь  $h = (B-A)/m$ .

- 4) Посчитать и вывести на печать  $|J - J(h)|$  — абсолютную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
- 5) Для каждой составной КФ оценить погрешность вычислений для фиксированного набора параметров

## Результаты 4.2

Функция:  $f(x)=1-e^{-2x}$

Весовая функция:  $ro(x)=1$

Полином нулевой степени: 5

Полином первой степени:  $2x+3$

Полином второй степени:  $x^2-x+1$

Полином третьей степени:  $2x^3-4x^2+x+7$

Правая граница отрезка  $[A, B]$ :  $A=-1$

Левая граница отрезка  $[A, B]$ :  $B=3$

Число промежутков деления  $[A, B]$ :  $m=5$

Шаг:  $h=0.8$

Точное значение интеграла  $f(x)$  по  $[-1.0, 3.0]$ :  $J=0.30671132662300815$

Составная квадратурная формула левого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	20.0	0.0	none
$2x+3$	16.8	3.199999999999993	none
$x^2-x+1$	8.160000000000002	1.173333333333332	none
$2x^3-4x^2+x+7$	24.320000000000007	10.346666666666657	none
$1-e^{-2x}$	-3.404129928809928	3.710841255432936	23.644979516578083

Составная квадратурная формула правого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	20.0	0.0	none
$2x+3$	23.200000000000003	3.200000000000003	none
$x^2-x+1$	11.360000000000001	2.0266666666666673	none
$2x^3-4x^2+x+7$	46.720000000000006	12.053333333333342	none
$1-e^{-2x}$	2.5051319485932604	2.1984206219702522	23.644979516578083

Составная квадратурная формула среднего прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	20.0	0.0	none
2x+3	20.0	0.0	none
$x^2-x+1$	9.120000000000001	0.2133333333333293	none
$2x^3-4x^2+x+7$	34.24	0.4266666666666623	none
$1-e^{-2x}$	0.673109968898518	0.3663986422755099	3.1526639355437447

Составная квадратурная формула трапеции:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	20.0	0.0	none
2x+3	20.0	0.0	none
$x^2-x+1$	9.760000000000002	0.42666666666666764	none
$2x^3-4x^2+x+7$	35.52	0.8533333333333388	none
$1-e^{-2x}$	-0.4494989901083366	0.7562103167313419	6.305327871087489

Составная квадратурная формула Симпсона:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	20.0	0.0	none
2x+3	20.0	0.0	none
$x^2-x+1$	9.333333333333334	0.0	none
$2x^3-4x^2+x+7$	34.666666666666664	0.0	none
$1-e^{-2x}$	0.2989069825629008	0.007804344060107327	0.06725683062493322

## Постановка задачи 4.3

- 1) Увеличить  $m$  в  $l$  раз (здесь  $l$  – параметр, натуральное число; запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).
- 2) Вычислить приближённо и вывести на печать значения интеграла от  $\rho(x) \cdot f(x)$  по  $[A, B]$ , посчитанные при помощи составных формул левых, правых, средних прямоугольников, трапеций и Симпсона с новым числом делений  $[A, B] - m \cdot l$ . (Обозначим это новое значение за  $J(h/l)$ ).
- 3) Посчитать и вывести на печать абсолютную фактическую погрешность каждой формулы для случая нового числа промежутков разбиения  $m \cdot l$ .
- 4) Уточнить значения  $J(h)$  и  $J(h/l)$  по принципу Рунге для каждой СКФ.
- 5) Посчитать и вывести на печать абсолютные фактические погрешности для уточнённых значений.

## Результаты 4.3

Функция:  $f(x)=1-e^{(-2x)}$   
Весовая функция:  $ro(x)=1$

Полином нулевой степени: 5

Полином первой степени:  $2x+3$

Полином второй степени:  $x^2-x+1$

Полином третьей степени:  $2x^3-4x^2+x+7$

Правая граница отрезка [A, B]: A=0

Левая граница отрезка [A, B]: B=5

Число промежутков деления [A, B]: m=4

Шаг: h=1.25

Точное значение интеграла  $f(x)$  по  $[0.0, 5.0]$ : J=4.500022699964881

Составная квадратурная формула левого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	33.75	6.25	none
$x^2-x+1$	22.96875	11.197916666666664	none
$2x^3-4x^2+x+7$	110.78125	82.55208333333334	none
$1-e^{(-2x)}$	3.6382799625085847	0.8617427374562965	6.25

