Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

М.В. Девятерикова, Л.А. Заозерская, А.А. Колоколов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Омск 2006

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73
Д25

Рецензенты:
Перцев Н.В., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой "Математическое моделирование" ОмГУ;
Заблоцкая О.А., к.ф.-м.н., доцент кафедры "Высшая математика" ОмГУПС

Девятерикова М.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А.
Д25 Методы оптимизации и исследование операций: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. – 64 с.

Учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения по линейному программированию, целочисленному линейному программированию, сетевому планированию и теории игр, которые требуются для моделирования и решения практических оптимизационных задач. Предназначено для студентов младших курсов специальности 080801 "Прикладная информатика в экономике".

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

В разных областях практической деятельности часто возникает проблема выбора оптимального решения из множества возможных. И если при принятии каких-либо личных решений можно руководствоваться жизненным опытом и интуицией, то при планировании и управлении производством необходимы более строгие и надежные методы.

Исследование операций (ИО) – это научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Исследование операций способствует превращению искусства принятия решений в научную дисциплину, основанную в значительной степени на математических моделях и методах.

Термин "исследование операций" возник в результате перевода выражения Operations Research, введенного в конце 30-х гг. 20 в. как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, которое занималось вопросами использования радиолокационных установок в общей системе обороны. Первоначально ИО было связано с решением задач военного содержания, но уже с конца 40-х гг. оно используется для решения как чисто технических, так и технико-экономических задач, а также задач управления на различных уровнях.

Содержательно многие задачи исследования операций являются оптимизационными, т.е. состоят в выборе среди некоторого множества допустимых решений таких решений, которые можно в том или ином смысле рассматривать как оптимальные. Под допустимостью решения обычно подразумевается возможность его реализации при имеющихся ресурсах (сырье, оборудование, временные и трудовые ресурсы и др.). Ограниченность ресурсов выражается в виде математических ограничений, чаще всего с помощью неравенств. Оптимальность решения понимается как его целесообразность, при этом предполагается наличие одной или нескольких целевых функций (критериев), которые должны быть максимизированы или минимизированы.

Рассмотрим постановки нескольких классических задач ИО.

Пример 1. Задача оптимального планирования производства

Предприятие планирует выпускать несколько типов продукции из имеющихся ресурсов. Известны затраты ресурсов на выпуск единицы объема продукции каждого типа, запасы ресурсов и доход от реализации единицы объема продукции. Требуется найти план производства продукции, при котором суммарный доход будет максимальным.

Пример 2. Транспортная задача

Имеются пункты производства (поставщики) и несколько пунктов потребления (потребителей) однородного продукта. Заданы объем производства (запас) каждого поставщика и объем потребления (спрос) каждого потребителя, а также стоимости перевозок (транспортные затраты) единицы объема продукции от поставщиков к потребителям. Требуется составить план перевозок минимальной суммарной стоимости, при котором спрос всех потребителей будет полностью удовлетворен.

Пример 3. Задача коммивояжера

Пусть имеется несколько городов и известны расстояния между ними. Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них ровно один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить маршрут коммивояжера минимальной длины.

Многие задачи исследования операций могут быть записаны следующим образом:

$$f(x) \to max\ (min), x \in D, \qquad (*)$$

где D – множество допустимых решений, а f – целевая функция задачи.

В зависимости от вида множества D и функции f задачи исследования операций делятся на классы. Если целевая функция является скалярной (состоит из одной функции), то задача $(*)$ называется задачей *однокритериальной оптимизации.* В случае двух и более функций задача $(*)$ – задача *многокритериальной оптимизации.*

Каждый из этих классов задач также делится на два подкласса, определяемых множеством D. Если множество D представляет собой объединение изолированных точек (например, конечное множество) или непересекающихся множеств, то мы получаем задачу дискретной оптимизации, в противном случае – задачу непрерывной оптимизации. В частности, задача коммивояжера является задачей дискретной оптимизации, так как множество возможных маршрутов конечно, а транспортная задача – задачей непрерывной оптимизации. Задача оптимального планирования производства в зависимости от типа выпускаемой продукции может быть задачей как непрерывной, так и дискретной оптимизации.

В рассмотренных классах, в свою очередь, могут быть выделены более специальные классы задач: задачи линейного программирования (целевая функция и функции, определяющие множество D, линейные), задачи выпуклого программирования (указанные функции выпуклы для задачи минимизации) и некоторые другие. Кроме того, изучаются отдельные задачи, такие, как задача коммивояжера, транспортная задача и многие другие.

Тип задачи исследования операций определяет методы ее решения. Для каждого класса задач разрабатываются свои методы, которые учитывают его специфику. Тем не менее большинство оптимизационных задач обладает рядом общих черт, обуславливающих методику их решения. Во-первых, даже для наиболее простых классов задач невозможно представить решение в виде формулы от исходных данных. Поэтому задачи исследования операций, как правило, должны решаться с помощью специальных алгоритмов. Во-вторых, у большинства практически интересных оптимизационных задач множество допустимых решений настолько велико, что решение этих задач выполнимо только на ЭВМ.

Схема исследования типичной оптимизационной задачи может состоять из следующих этапов:

- содержательная постановка задачи;
- построение, корректировка и исследование математической модели;
- разработка или выбор алгоритма решения задачи;
- поиск оптимального решения (решений) задачи;
- анализ полученных решений;
- формулировка рекомендаций лицу, принимающему решение.

При этом на каждом этапе возможен переход на другие этапы. Особенно трудными этапами являются:

– построение математической модели, по возможности наиболее адекватной реальной ситуации,
– разработка методов решения.

Данное пособие состоит из шести глав. Первые две главы посвящены задачам линейного программирования, методам их решения и теории двойственности. В третьей главе рассмотрен один из важных случаев задачи линейного программирования – транспортная задача, а также специальный метод ее решения – метод потенциалов. Четвертая глава посвящена задачам целочисленного линейного программирования и алгоритмам отсечения. В пятой главе даны элементы сетевого планирования и управления. В шестой главе рассмотрены некоторые принципы принятия решений в конфликтных ситуациях (элементы теории игр).

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задачи линейного программирования (ЛП) являются математическими моделями многих практических задач, возникающих в экономике, планировании, управлении и других областях. Кроме того, в ряде случаев решение задачи линейного программирования является этапом решения более сложной задачи оптимизации (например, задачи целочисленного линейного программирования).

1.1. Основные определения и постановки задач

Общая задача *линейного программирования* имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\ (min) \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \#\ b_i,\ i = 1, ..., m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0 \text{ для некоторых } \ j \in \{1, ..., n\}, \tag{1.3}$$

где под знаком # подразумевается один из знаков $\leq$, $=$, $\geq$, причем в одной задаче ЛП могут встречаться знаки всех трех типов.

Функция f называется *целевой*, а условия (1.2), (1.3) – *ограничениями задачи*. Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называется *допустимым решением*, или *планом* задачи ЛП. Множество всех допустимых решений будем обозначать через D. Геометрически множество D представляет собой выпуклое многогранное множество.

Вектор $x^* \in D$ называется *оптимальным решением (оптимальным планом)* задачи ЛП, если $f(x^*) \geq f(x)$ для любого $x \in D$ в задаче максимизации или $f(x^*) \leq f(x)$ для любого $x \in D$ в задаче минимизации. Задача (1.1)–(1.3) называется *разрешимой*, если она имеет оптимальное решение. В противном случае задача ЛП *неразрешима*. Неразрешимость задачи ЛП может быть связана либо с противоречивостью ограничений (множество допустимых решений D пусто), либо с неограниченностью целевой функции на множестве D.

Классическим примером содержательной задачи, математической моделью которой является задача линейного программирования, служит задача оптимального планирования производства. Напомним ее постановку.

Задача оптимального планирования производства

Предприятие планирует выпускать n типов продукции из имеющихся m видов ресурсов. Известны затраты a_{ij} i-го ресурса на выпуск единицы объема продукции j-го типа, запас i-го ресурса b_i и доход c_j от реализации единицы объема продукции j-го типа, $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$. Требуется найти план производства продукции, при котором суммарный доход будет максимальным.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j объем выпуска продукции j-го типа, $j = 1, ..., n$. Тогда план выпуска продукции можно записать в виде вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, причем все x_j должны быть неотрицательны. Работая по этому плану, предприятие не может израсходовать больше имеющихся у него ресурсов. Заметим, что ресурсы могут быть истрачены не полностью. Таким образом, план x должен удовлетворять ограничениям:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i,\ \ i = 1, ..., m.$$

Суммарный доход от реализации всей продукции, произведенной в соответствии с планом x, равен: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Таким образом, получаем задачу вида (1.1) – (1.3), т.е. задачу линейного программирования. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 1.1. Пусть у некоторого предприятия имеется три вида ресурсов, из которых планируется выпускать два типа продукции. Затраты ресурсов на единицу объема продукции каждого вида, запасы ресурсов и доход от реализации единицы объема продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов		Запасы ресурсов
	изделие A	изделие B	
1	3	2	10
2	2	4	12
3	6	0	16
Доход	3	3	max

Математическая модель имеет вид:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 3x_1 + 3x_2 &\to max \\
3x_1 + 2x_2 &\le 10, \\
2x_1 + 4x_2 &\le 12, \\
6x_1 \qquad &\le 16, \\
x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

На рис 1.1 изображено допустимое множество задачи – многогранник $ABCDE$. Оптимальное решение $x^* = (2,2)$ соответствует вершине многогранника – точке C.

