Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Прикладная математика и информатика

Отчёт по заданию 2

Задача алгебраического интерполирования. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона и в форме Лагранжа

Выполнила:

Бабенко Полина Александровна

Группа 21.Б06-мм

Проверил:

Алцыбеев Глеб Олегович,

Кафедра вычислительной математики

Санкт-Петербург

2023

Постановка задачи

Дана таблично-заданная функция (m+1) аргумента. Требуется найти значение в точке x, (здесь x — параметр задачи; пользователю предлагается ввести произвольное значение x).

Для этого требуется построить интерполяционный алгебраический многочлен, степени не выше n, (n – параметр задачи; пользователю предлагается ввести произвольное значение $n \leq m$) .

2 вариант:

f(x)=ln(1+x)

a=0

m+1=16

b=1.5

n=8

Решение

Решением задачи будет значение $P_n(x) \approx f(x)$ (здесь P_n — алгебраический интерполяционный многочлен функции f, степени не выше n (при этом $n \leq m$), построенный по набору из (n+1) узла z_j , решающему задачу минимизации погрешности интерполирования в заданной точке x.

Для выбора «оптимальных» для точки x узлов необходимо упорядочить узлы исходной таблицы по мере удаления их от точки интерполирования x (провести любую любимую сортировку). Далее работать уже с отсортированной таблицей. Узлы для построения P_n будут располагаться в первых (n+1) строках отсортированной таблицы (в наших обозначениях это $x_0, x_1, \dots x_n$.

Найти значение $P_n^L(x)$, используя представление в форме Лагранжа. Вычислить фактическую погрешность $ef_n(x)=|f(x)-P_n^L(x)|$. Найти значение $P_n^N(x)$, используя представление в форме Ньютона. Для этого построить таблицу разделенных разностей по первым (n+1) значениям таблицы до порядка n включительно. Вычислить фактическую погрешность $ef_n(x)=|f(x)-P_n^N(x)|$.

Вывод программы

- Точка интерполирования: 1

Степень интерполяционного многочлена n (<= 15): 8

Отсортированная таблица

	x_k	f(x_k)
1	1.0	0.6931471805599453
2	0.9	0.6418538861723947
3	1.1	0.7419373447293773
4	0.8	0.5877866649021191
5	1.2	0.7884573603642703
6	0.7	0.5306282510621704
7	1.3	0.8329091229351039
8	1.4	0.8754687373538999
9	0.6	0.47000362924573563
10	0.5	0.4054651081081644
11	1.5	0.9162907318741551
12	0.4	0.3364722366212129
13	0.3	0.26236426446749106
14	0.2	0.1823215567939546
15	0.1	0.09531017980432493
16	0.0	0.0

Полином в форме Лагранжа:

P_n(x) = 0.6931471805599453

|f(x)-P_n(x)| = 0.0

Полином в форме Ньютона:

P_n(x) = 0.6931471805599453

|f(x)-P_n(x)| = 0.0

- Точка интерполирования: 0.77

Степень интерполяционного многочлена n (<= 15): 8

Отсортированная таблица

	x_k	f(x_k)
1	0.8	0.5877866649021191
2	0.7	0.5306282510621704
3	0.9	0.6418538861723947
4	0.6	0.47000362924573563
5	1.0	0.6931471805599453
6	0.5	0.4054651081081644
7	1.1	0.7419373447293773
8	0.4	0.3364722366212129
9	1.2	0.7884573603642703
10	0.3	0.26236426446749106
11	1.3	0.8329091229351039
12	0.2	0.1823215567939546
13	1.4	0.8754687373538999
14	0.1	0.09531017980432493
15	1.5	0.9162907318741551
16	0.0	0.0

+----+-----+---------------------+

Полином в форме Лагранжа:

P_n(x) = 0.5709795465794626

|f(x)-P_n(x)| = 6.27520257978631e-12

Полином в форме Ньютона:

P_n(x) = 0.5709795465794628

|f(x)-P_n(x)| = 6.274980535181385e-12

Значение из WolframAlpha

$x \approx 0.77000000000000000000, \quad y \approx 0.57097954658573777740$

Вычисление с помощью интерполяционной формы Ньютона оказалось немного более точным. (В вычислениях копятся ошибки, а разными методами накопления ошибок происходят по-разному)

Видно, что погрешность достаточно мала, значит цель достигнута.

Замечание

Если точка, в которой мы ищем значение функции выходит за границы заданного нами изначально отрезка, результат может быть непредсказуем.

Ниже мы ищем значение функции в точках 2 и 8, и погрешность получается непозволительно большая.

Точка интерполирования: 2

Степень интерполяционного многочлена n (<= 15): 8

Отсортированная таблица

+----+-----+---------------------+

| | x_k | f(x_k) |

+----+-----+---------------------+

| 1 | 1.5 | 0.9162907318741551 |

| 2 | 1.4 | 0.8754687373538999 |

3	1.3	0.8329091229351039
4	1.2	0.7884573603642703
5	1.1	0.7419373447293773
6	1.0	0.6931471805599453
7	0.9	0.6418538861723947
8	0.8	0.5877866649021191
9	0.7	0.5306282510621704
10	0.6	0.47000362924573563
11	0.5	0.4054651081081644
12	0.4	0.3364722366212129
13	0.3	0.26236426446749106
14	0.2	0.1823215567939546
15	0.1	0.09531017980432493
16	0.0	0.0

+----+-----+---------------------+

Полином в форме Лагранжа:

P_n(x) = 1.0985845632485507

|f(x)-P_n(x)| = 2.7725419559088138e-05

Полином в форме Ньютона:

P_n(x) = 1.0985845632483378

|f(x)-P_n(x)| = 2.7725419772028914e-05

Хотите ввести новые значения x и n? (Да/Нет): Да

Точка интерполирования: 10

Степень интерполяционного многочлена n (<= 15): 8

Отсортированная таблица

	x_k	f(x_k)
1	1.5	0.9162907318741551
2	1.4	0.8754687373538999
3	1.3	0.8329091229351039
4	1.2	0.7884573603642703
5	1.1	0.7419373447293773
6	1.0	0.6931471805599453
7	0.9	0.6418538861723947
8	0.8	0.5877866649021191
9	0.7	0.5306282510621704
10	0.6	0.47000362924573563
11	0.5	0.4054651081081644
12	0.4	0.3364722366212129
13	0.3	0.26236426446749106
14	0.2	0.1823215567939546
15	0.1	0.09531017980432493
16	0.0	0.0

P_n(x) = -1322.7914218902588

|f(x)-P_n(x)| = 1324.9886464675951

Полином в форме Ньютона:

P_n(x) = -1322.7911659999234

|f(x)-P_n(x)| = 1324.9883905772597