Составная квадратурная формула правого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	46.25	6.25	none
$x^2-x+1$	47.96875	13.802083333333336	none
$2x^3-4x^2+x+7$	304.53125	111.19791666666666	none
$1-e^{(-2x)}$	4.888223212596382	0.3882005126315011	6.25



Составная квадратурная формула среднего прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	33.515625	0.6510416666666643	none
$2x^3-4x^2+x+7$	186.171875	7.161458333333343	none
$1-e^{(-2x)}$	4.609860677278071	0.10983797731319012	1.3020833333333333

Составная квадратурная формула трапеции:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	35.46875	1.3020833333333357	none
$2x^3-4x^2+x+7$	207.65625	14.322916666666657	none
$1-e^{(-2x)}$	4.2632515875524835	0.23677111241239768	2.6041666666666665

Составная квадратурная формула Симпсона:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	34.16666666666667	7.105427357601002e-15	none
$2x^3-4x^2+x+7$	193.33333333333334	0.0	none
$1-e^{(-2x)}$	4.494324314036209	0.00569838592867189	0.06781684027777778

Во сколько раз умножить число промежутков:  $l=2$

Новый шаг:  $h/l=0.625$

Составная квадратурная формула левого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	36.875	3.125	none
$x^2-x+1$	28.2421875	5.924479166666664	none
$2x^3-4x^2+x+7$	148.4765625	44.85677083333334	none
$1-e^{(-2x)}$	4.124070319893328	0.37595238007155274	3.125

Составная квадратурная формула правого прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	43.125	3.125	none
$x^2-x+1$	40.7421875	6.575520833333336	none
$2x^3-4x^2+x+7$	245.3515625	52.01822916666666	none
$1-e^{-2x}$	4.749041944937227	0.24901924497234607	3.125

Составная квадратурная формула среднего прямоугольника:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	34.00390625	0.1627604166666643	none
$2x^3-4x^2+x+7$	191.54296875	1.7903645833333428	none
$1-e^{-2x}$	4.531148628143921	0.031125928179039697	0.3255208333333333

Составная квадратурная формула трапеции:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	34.4921875	0.3255208333333357	none
$2x^3-4x^2+x+7$	196.9140625	3.580729166666657	none
$1-e^{-2x}$	4.436556132415278	0.06346656754960289	0.6510416666666666

Составная квадратурная формула Симпсона:

Функция/полином	Значение интеграла	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
5	25.0	0.0	none
$2x+3$	40.0	0.0	none
$x^2-x+1$	34.16666666666667	7.105427357601002e-15	none
$2x^3-4x^2+x+7$	193.33333333333334	0.0	none
$1-e^{-2x}$	4.499617796234373	0.0004049037305078329	0.004238552517361111

Уточнение по Рунге:

Составная квадратурная формула левого прямоугольника:

Функция/полином	Уточненное значение интеграла	Фактическая погрешность
5	25.0	0.0
$2x+3$	40.0	0.0
$x^2-x+1$	33.515625	0.65104166666666643
$2x^3-4x^2+x+7$	186.171875	7.161458333333343
$1-e^{-2x}$	4.609860677278072	0.109837977313191

Составная квадратурная формула правого прямоугольника:

Функция/полином	Уточненное значение интеграла	Фактическая погрешность
5	25.0	0.0
$2x+3$	40.0	0.0
$x^2-x+1$	33.515625	0.65104166666666643
$2x^3-4x^2+x+7$	186.171875	7.161458333333343
$1-e^{-2x}$	4.609860677278072	0.109837977313191

Составная квадратурная формула среднего прямоугольника:

Функция/полином	Уточненное значение интеграла	Фактическая погрешность
5	25.0	0.0
$2x+3$	40.0	0.0
$x^2-x+1$	34.166666666666664	0.0
$2x^3-4x^2+x+7$	193.33333333333334	0.0
$1-e^{-2x}$	4.504911278432537	0.004888578467656224

Составная квадратурная формула трапеции:

Функция/полином	Уточненное значение интеграла	Фактическая погрешность
5	25.0	0.0
$2x+3$	40.0	0.0
$x^2-x+1$	34.166666666666664	0.0
$2x^3-4x^2+x+7$	193.33333333333334	0.0
$1-e^{-2x}$	4.49432431403621	0.0056983859286710015

Составная квадратурная формула Симпсона:

Функция/полином	Уточненное значение интеграла	Фактическая погрешность
5	25.0	0.0
$2x+3$	40.0	0.0
$x^2-x+1$	34.16666666666667	$7.105427357601002e-15$
$2x^3-4x^2+x+7$	193.33333333333334	0.0
$1-e^{-2x}$	4.499970695047584	$5.2004917296955e-05$