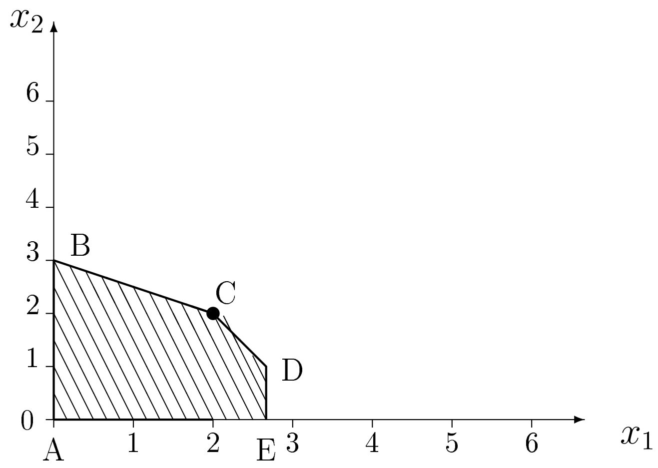


Рис. 1.1

1.2. Симплекс-метод решения задач ЛП

1.2.1. Классификация задач ЛП

Канонической задачей ЛП (КЗЛП) называется задача вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, ..., m, \tag{1.5}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, ..., n. \tag{1.6}$$

Две задачи ЛП являются *эквивалентными*, если каждому допустимому решению одной задачи соответствует некоторое допустимое решение другой задачи, и наоборот; причем такое же условие выполняется для оптимальных решений.

Для любой задачи ЛП легко построить эквивалентную ей КЗЛП, по оптимальному решению которой можно восстановить оптимальное решение исходной задачи. Рассмотрим правила построения КЗЛП на примере.

Пример 1.2. Дана задача ЛП:

$$\begin{aligned} f(x) = \ x_1 - \ x_2 &\to \min \\ 3x_1 + \ x_2 &\le -2, \\ x_1 - 2x_2 &\ge \ \ 1, \\ -x_1 + \ x_2 &= -1, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

Для получения КЗЛП надо перейти от минимума в целевой функции к максимуму, от ограничений-неравенств – к ограничениям-равенствам и от переменных без ограничения на знак – к неотрицательным переменным. Переход от минимума к максимуму (и наоборот) достигается умножением целевой функции на (–1): $\bar{f}(x) = -f(x)$. Первое (и второе) ограничение можно превратить в равенство, добавив (соответственно отняв) к его левой части новую неотрицательную переменную x_3 (x_4). Эти переменные называются *дополнительными*. Заметим, что в рассматриваемой задаче нет ограничений на знак переменной x_2, т.е. она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Такую переменную можно представить в виде разности двух неотрицательных переменных: $x_2 = x_2' - x_2''$, где $x_2', x_2'' \ge 0$. После выполнения этих преобразований задача примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = \ -x_1 + x_2' - x_2'' &\to \max \\ 3x_1 \ + \ x_2' - \ x_2'' + x_3 \qquad &= \ -2, \\ x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \qquad - x_4 &= \quad 1, \\ -x_1 + \ x_2' - \ \ x_2'' \qquad\qquad &= \ -1, \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3,\ x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Эта задача является канонической. Аналогичным способом любая задача ЛП может быть приведена к канонической форме. При этом полученная КЗЛП будет эквивалентна исходной.

Система линейных уравнений (1.5) называется *системой с базисом,* если в каждом уравнении имеется переменная, которая входит в него с коэффициентом (+1) и отсутствует в остальных уравнениях. Такие переменные называются *базисными* и образуют *базис*, а остальные – *небазисными.* Геометрически каждому базису соответствует вершина множества D.

Приведенной задачей ЛП (ПЗЛП) называется такая каноническая задача ЛП вида (1.4)–(1.6), в которой:

1) система уравнений (1.5) есть система с базисом;
2) целевая функция $f(x)$ выражена только через небазисные переменные;
3) все правые части уравнений неотрицательны: $b_i \geq 0, i = 1, ...m$.

Отметим, что не для всякой задачи ЛП существует эквивалентная ей ПЗЛП. И даже если она существует, то получить ее труднее, чем каноническую задачу ЛП. Однако во многих случаях (например, в задаче оптимального планирования производства) построенная для исходной задачи КЗЛП оказывается также и приведенной.

1.2.2. Симплекс-метод решения ПЗЛП

Общий метод решения задачи ЛП – метод последовательного улучшения плана – впервые был предложен советским математиком Л.В. Канторовичем в 1939 г. В дальнейшем аналогичный метод, получивший название симплекс-метода (или прямого симплекс-метода), был разработан американским математиком Дж. Данцигом. Идея этих методов состоит в целенаправленном переборе вершин множества допустимых решений (базисов).

Рассмотрим ПЗЛП следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = c_0 - c_1 x_1 - \cdots - c_n x_n \to \max \\
&\qquad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\
&\qquad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + \qquad x_{n+2} \qquad = b_2, \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad x_{n+m} = b_m, \\
&\qquad x_j \geq 0, j = 1, ..., n+m.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Напомним, что здесь $b_i \geq 0, i = 1, ..., m$, переменные $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ – базисные, а $x_1, ..., x_n$ – небазисные. Обозначим $x = (x_1, ..., x_{n+m})$.

Отметим, что для задачи (1.7) легко найти допустимое решение, например, точка с координатами

$$x_1 = ... = x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2, ..., x_{n+m} = b_m$$

удовлетворяет ограничениям задачи. Такие допустимые решения называются *базисными.* Именно с этого базисного решения начинает работу симплекс-метод. Следующая таблица называется *симплексной таблицей* для задачи (1.7):

		x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
f	c_0	c_1	$\cdots$	c_q	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0
x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1q}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2q}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+p}	b_p	a_{p1}	$\cdots$	a_{pq}	$\cdots$	a_{pn}	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mq}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1

Заметим, что в симплексной таблице базисным переменным соответствуют столбцы, в которых только один элемент равен $(+1)$, а остальные равны нулю.

Если $b_i \geq 0$ для всех $i = 1, ..., m$, то симплексная таблица называется *прямо допустимой.* При этом таблице соответствует начальное решение задачи (1.7):

$$x^0 = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, b_1, b_2, ..., b_m).$$

В нем базисные переменные принимают значения элементов из столбца, соответствующего c_0, а небазисные переменные равны нулю. Значение целевой функции на этом решении равно $f(x^0) = c_0$.

Прежде чем привести описание симплекс-метода по шагам, представим симплексную таблицу в следующем общем виде:

		x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
f	α_{00}	α_{01}	$\cdots$	α_{0q}	$\cdots$	α_{0n}	$\alpha_{0(n+1)}$	$\alpha_{0(n+2)}$	$\cdots$	$\alpha_{0(n+m)}$
x_{n+1}	α_{10}	α_{11}	$\cdots$	α_{1q}	$\cdots$	α_{1n}	$\alpha_{1(n+1)}$	$\alpha_{1(n+2)}$	$\cdots$	$\alpha_{1(n+m)}$
x_{n+2}	α_{20}	α_{21}	$\cdots$	α_{2q}	$\cdots$	α_{2n}	$\alpha_{2(n+1)}$	$\alpha_{2(n+2)}$	$\cdots$	$\alpha_{2(n+m)}$
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+p}	α_{p0}	α_{p1}	$\cdots$	α_{pq}	$\cdots$	α_{pn}	$\alpha_{p(n+1)}$	$\alpha_{p(n+2)}$	$\cdots$	$\alpha_{p(n+m)}$
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	α_{m0}	α_{m1}	$\cdots$	α_{mq}	$\cdots$	α_{mn}	$\alpha_{m(n+1)}$	$\alpha_{m(n+2)}$	$\cdots$	$\alpha_{m(n+m)}$

где

$\alpha_{00} = c_0;$
$\alpha_{0j} = c_j,\ j = 1, ..., n;$
$\alpha_{0j} = 0,\ j = n + 1, ..., n + m;$
$\alpha_{i0} = b_i,\ i = 1, ..., m;$
$\alpha_{ij} = a_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n;$
$\alpha_{i(n+i)} = 1,\ i = 1, ..., m;$
$\alpha_{i(n+j)} = 0,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., m, i \neq j.$

Отметим, что при описании симплекс-метода номер итерации для простоты опускается.

Симплекс-метод

Шаг 0. Составить начальную симплексную таблицу.

Перейти к шагу 1.

Шаг 1. *Проверка на оптимальность*

Если $\alpha_{0j} \geq 0$ для любого $j = 1, ..., n + m$, то найдено оптимальное решение x^* и алгоритм прекращает работу. При этом значения небазисных переменных в x^* равны нулю, а базисные переменные равны соответствующим значениям α_{i0}, $i = 1, ..., m$. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. *Проверка на неразрешимость*

Если существует столбец с номером q, такой, что $\alpha_{0q} < 0$ и $\alpha_{iq} \leq 0$ для любого $i = 1, ..., m$, то целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых решений, следовательно, задача неразрешима, и алгоритм прекращает работу. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. *Выбор ведущего столбца q*

Столбец с номером q выбирается в качестве *ведущего,* если $\alpha_{0q} < 0$ (если таких столбцов несколько, то выбирается любой из них). Перейти к шагу 4.

Шаг 4. *Выбор ведущей строки p*

Строка с номером p выбирается в качестве *ведущей,* если

$$\frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pq}} = \min\left\{\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{iq}} : \alpha_{iq} > 0,\ i = 1, ..., m\right\}. \tag{1.8}$$

Шаг 5. *Преобразование симплексной таблицы*

Элемент a_{pq} является *ведущим элементом.* Переменная x_q становится базисной, а переменная в строке p – небазисной переменной. Элементы α_{ij}, $j = 0, ..., n + m$, $i = 0, ..., m$ новой таблицы вычисляются по следующим правилам:

1) элементы ведущей строки делятся на α_{pq}:

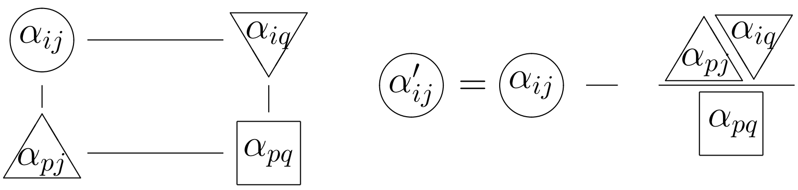
$$\alpha'_{pj} = \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}},\ j = 0, ..., n + m;$$

2) все остальные элементы α'_{ij} вычисляются по формулам:

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} \alpha_{pj},\ i = 0, ..., m,\ j = 0, ..., n+m,\ i \neq p. \qquad (1.9)$$

Перейти на шаг 1.

Формулу (1.9) называют *правилом прямоугольника*, так как ей соответствует следующее графическое представление:



Заметим, что после преобразования симплексной таблицы в столбце с номером q все элементы, кроме $\alpha'_{pq} = 1$, равны нулю. Это происходит потому, что переменная x_q становится базисной. Отметим также, что преобразования симплексной таблицы соответствуют исключению переменных в методе Гаусса с помощью элементарных преобразований над строками системы линейных уравнений задачи (1.7), которые не меняют множества решений системы. Правило выбора ведущей строки (1.8) гарантирует, что α'_{i0} неотрицательны для любого $i = 1, ..., m$, а это означает, что новой симплексной таблице также будет соответствовать допустимое решение.

Пример 1.3. Решить симплекс-методом задачу оптимального планирования производства из примера 1.1.

Приведем задачу к каноническому виду. Для преобразования неравенств в равенства введем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5. Получим следующую задачу ЛП, которая является также приведенной задачей:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 3x_1 + 3x_2 \to max& \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 10, \\
2x_1 + 4x_2 + \quad x_4 \qquad &= 12, \\
6x_1 \qquad + \qquad x_5 \quad &= 16, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.&
\end{aligned}
$$

Выпишем начальную симплексную таблицу.

			x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5
	f	0	-3	-3	0	0	0
	x_3	10	3	2	1	0	0
→	x_4	12	2	4^*	0	1	0
	x_5	16	6	0	0	0	1

Начальное решение $x^0 = (0, 0, 10, 12, 16)$, $f(x^0) = 0$. Ведущий столбец и ведущая строка отмечены стрелками (→), а ведущий элемент – звездочкой (∗). Результат преобразования симплексной таблицы приведен ниже.

			x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5
	f	9	$-3/2$	0	0	$3/4$	0
→	x_3	4	2^*	0	1	$-1/2$	0
	x_2	3	$1/2$	1	0	$1/4$	0
	x_5	16	6	0	0	0	1

Текущее решение $x^1 = (0, 3, 4, 0, 16)$, $f(x^1) = 9$ (точка B на рис. 1.1). Следующая симплексная таблица имеет вид:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	12	0	0	$3/4$	$3/8$	0
x_1	2	1	0	$1/2$	$-1/4$	0
x_2	2	0	1	$-1/4$	$3/8$	0
x_5	4	0	0	-3	$3/2$	1

Текущее решение $x^2 = (2, 2, 0, 0, 4)$, $f(x^2) = 12$ (точка C на рис. 1.1). Поскольку в строке целевой функции полученной симплексной таблицы нет отрицательных элементов, то текущее решение оптимально. Для исходной задачи ЛП оптимальное решение имеет вид $x^* = (2, 2)$, $f^* = 12$.

1.2.3. Метод искусственного базиса

Описанный вариант симплекс-метода может быть применен, если задача ЛП находится в приведенной форме. Однако, как было уже отмечено, не для всякой задачи ЛП существует эквивалентная ей приведенная задача, и даже если она существует, то построить ее не всегда легко. В этих случаях для получения приведенной формы задачи ЛП (или установления, что она не существует) используется метод искусственного базиса.

Рассмотрим следующую каноническую задачу ЛП:

$$\begin{array}{l} f(x) = c_1x_1 \ + \cdots + \ c_nx_n \to \max \\ \qquad a_{11}x_1 \ + \cdots + a_{1n}x_n = \ b_1, \\ \qquad a_{21}x_1 \ + \cdots + a_{2n}x_n = \ b_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \qquad x_j \geq 0, j = 1, ..., n. \end{array} \tag{1.10}$$

Будем считать, что она не является приведенной: все b_i неотрицательны (в противном случае умножим на (–1) соответствующее ограничение), но у нее отсутствует базис. Для задачи (1.10) построим *вспомогательную* задачу ЛП:

$$\begin{array}{l} h(x,t) = -(t_1 + \cdots + t_m) \to \max \\ \qquad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ + \quad t_1 \qquad\quad = b_1, \\ \qquad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \ + \qquad t_2 \qquad = b_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad t_m = b_m, \\ \qquad x_j \geq 0, j = 1, ..., n; \ t_i \geq 0, i = 1, ..., m. \end{array} \tag{1.11}$$

Заметим, что если в задаче (1.11) целевую функцию $h(x, t)$ выразить через переменные $x_1, ..., x_n$, то вспомогательная задача станет приведенной, при этом переменные $t_1, ..., t_n$ будут базисными переменными. Эти переменные называются *искусственными.*

Вспомогательная задача ЛП всегда разрешима, т.к. множество допустимых решений не пусто (например, точка $x = (0, ..., 0, b_1, ..., b_m)$ является допустимой) и целевая функция ограничена сверху на множестве допустимых решений ($h(x, t) \leq 0$).

Найдя оптимальное решение задачи (1.11), можно ответить на вопрос, существуют ли допустимые решения в исходной задаче. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Каноническая задача ЛП (1.10) имеет допустимое решение тогда и только тогда, когда оптимальное значение целевой функции $h^*(x, t)$ вспомогательной задачи (1.11) равно нулю.*

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если множество допустимых решений задачи (1.10) непусто, то существует эквивалентная ей приведенная задача ЛП, которая может быть найдена из последней симплексной таблицы вспомогательной задачи (1.11).*

Таким образом, получаем следующий алгоритм нахождения приведенной формы задачи ЛП.

Метод искусственного базиса

Шаг 1. Построить и решить вспомогательную задачу ЛП. Перейти на шаг 2.

Шаг 2. Если $h^* < 0$, то исходная задача ЛП не имеет допустимых решений и алгоритм заканчивает работу. В противном случае перейти на шаг 3.

Шаг 3. Если среди базисных переменных в последней симплексной таблице вспомогательной задачи имеется искусственная переменная t_i, то с помощью гауссовых преобразований над строками заменить ее переменной x_j для некоторого j. После этого вычеркнуть из таблицы столбец, соответствующий переменной t_i, и строку, соответствующую целевой функции $h(x, t)$. Строки полученной таблицы и целевая функция $f(x)$ определяют приведенную задачу ЛП, эквивалентную исходной.

1.2.4 Вопросы конечности и эффективности симплекс-метода

При практической реализации любого итерационного алгоритма возникают два вопроса. Первый вопрос касается его конечности, а именно: всегда ли алгоритм находит решение задачи за конечное число итераций? В случае положительного ответа исследуется эффективность алгоритма, т.е. количество итераций, необходимых для нахождения решения задачи. Чтобы ответить на эти вопросы для симплекс-метода, нам потребуются следующие определения.

Базисное решение приведенной задачи ЛП называется *невырожденным*, если значения всех базисных переменных не равны нулю (положительны). Приведенная задача ЛП называется *невырожденной*, если все ее базисные решения не вырождены. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Если ПЗЛП не вырождена, то через конечное число шагов симплекс-метод либо находит ее оптимальное решение, либо устанавливает, что задача неразрешима.*

Таким образом, на невырожденных задачах ЛП симплекс-метод является конечным. В общем случае это неверно, так как существуют примеры задач ЛП, на которых симплекс-метод зацикливается, т.е. работает бесконечно. Возникает вопрос: как решать такие задачи? Кроме того, даже если задача ЛП не вырождена, проверить это достаточно сложно.

Для получения конечного алгоритма необходимо модифицировать рассмотренный симплекс-метод. Введем следующие определения.

Вектор x будем называть *лексикографически положительным* (*лексикографически отрицательным*) и писать $x \succ 0 \quad (x \prec 0)$, если первая его отличная от нуля компонента больше (меньше) нуля. Будем говорить, что вектор x *лексикографически больше* (*лексикографически меньше*) вектора y и писать $x \succ y \quad (x \prec y)$, если $x - y \succ 0 \quad (x - y \prec 0)$.

Например, пусть $x = (1, 0, -3), y = (0, 4, -7)$. Тогда $x - y = (1, -4, 4)$, следовательно, $x \succ y$, так как первая ненулевая компонента разности векторов положительна, при этом $x \succ 0, \quad y \succ 0$.

Рассмотрим модификацию симплекс-метода, которая называется лексикографическим симплекс-методом (ЛСМ). ЛСМ также применяется к приведенной задаче ЛП, но начинает работу с таблицы, в которой все строки, за исключением, быть может, строки целевой функции, лексикографически положительны. Для этого достаточно поменять порядок переменных, поставив базисные на первое место.

Все шаги, кроме выбора ведущей строки, на каждой итерации ЛСМ совпадают с аналогичными шагами рассмотренного ранее симплекс--метода. Поэтому рассмотрим только правило выбора ведущей строки.

Шаг $4'$. *Выбор ведущей строки* p
Строка с номером p выбирается в качестве ведущей, если

$$\frac{A_p}{\alpha_{pq}} = lexmin \left\{ \frac{A_i}{\alpha_{iq}} : \ \alpha_{iq} > 0, \ i = 1, ..., m \right\},$$

где $A_i = (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, ..., \alpha_{i(n+m)})$, т.е. A_i – это i-я строка текущей симплексной таблицы.

ТЕОРЕМА 1.3. *Лексикографический симплекс-метод за конечное число шагов либо находит оптимальное решение приведенной задачи ЛП, либо устанавливает, что она неразрешима.*

Рассмотрим кратко вопрос об эффективности симплекс-метода (ЛСМ). Вообще говоря, этот метод относится к экспоненциальным алгоритмам, в которых на некоторых семействах задач ЛП число итераций может расти экспоненциально с увеличением числа переменных (например, как 2^n). Однако, как показывает вычислительный эксперимент, для многих реальных задач число итераций не превышает $2m \div 3m$, поэтому на практике симплекс-метод предпочитают другим, более эффективным с теоретической точки зрения алгоритмам.

Основные утверждения разделов 1.2.3, 1.2.4 можно найти, например, в [10].

2. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая задача ЛП, которая называется *двойственной.* Исследование пары двойственных задач позволяет получить критерии оптимальности решений, провести исследование устойчивости задач, а также предоставляет широкие возможности для анализа задач ЛП и алгоритмов их решения.

2.1. Двойственные задачи

Рассмотрим пару задач ЛП следующего вида:

$$
\begin{array}{lcl}
\qquad\qquad (\mathrm{I}) & & \qquad\qquad (\mathrm{II}) \\
f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to max & & g(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to min \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \ldots, k, & \longleftrightarrow & y_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = k+1, \ldots, m, & \longleftrightarrow & y_i \text{ – любые, } i = k+1, \ldots, m, \\
x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, l, & \longleftrightarrow & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = 1, \ldots, l, \\
x_j \text{ – любые, } j = l+1, \ldots, n, & \longleftrightarrow & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ j = l+1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Задачу (I) называют *прямой* задачей ЛП, а (II) – *двойственной.* Ограничения задач, соответствующие друг другу, называются *сопряженными* (они отмечены стрелками). При этом говорят, что задачи (I) и (II) записаны в *стандартной* форме. Очевидно, что для любой задачи ЛП существует эквивалентная ей стандартная задача. Для приведения задачи ЛП к такой форме достаточно умножить (если это необходимо) целевую функцию и (или) ограничения на (–1).

Нетрудно проверить, что задача ЛП, двойственная к (II), совпадает с задачей (I). Таким образом, задачи (I) и (II) являются взаимно двойственными.

Сформулируем правила построения двойственной задачи для произвольной задачи ЛП. Предварительно необходимо согласовать целевую функцию и знаки ограничений: если целевая функция на максимум, то знаки ограничений должны быть $\le$ или $=$; наоборот, если целевая функция на минимум, то знаки ограничений должны быть $\ge$ или $=$.

Правила построения двойственной задачи

(1) Если прямая задача на максимум, то двойственная ей – на минимум (и наоборот).

(2) Каждому линейному неравенству прямой задачи соответствует неотрицательная переменная двойственной задачи; уравнениям соответствуют переменные без ограничения в знаке (и наоборот).

(3) Правые части системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи (и наоборот).

(4) Коэффициенты системы ограничений при переменной x_j прямой задачи являются коэффициентами ограничения двойственной задачи, соответствующего этой переменной (и наоборот).

2.2. Теоремы двойственности

Двойственность является одним из фундаментальных понятий в теории линейного программирования. Исключительно важную роль играют утверждения, получившие название теорем двойственности, а также вытекающие из них критерии оптимальности.

Далее через D_I и D_{II} обозначим множества допустимых решений задач (I) и (II) соответственно.

ТЕОРЕМА 2.1. (Основное неравенство двойственности.) *Если задачи (I) и (II) разрешимы, то для любых допустимых решений x и y этих задач соответственно справедливо неравенство $f(x) \leq g(y)$.*

ТЕОРЕМА 2.2. (Первая теорема двойственности.) *Если одна из пары двойственных задач (I), (II) разрешима, то разрешима и другая задача, причем оптимальные значения целевых функций совпадают, т.е. $f(x^*) = g(y^*)$, где x^*, y^* – оптимальные решения задач (I) и (II) соответственно.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. (Первый критерий оптимальности.) *Допустимое решение прямой задачи x^* является оптимальным тогда и только тогда, когда существует допустимое решение двойственной задачи y^*, при котором $f(x^*) = g(y^*)$.*

Говорят, что вектора $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют *условиям дополняющей нежесткости* (УДН), если при подстановке этих векторов в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие произведения, которые называются *характеристическими*, равны нулю:

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i &= 0, \ i = 1, ..., m, \\
x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) &= 0, \ j = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.3. (Вторая теорема двойственности.) *Допустимые решения x^*, y^* являются оптимальными для задач (I), (II) соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.*

Покажем, как можно найти оптимальное решение двойственной задачи по известному оптимальному решению прямой задачи, используя УДН.

Пример 2.1. Решить на основе теорем двойственности задачу, двойственную к задаче оптимального планирования производства из примера 1.1.

Выпишем пару двойственных задач:

(I)	(II)
$f(x) = 3x_1 + 3x_2 \to max$	$g(y) = 10y_1 + 12y_2 + 16y_3 \to min$
$3x_1 + 2x_2 \le 10,$	$y_1 \ge 0,$
$2x_1 + 4x_2 \le 12,$	$y_2 \ge 0,$
$6x_1 \qquad \le 16,$	$y_3 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,$	$3y_1 + 2y_2 + 6y_3 \ge 3,$
$x_2 \ge 0,$	$2y_1 + 4y_2 \qquad \ge 3.$

Поскольку задача (I) разрешима ($x^* = (2, 2)$, $f^* = 12$), то по первой теореме двойственности задача (II) также разрешима, причем $g(y^*) = f(x^*) = 12$. Для определения $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, т.е. оптимального решения задачи (II), выпишем УДН для данной пары задач:

$$\begin{gathered}
(3x_1 + 2x_2 - 10)y_1 = 0, \\
(2x_1 + 4x_2 - 12)y_2 = 0, \\
(6x_1 \qquad - 16)y_3 = 0, \\
x_1(3y_1 + 2y_2 + 6y_3 - 3) = 0, \\
x_2(2y_1 + 4y_2 \qquad - 3) = 0.
\end{gathered}$$

Подставив координаты векторов x^*, y^* в УДН, получим:

$$\begin{aligned}
(3\cdot 2 + 2\cdot 2 - 10)y_1^* &= 0,\\
(2\cdot 2 + 4\cdot 2 - 12)y_2^* &= 0,\\
(6\cdot 2 \qquad\quad - 16)y_3^* &= 0,\\
2\cdot(3y_1^* + 2y_2^* + 6y_3^* - 3) &= 0,\\
2\cdot(2y_1^* + 4y_2^* \qquad\quad - 3) &= 0.
\end{aligned}$$

Поскольку в третьем уравнении выражение в скобках не равно нулю $(6\cdot 2 - 16 = -4)$, то в силу УДН неравенство $y_3^* \geq 0$ должно выполняться как равенство, т.е. $y_3^* = 0$. Далее, поскольку $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, то в силу УДН $3y_1^* + 2y_2^* + 6y_3^* - 3 = 0$, $2y_1^* + 4y_2^* - 3 = 0$.

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{rcrcr}
y_3^* = 0, & & y_3^* = 0, & & y_3^* = 0,\\
3y_1^* + 2y_2^* + 6y_3^* - 3 = 0, & \longrightarrow & 3y_1^* + 2y_2^* = 3, & \longrightarrow & y_1^* = 3/4,\\
2y_1^* + 4y_2^* \qquad\quad - 3 = 0, & & 2y_1^* + 4y_2^* = 3, & & y_2^* = 3/8.
\end{array}$$

Решения $x^* = (2,2) \in D_I$ и $y^* = (\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, 0) \in D_{II}$ удовлетворяют УДН и, следовательно, в силу второй теоремы двойственности, являются оптимальными в задачах (I) и (II) соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. (Второй критерий оптимальности.) *Допустимое решение прямой задачи x^* является оптимальным тогда и только тогда, когда существует допустимое решение двойственной задачи y^*, такое, при котором пара (x^*, y^*) удовлетворяет УДН.*

Теория двойственности позволяет также ответить на вопрос, в каких случаях задача ЛП неразрешима. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.4. *Если множества допустимых решений прямой и двойственной задач не пусты ($D_I \neq \emptyset, D_{II} \neq \emptyset$), то обе задачи разрешимы.*

ТЕОРЕМА 2.5. (Критерий неограниченности целевой функции.) *Целевая функция прямой задачи не ограничена сверху на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда множество допустимых решений двойственной задачи пусто.*

Таким образом, для пары двойственных задач возможны четыре случая:

(1) обе задачи разрешимы;

(2) множество допустимых решений прямой задачи пусто, целевая функция двойственной задачи неограничена снизу на непустом множестве допустимых решений;

(3) целевая функция прямой задачи неограничена сверху на непустом множестве допустимых решений, множество допустимых решений двойственной задачи пусто;

(4) допустимые множества прямой и двойственной задач пусты.

2.3. Экономическая интерпретация двойственных переменных и теорем двойственности

Рассмотрим задачу оптимального планирования производства из примера 1.1 и двойственную к ней задачу ЛП (пример 2.1). Предположим, что при изучении вопроса об использовании ресурсов появилась возможность их продажи. Спрашивается, какую минимальную цену нужно установить за единицу объема каждого сырья, чтобы доход от продажи всего сырья был не меньше доходов от реализации продукции, которая может быть выпущена из этого сырья.

Каждому линейному ограничению первой задачи (и отвечающему ему ресурсу) ставится в соответствие неотрицательная переменная y_i, $i = 1, 2, 3$. Указанные переменные удовлетворяют двум линейным неравенствам, связывающим затраты ресурсов на производство единицы продукции с величиной получаемого при этом дохода. Поскольку правые части неравенств задачи (II) измеряются в единицах стоимости, то и левые части должны измеряться в этих же единицах, т.е. значения переменных y_i можно интерпретировать как некоторые цены ресурсов. Их оптимальные значения называют *объективно обусловленными оценками ресурсов*. Линейные ограничения задачи (II) означают, что эти оценки должны быть такими, чтобы суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы каждой продукции, была не меньше дохода от продажи единицы этой продукции.

Целевая функция $g(y) = 10y_1 + 12y_2 + 16y_3$ выражает суммарную оценку всех имеющихся запасов ресурсов. Согласно первой теореме двойственности для оптимальных векторов $x^* = (2, 2)$, $y^* = (\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, 0)$ имеет место равенство $f(x^*) = g(y^*) = 12$. Это означает, что максимальный доход от продажи всей готовой продукции совпадает с минимальной суммарной оценкой всех ресурсов.

В силу второй теоремы двойственности оптимальный план x^* и оптимальный вектор оценок y^* должны удовлетворять УДН. Это означает следующее.

1) Если при производстве продукции в соответствии с оптимальным планом x^* какой-то ресурс не расходуется полностью (в нашем примере это ресурс 3, так как $6 \cdot 2 = 12 < 16$), то его оценка равна нулю ($y_3^* = 0$). И наоборот, ресурсы, имеющие ненулевую оптимальную оценку, используются полностью (из $y_1^* = \frac{3}{4}$ и $y_2^* = \frac{3}{8}$ следует, соответственно, $3x_1^* + 2x_2^* = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10, \quad 2x_1^* + 4x_2^* = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 12$).

2) Если при оптимальном способе производства продукция с номером j выпускается (в нашем случае первая и вторая продукция, так как $x_1^* = 2 > 0, \quad x_2^* = 2 > 0$), то производство этой продукции неубыточно, поскольку суммарная оценка затрат на производство этой продукции равна доходу от ее реализации ($3y_1^* + 2y_2^* + 6y_3^* = 3 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot 0 = 3$, $2y_1^* + 4y_2^* = 2 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} = 3$). И наоборот, продукция, издержки на производство которой превышают доход от ее реализации, при оптимальном плане производства не должна выпускаться, а значение x_j^* должно быть равно нулю (в нашем примере такая продукция отсутствует).

Значения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 можно интерпретировать как количества неизрасходованного сырья соответствующего вида. Поскольку в последней симплексной таблице $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ (см. пример 1.3), то первый и второй ресурсы при оптимальном плане расходуются полностью. Такие ресурсы называются *дефицитными*, и их оценки в рассматриваемом примере $y_1^* = \frac{3}{4}$, $y_2^* = \frac{3}{8}$ – положительны. Отметим, что в некоторых случаях оценки дефицитных ресурсов могут равняться нулю. Оптимальное значение переменной x_5 не равно нулю ($x_5^* = 4$), т.е. третий ресурс расходуется не полностью и остается в количестве 4 единиц. Этот ресурс – *недефицитный*, его оценка $y_3^* = 0$.

2.4. Основы анализа на чувствительность

Анализ математических моделей на чувствительность проводится после получения оптимального решения и представляет собой исследование влияния изменения исходных параметров модели на оптимальное решение. Для задач ЛП этими параметрами являются коэффициенты целевой функции, правые части ограничений и коэффициенты при переменных в ограничениях задачи.

Одним из исследований указанного типа является *анализ модели на чувствительность к правой части.* Для задачи оптимального планирования производства это вопрос о влиянии на оптимальное решение изменения объемов запасов ресурсов.

В данном разделе проводится указанный анализ для задачи оптимального планирования производства с использованием графических методов, которые достаточно наглядны и просты. Более сложные методы анализа моделей на чувствительность описаны, например, в [8].

Введем некоторые определения. Неравенство называется *активным*, если при подстановке в него оптимального решения оно обращается в равенство. Геометрически это означает, что соответствующая активному ограничению прямая проходит через оптимальную точку. Иначе неравенство называется *неактивным.*

При анализе модели на чувствительность к правым частям возникает следующий вопрос: каким образом увеличение или уменьшение ресурсов (дефицитных и недефицитных) влияет на оптимальное значение целевой функции? Нетрудно показать, что увеличение дефицитного ресурса может привести к возрастанию оптимального значения целевой функции, а уменьшение такого ресурса – к его убыванию. Достаточно малое сокращение недефицитного ресурса не влияет на оптимальное значение целевой функции. Любое увеличение недефицитного ресурса делает этот ресурс еще более избыточным и не изменяет оптимального значения целевой фунции.

В связи с этим представляет интерес определение предельного объема дефицитного ресурса, при котором оптимальное значение целевой функции продолжает увеличиваться, а также предельного объема недефицитного ресурса, при котором оптимальное значение целевой функции остается неизменным.

Рассмотрим эти вопросы на примере 1.1. В этой задаче первый и второй ресурсы являются дефицитными, а третий – недефицитным.

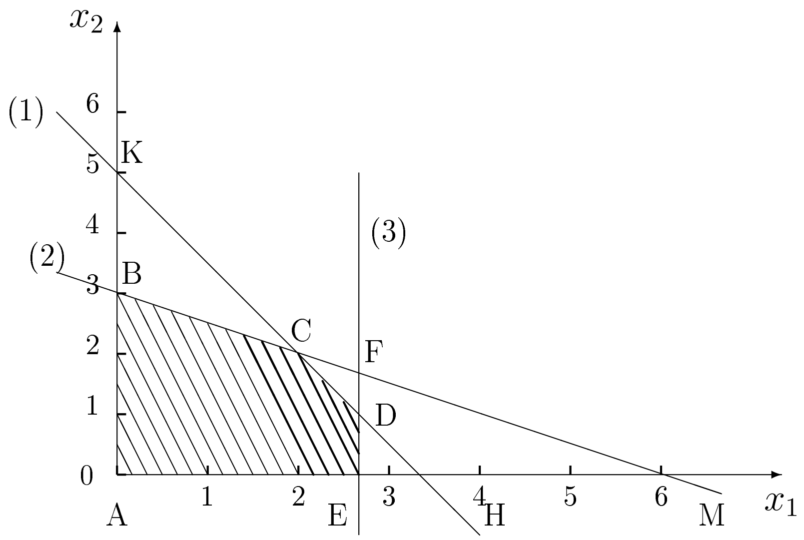


Рис. 2.1

На рис. 2.1 увеличение первого ресурса соответствует параллельному сдвигу вправо прямой KH. При этом треугольник CDF стягивается в точку F, которая становится новым оптимальным решением, а ограничение 3 при этом становится активным. Дальнейшее увеличение ресурса 1 не влияет на оптимальное решение, так как он становится недефицитным. Координаты точки F находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 12, \\ 6x_1 \qquad &= 16. \end{aligned}$$

Имеем $x_1^F = \frac{8}{3}, x_2^F = \frac{5}{3}$. Подставляя координаты точки F в первое ограничение, получим новый объем первого ресурса $b_1' = 3 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{34}{3}$ и новое оптимальное значение целевой функции $f_1'(x^F) = 13$. Приращение оптимального значения целевой функции за счет первого ресурса равно $\Delta f_1 = f_1' - f^* = 13 - 12 = 1$. Таким образом, при увеличении объема запасов первого ресурса на $4/3$ единицы $(\Delta b_1 = b_1' - b_1 = \frac{34}{3} - 10 = \frac{4}{3})$ доход увеличится на единицу.

Аналогично увеличение второго ресурса соответствует сдвигу прямой BM вверх параллельно самой себе. При этом треугольник BKC стянется в точку K, а ограничение $x_1 \geq 0$ станет активным. Вычислим координаты точки K, решая систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 10, \\ x_1 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Получим $x_1^K = 0$, $x_2^K = 5$. Объем второго ресурса при этом вырастет до $b_2' = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20$ и изменится на $\Delta b_2 = b_2' - b_2 = 20 - 12 = 8$ единиц. Оптимальное значение целевой функции равно $f_2'(x^K) = 15$, а его приращение $\Delta f_2 = f_2' - f^* = 15 - 12 = 3$.

Проведем анализ недефицитного третьего ресурса. Его объем можно уменьшать до тех пор, пока он не станет дефицитным, т.е. пока соответствующая прямая FE не пройдет через оптимальную точку C с координатами $(2,2)$. Максимальное значение целевой функции при этом не изменится. Подставляя координаты точки C в левую часть ограничения 3, найдем новый объем этого ресурса и величину его изменения:

$$b_3' = 6 \cdot 2 = 12, \quad \Delta b_3 = b_3' - b_3 = 12 - 16 = -4.$$

Таким образом, запасы третьего ресурса можно уменьшить на 4 единицы. Оптимальное значение целевой функции при этом не изменится и будет равно 12.

Запишем всю полученную информацию в таблицу:

Ресурс	Вид	Точка	b_i'	Δb_i	f_i'	Δf_i	$\frac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$
1	дефицитный	$F(\frac{8}{3}; \frac{5}{3})$	34/3	4/3	13	1	3/4
2	дефицитный	$K(0;5)$	20	8	15	3	3/8
3	недефицитный	$C(2;2)$	12	-4	12	0	0

Другой задачей анализа на чувствительность может быть следующий вопрос: *увеличение какого из ресурсов наиболее выгодно в смысле повышения дохода и по какой цене имеет смысл покупать дополнительное количество такого ресурса?*

Введем новую характеристику ценности каждой дополнительной единицы ресурса. Ее величина определяется соотношением $\frac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$, где Δb_i – изменение объема i-го ресурса, Δf_i – приращение оптимального значения f при изменении i-го ресурса на Δb_i и фиксированных значениях остальных ресурсов. Например, для первого ресурса эта величина будет равна $\frac{\Delta f_1}{\Delta b_1} = \frac{3}{4}$. Заметим, что величины $\frac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$ совпадают с объективно обусловленными оценками ресурсов y_i^*, а именно справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.6. (Третья теорема двойственности.) *При достаточно малых изменениях i-го ресурса приращение оптимального дохода прямо пропорционально приращению этого ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным значению объективно обусловленной оценки y_i^* :*

$$\Delta\ f_i = y_i^* \cdot \Delta b_i.$$

Из теоремы следует, что в нашем примере выгоднее приобретать первый ресурс, поскольку его оценка ($y_1^* = \frac{3}{4}$) выше. При этом покупка дополнительного количества данного ресурса выгодна по цене, не превосходящей его оценки.

Для недефицитных ресурсов любое дополнительное приращение ресурса не приводит к увеличению дохода ($\Delta f_3 = 0$), поэтому $y_3^* = 0$. Таким образом, дополнительная покупка недефицитного ресурса нерентабельна даже при нулевых ценах на них.

2.5. Двойственный симплекс-метод

Теория двойственности позволяет получать не только теоретические результаты, но и разрабатывать новые алгоритмы. Мы рассмотрим вариант алгоритма, который называется *двойственным симплекс-методом* (ДСМ) и является в ряде случаев более удобным, чем рассмотренный ранее прямой симплекс-метод.

Для двойственного симплекс-метода можно использовать формат симплексных таблиц, описанный для прямого симплекс-метода. Однако в них среди коэффициентов $\alpha_{i0}, i = 1, ..., m$ могут быть отрицательные (если таблица не является оптимальной), а все коэффициенты α_{0j} неотрицательны, т.е. выполнен признак оптимальности прямого симплекс-метода.

В ДСМ для получения текущего решения мы также полагаем все небазисные переменные равными нулю, а значения базисных переменных – равными α_{i0}, $i = 1, ..., m$. Далее мы находим ведущий элемент, причем сначала ищем ведущую строку, а затем – ведущий столбец. В отличие от прямого симплекс-метода здесь ведущий элемент является отрицательным. Формулы преобразования таблиц остаются без изменения.

Таким образом, в этом методе также происходит перебор совокупностей базисных переменных. Двойственный симплекс-метод можно рассматривать как прямой метод решения двойственной задачи ЛП. Ниже для ДСМ мы будем использовать несколько другой формат симплексной таблицы, поскольку он является более удобным при решении задач целочисленного линейного программирования алгоритмами отсечения.

Рассмотрим задачу ЛП в приведенной форме:

$$
\begin{array}{l}
f(x) = c_0 - c_1x_1 - \cdots - c_nx_n \to \max \\
\qquad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
\qquad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\
\qquad x_j \geq 0, j = 1, ..., n+m.
\end{array}
$$

Двойственный симплекс-метод начинает работу с начальной симплексной таблицы, которая имеет вид:

		x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n
f	c_0	c_1	$\cdots$	c_q	$\cdots$	c_n
x_1	0	-1	0	0	0	0
$\cdots$	.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	0	0	0	0	0	-1
x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1q}	$\cdots$	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2q}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+p}	b_p	a_{p1}	$\cdots$	a_{pq}	$\cdots$	a_{pn}
$\cdots$	.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mq}	$\cdots$	a_{mn}

Здесь переменные $x_1, ..., x_n$ – небазисные, а переменные $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ – базисные. Заметим, что небазисным переменным соответствуют строки, которые содержат один ненулевой элемент (–1). Будем предполагать, что $c_j \geq 0, j = 1, ..., n$. В этом случае симплексная таблица называется *двойственно допустимой.*

Так же, как и в симплекс-методе, запишем эту таблицу в общей форме

		x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n
f	α_{00}	α_{01}	$\cdots$	α_{0q}	$\cdots$	α_{0n}
x_1	α_{10}	α_{11}	$\cdots$	α_{1q}	$\cdots$	α_{1n}
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	α_{n0}	α_{n1}	$\cdots$	α_{nq}	$\cdots$	α_{nn}
x_{n+1}	$\alpha_{(n+1)0}$	$\alpha_{(n+1)1}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+1)q}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+1)n}$
x_{n+2}	$\alpha_{(n+2)0}$	$\alpha_{(n+2)1}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+2)q}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+2)n}$
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+p}	$\alpha_{(n+p)0}$	$\alpha_{(n+p)1}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+p)q}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+p)n}$
$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	$\alpha_{(n+m)0}$	$\alpha_{(n+m)1}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+m)q}$	$\cdots$	$\alpha_{(n+m)n}$

Здесь

$\alpha_{00} = c_0;$

$\alpha_{0j} = c_j,\ j = 1, ..., n;$

$\alpha_{ij} = 0,\ i = 1, ..., n,\ j = 0, ..., n, i \neq j;$

$\alpha_{ii} = -1,\ i = 1, ..., n;$

$\alpha_{(n+i)0} = b_i,\ i = 1, ..., m;$

$\alpha_{(n+i)j} = a_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$

Двойственный симплекс-метод

Шаг 0. Составить начальную двойственно допустимую симплексную таблицу. Перейти к шагу 1.

Шаг 1. *Проверка на оптимальность*

Если $\alpha_{i0} \geq 0$ для любого $i = 1, ..., n+m$, то найдено оптимальное решение x^* и алгоритм прекращает работу. При этом значения переменных в x^* равны соответствующим значениям $\alpha_{i0},\ i = 1, ..., n+m$. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. *Проверка на неразрешимость*

Если существует строка с номером $p \geq 1$, такая, что $\alpha_{p0} < 0$ и $\alpha_{pj} \geq 0$ для любого $j = 1, ..., n$, то допустимое множество задачи пусто, следовательно, задача неразрешима и алгоритм прекращает работу. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. *Выбор ведущей строки p*

Строка с номером $p \geq 1$ выбирается в качестве ведущей, если $\alpha_{p0} < 0$ (если таких строк несколько, то выбирается любая из них). Перейти к шагу 4.

Шаг 4. *Выбор ведущего столбца q*

Столбец с номером q выбирается в качестве ведущего, если

$$\frac{\alpha_{0q}}{\alpha_{pq}} = \max\left\{\frac{\alpha_{0j}}{\alpha_{pj}} : \alpha_{pj} < 0, j = 1, ..., n\right\}.$$

Шаг 5. *Преобразование симплексной таблицы*

Элемент α_{pq} является ведущим. Переменная в столбце q становится базисной, а переменная x_p – небазисной переменной. Элементы α'_{ij}, $i = 0, ..., n+m,\ j = 0, ..., n$ новой таблицы вычисляются по следующим правилам:

1) элементы ведущего столбца делятся на $(-\alpha_{pq})$:

$$\alpha'_{iq} = \frac{\alpha_{iq}}{-\alpha_{pq}},\ i = 0, ..., n+m;$$

2) все остальные элементы α'_{ij} вычисляются по формулам:

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}}\,\alpha_{pj},\ i = 0, ..., n+m; j = 0, ..., n,\ j \neq q.$$

Перейти на шаг 1.

Рассмотрим использование двойственного симплекс-метода для решения задачи ЛП на примере.

Пример 2.2. Решить задачу ЛП:

$$\begin{aligned} f(x) = -2x_1 - 8x_2 - \ x_3 - 5x_4 &\to max \\ -2x_1 + \ x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 &\geq 18, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\geq 30, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\geq 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Преобразуем задачу к канонической форме, добавив дополнительные переменные:

$$\begin{aligned} f(x) = -2x_1 - 8x_2 - \ x_3 - 5x_4 &\to max \\ -2x_1 + \ x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 - x_5 \qquad &= 18, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \quad - x_6 \quad &= 30, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \qquad - x_7 &= 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0. \end{aligned}$$

Полученную задачу нельзя решать прямым симплекс-методом, так как переменные x_5, x_6, x_7 входят в уравнения с коэффициентом (–1), т.е. задача не является приведенной. Однако умножив все ограничения задачи на (–1), мы получим задачу ЛП, симплексная таблица для которой является двойственно допустимой.

$$
\begin{array}{l}
f(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to max \\
\qquad\qquad\quad 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 + x_5 \qquad\quad = -18, \\
\qquad\quad\ \ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \quad + x_6 \quad = -30, \\
\qquad\qquad -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \qquad\ \ + x_7 \ = -24, \\
\qquad\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{array}
$$

Следовательно, для решения задачи можно применить двойственный симплекс-метод, не проводя никаких дополнительных преобразований задачи. Начальная симплексная таблица будет иметь вид:

			x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4
	f	0	2	8	1	5
	x_1	0	−1	0	0	0
	x_2	0	0	−1	0	0
	x_3	0	0	0	−1	0
	x_4	0	0	0	0	−1
$\rightarrow$	x_5	−18	2	−1	3	-1^*
	x_6	−30	−3	−4	−2	3
	x_7	−24	−1	−2	−4	−2

Начальное решение $x^0 = (0, 0, 0, 0, -18, -30, -24), f(x^0) = 0$. Заметим, что это решение не является допустимым. Преобразования симплексной таблицы приведены ниже. Ведущая строка и ведущий столбец отмечены стрелками ($\rightarrow$), а ведущий элемент звездочкой ($*$).

		x_1	x_2	x_3	x_4
f	-90	12	3	16	5
x_1	0	-1	0	0	0
x_2	0	0	-1	0	0
x_3	0	0	0	-1	0
x_4	18	-2	1	-3	-1
x_5	0	0	0	0	-1
x_6	-84	3	-7^*	7	3
x_7	12	-5	0	-10	-2

Текущее решение $x^1 = (0, 0, 0, 18, 0, -84, 12)$, $f(x^1) = -90$. После пересчета получим следующую таблицу:

		x_1	x_6	x_3	x_5
f	-126	$3/7$	$3/7$	19	$44/7$
x_1	0	-1	0	0	0
x_2	12	$-3/7$	$-1/7$	-1	$-3/7$
x_3	0	0	0	-1	0
x_4	6	$-11/7$	$1/7$	-2	$-4/7$
x_5	0	0	0	0	-1
x_6	0	0	-1	0	0
x_7	12	-5	0	-10	-2

Текущее решение $x^2 = (0, 12, 0, 6, 0, 0, 12)$, $f(x^2) = -126$. Поскольку это решение является допустимым, то оно также является и оптимальным. Для исходной задачи ЛП оптимальное решение имеет вид $x^* = (0, 12, 0, 6)$, $f^* = -126$.

Чтобы избежать зацикливания ДСМ в случае вырожденности задачи ЛП, используют лексикографический двойственный симплекс-метод, который получается аналогично ЛСМ [4].

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача является важным частным случаем общей задачи линейного программирования и, следовательно, может быть решена симплекс-методом. Однако специфические особенности задачи позволили разработать для нее более эффективный метод решения, а именно метод потенциалов.

3.1. Постановка задачи

Классическая транспортная задача (ТЗ) может быть сформулирована следующим образом. Имеется m пунктов производства (хранения) и n пунктов потребления однородного продукта. Известны объемы производства (запасы) a_i поставщика A_i, $i = 1, ..., m$, потребности (спрос) b_j потребителя B_j, $j = 1, ..., n$, а также стоимость перевозки (транспортные затраты) единицы объема продукции для каждой пары поставщик-потребитель c_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Требуется составить такой план перевозок, при котором потребности всех потребителей будут удовлетворены за счет имеющихся запасов продукта в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продукта будут минимальными.

Исходные данные в транспортной задаче обычно представляются в виде таблицы:

	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	...	b_j	...	b_n	

Составим математическую модель ТЗ. Для этого введем переменные x_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, которые обозначают количество продукта, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Матрица

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *планом перевозок*. Общая стоимость перевозок f при плане x будет равна

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

При этом на план перевозок накладываются следующие ограничения. Для каждого поставщика суммарный объем вывезенного продукта не должен превышать объема производства (запаса) этого продукта, а потребность в продукте каждого потребителя должна быть полностью удовлетворена за счет перевозок от всех поставщиков. Первому требованию соответствуют неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1, ..., m,$$

а второму – неравенства вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j,\ j = 1, .., n.$$

Кроме того, по смыслу задачи все переменные x_{ij} должны быть неотрицательны.

Таким образом, получаем следующую математическую модель ТЗ:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j,\ j = 1, ..., n,$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n.$$

Транспортная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено следующее соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{3.1}$$

Условие (3.1) означает следующее очевидное требование: допустимый план перевозок существует в том и только в том случае, когда суммарные потребности $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ не превышают суммарных запасов $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ продукции. Если условие (3.1) выполняется как равенство, то ТЗ называется *сбалансированной* транспортной задачей, в противном случае – *несбалансированной* транспортной задачей.

Без ограничения общности далее мы будем рассматривать сбалансированную ТЗ. Несбалансированная ТЗ всегда может быть сведена к сбалансированной введением фиктивного $(n+1)$-го потребителя, потребность которого в продукции равна $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ и стоимости перевозок $c_{i(n+1)}$, $i = 1, ..., m$ равны нулю.

3.2. Построение начального плана перевозок

Решение транспортной задачи разбивается на три этапа. На первом этапе ищется какой-либо начальный допустимый план перевозок. На втором этапе найденный план проверяется на оптимальность, и если он окажется оптимальным, то задача решена. В противном случае происходит переход к следующему этапу, на котором определяется новый допустимый план перевозок, не увеличивающий общие затраты, и возврат ко второму этапу. Процесс продолжается до тех пор, пока план перевозок не станет оптимальным.

Для транспортной задачи существуют несколько методов нахождения начального плана перевозок, два из которых мы рассмотрим. Это метод северо-западного угла и метод минимальной стоимости.

Метод северо-западного угла

Рассмотрим северо-западный угол транспортной таблицы (плана перевозок), т.е. клетку, соответствующую перевозке продукта от первого поставщика к первому потребителю.

Возможны три случая:

1) Если $a_1 < b_1$, то положим $x_{11} = a_1$. Следовательно, первый поставщик перевез весь продукт первому потребителю, и его запас равен нулю, поэтому $x_{12} = x_{13} = ... = x_{1m} = 0$. Неудовлетворенный спрос первого потребителя равен $b_1' = b_1 - a_1$.

2) Если $a_1 > b_1$, то положим $x_{11} = b_1$. Таким образом, спрос первого потребителя полностью удовлетворен, $x_{21} = x_{31} = ... = x_{m1} = 0$, а остаток продукта в первом пункте производства равен $a_1' = a_1 - b_1$.

3) В случае $a_1 = b_1$ из рассмотрения можно исключить и поставщика, и потребителя. Однако для дальнейшего решения задачи методом потенциалов необходимо исключить только поставщика либо только потребителя. Например, если исключается поставщик, то спрос потребителя считается неудовлетворенным и равным нулю.

Далее рассматриваем северо-западный угол оставшейся незаполненной части таблицы и повторяем те же действия. В результате через $(m + n - 1)$ шагов получим начальный план перевозок.

Пример 3.1 Найти начальный план транспортной задачи.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	7	1	4	50
A_2	11	3	7	9	60
A_3	2	4	8	3	10
	20	40	30	30	

В следующей таблице, обведенной снизу и справа двойной чертой, указаны объемы перевозок, полученные методом северо-западного угла. При этом нулевые перевозки не проставлены. Заполненные таким образом клетки таблицы называются *базисными*, а остальные – *небазисными*. Полученный план также называется базисным. Справа и внизу таблицы содержатся объемы оставшихся запасов и потребностей после очередного шага.

<table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td colspan="4">a_i'</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>20</td><td>30</td><td></td><td></td><td>50</td><td>30</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td></td><td>10</td><td>30</td><td>20</td><td>60</td><td>50</td><td>20</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td></td><td></td><td></td><td>10</td><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">b_j'</td><td>20</td><td>40</td><td>30</td><td>30</td></tr>
<tr><td>0</td><td>10</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Суммарная стоимость перевозок по данному плану равна
$f(x) = 20 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 10 \cdot 3 + 30 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 3 = 760.$

Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости отличается от метода северо--западного угла только тем, что вместо северо-западного угла незаполненной таблицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки. Метод минимальной стоимости не гарантирует лучшего начального плана перевозок по сравнению с методом северо-западного угла. Тем не менее предпочтительнее использовать именно метод минимальной стоимости, так как во многих случаях за счет учета стоимостей перевозок получается начальный план с меньшими суммарными затратами.

Пример 3.2. Начальный план x^1, построенный по методу минимальной стоимости для задачи из примера 3.1:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i'			
A_1			30	20	50	20	0	0
A_2	10	40		10	60	20	10	0
A_3	10				10	0	0	0
b_j'	20	40	30	30				
	10	0	0	10				
	0	0	0	0				

Стоимость перевозок по данному плану равна
$f(x^1) = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 11 + 40 \cdot 3 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 2 = 450.$

3.3. Метод потенциалов

Так как транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то к ней можно применить результаты теории двойственности. Метод потенциалов решения транспортной задачи основан на втором критерии оптимальности. В соответствии с данным методом по текущему плану перевозок строится допустимое решение двойственной задачи, которое вместе с планом перевозок удовлетворяет УДН. Если это возможно, то текущий план перевозок является оптимальным. В противном случае строится новый план перевозок, который не увеличивает суммарные затраты.

Введем переменные двойственной задачи $u_i, i = 1, ..., m$ и v_j, $j = 1, ..., n$, которые соответствуют поставщикам и потребителям. Они называются потенциалами или платежами. Опишем метод потенциалов по шагам.

Метод потенциалов

Шаг 1. *Нахождение потенциалов*

Для текущего плана перевозок найти значения переменных u_i, $i = 1, ..., m$ и $v_j, j = 1, ..., n$ из системы уравнений

$$v_j - u_i = c_{ij}, \ (i, j) \in B, \tag{3.2}$$

где B – базисные клетки таблицы (плана). Таким образом, получается система из $(n + m - 1)$ уравнений с $(n + m)$ неизвестными. Перейти на шаг 2.

Шаг 2. *Проверка на оптимальность*

Пусть

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}, \quad i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n.$$

Если выполняется $\Delta_{ij} \leq 0$ для всех перевозок, то текущий план перевозок оптимален. Иначе перейти на шаг 3.

Величины $v_j - u_i$ можно интерпретировать как "псевдостоимости" перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю. Таким образом, если для какой-либо перевозки "псевдостоимость" больше реальной стоимости, то процесс улучшения плана продолжается.

Заметим, что величины Δ_{ij} достаточно вычислять для небазисных (незаполненных) клеток. Для всех базисных клеток $\Delta_{ij} = 0$.

Шаг 3. *Построение нового плана перевозок*

Для построения нового плана перевозок найти клетку транспортной таблицы, в которой $\Delta_{ij} > 0$. Построить цикл, одна вершина которого находится в найденной клетке, а остальные – в базисных клетках. *Циклом* в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке цикла совершает поворот на $90°$. Клетку с $\Delta_{ij} > 0$ отметить знаком $(+)$. Соседние с ней клетки – знаком (–). Далее знаки в вершинах цикла чередуются. В вершинах, помеченных знаком (–), выбрать минимальный объем перевозок и перераспределить его по циклу. Перейти на шаг 1.

Выполним, например, одну итерацию метода потенциалов для рассмотренной выше транспортной задачи (примеры 3.1 и 3.2). В качестве начального плана возьмем план перевозок x^1, полученный методом минимальной стоимости.

Шаг 1. Найдем потенциалы из системы уравнений:

$$\begin{aligned} v_3 - u_1 &= \ 1, \\ v_4 - u_1 &= \ 4, \\ v_1 - u_2 &= 11, \\ v_2 - u_2 &= \ 3, \\ v_4 - u_2 &= \ 9, \\ v_1 - u_3 &= \ 2. \end{aligned}$$

Решая данную систему, находим одно из решений:

$$u_1 = 5;\ u_2 = 0;\ u_3 = 9;\ v_1 = 11;\ v_2 = 3;\ v_3 = 6;\ v_4 = 9.$$

Переходим на шаг 2.

Шаг 2. Проверка на оптимальность

Вычислим величины Δ_{ij}:

$\Delta_{11} = v_1 - u_1 - c_{11} = 11 - 5 - 5 = \quad 1 > 0,$

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = \ 3 - 5 - 7 = \ -9 < 0,$

$\Delta_{11} = v_3 - u_2 - c_{23} = \ 6 - 0 - 7 = \ -1 < 0,$

$\Delta_{11} = v_2 - u_3 - c_{32} = \ 3 - 9 - 4 = -10 < 0,$

$\Delta_{11} = v_3 - u_3 - c_{33} = \ 6 - 9 - 8 = -11 < 0,$

$\Delta_{11} = v_4 - u_3 - c_{34} = \ 9 - 9 - 3 = \ -3 < 0.$

Так как не все $\Delta_{ij} \leq 0$, то переходим на следующий шаг.

Шаг 3. Построение нового плана перевозок

Для построения нового плана перевозок находим клетку транспортной таблицы, в которой $\Delta_{ij} > 0$. В данном случае это единственная клетка $(1, 1)$. Строим цикл, одна вершина которого находится в найденной клетке, а остальные – в базисных клетках:

$(1, 1) - (1, 4) - (2, 4) - (2, 1) - (1, 1).$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$^+$		30	20^-
A_2	10^-	40		10^+
A_3	10			

При этом клетки $(1,1)$ и $(2,4)$ помечены знаком $(+)$, а клетки $(1,4)$ и $(2,1)$ – знаком $(-)$. По полученному циклу перераспределяется $x' = \min\{20, 10\} = 10$ единиц товара.

В результате получаем следующий план перевозок x^2:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10		30	10
A_2		40		20
A_3	10			

Стоимость перевозок по данному плану равна

$f(x^2) = 10 \cdot 5 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 2 = 440.$

Далее выполняются следующие итерации метода потенциалов до тех пор, пока текущий план перевозок не станет оптимальным.

В заключение данной главы рассмотрим вопрос о конечности метода потенциалов. Для этого дадим следующее определение невырожденности транспортной задачи, аналогичное невырожденности общей задачи линейного программирования. Базисный план перевозок называется *невырожденным*, если все его базисные перевозки отличны от нуля. Транспортная задача называется *невырожденной*, если все ее базисные планы не вырождены.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если транспортная задача является сбалансированной и невырожденной, то метод потенциалов за конечное число шагов находит ее оптимальное решение.*

Если же транспортная задача является вырожденной, то метод потенциалов в общем случае может зацикливаться, т.е. возвращаться к уже просмотренным планам перевозок, и работать бесконечно. Чтобы решить эту проблему, используют различные модификации метода потенциалов (см., например, [7]).

4. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К задачам целочисленного линейного программирования (ЦЛП) сводятся многие практические задачи, возникающие в экономике, планировании, управлении и других областях. Условие целочисленности позволяет учесть неделимость объектов, дискретность процессов, наличие альтернатив и другие факторы.

4.1. Постановка задачи целочисленного линейного программирования

Задача целочисленного линейного программирования может быть сформулирована как задача ЛП с дополнительным требованием целочисленности значений переменных. Рассмотрим следующую постановку задачи ЦЛП:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, ..., m, \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, ..., n, \tag{4.3}$$

$$x_j \in Z,\ j = 1, ..., n, \tag{4.4}$$

где Z обозначает множество всех целых чисел.

Задача (4.1) – (4.3) называется *линейной релаксацией* задачи ЦЛП, а множество, определяемое ограничениями (4.2) – (4.3), – *релаксационным* множеством. Далее релаксационное множество будем обозначать через D, а множество допустимых решений задачи ЦЛП – через D_0. Очевидно, что $D_0 \subseteq D$. Оптимальное решение задачи ЦЛП обозначим z^*, а оптимальное решение соответствующей ей задачи ЛП, как и ранее, x^*.

Для задачи ЦЛП (4.1) – (4.3) может быть использована та же содержательная интерпретация, что и для задачи ЛП (1.1) – (1.3), если в качестве продукции рассматриваются неделимые объекты (самолеты, телевизоры, компьютеры и т.д.).

Частным случаем задачи ЦЛП является *задача булева линейного программирования*, которая отличается от задачи (4.1) – (4.4) последним условием. Вместо требования (4.4) в задачах булева линейного программирования на переменные накладываются ограничения $x_j \in \{0,1\}$, $j = 1,...,n$. Такие переменные называются *булевыми.* Использование булевых переменных необходимо в тех случаях, когда в решении имеется выбор одной из двух возможных альтернатив: выполнять или не выполнять проект, открывать или не открывать предприятие и т.д.

В качестве содержательного примера задачи булева программирования рассмотрим *задачу о рюкзаке*, которая имеет множество практических приложений.

<u>Задача о рюкзаке</u>

Имеется n предметов, каждый из которых характеризуется объемом a_j и полезностью c_j, $j = 1,...,n$. Кроме того, имеется рюкзак объема b, при этом известно, что все предметы в рюкзак не помещаются. Требуется выбрать предметы таким образом, чтобы их суммарный объем не превосходил объем рюкзака, а суммарная полезность была бы максимальной.

Составим математическую модель задачи. Определим переменные следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й предмет помещается в рюкзак,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$j = 1,...,n$. Тогда суммарная полезность предметов равна $c_1x_1+...+c_nx_n$, а ограничение по объему имеет вид: $a_1x_1+...+a_nx_n \le b$. Таким образом, получаем задачу булева линейного программирования:

$$\begin{gathered} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b. \\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1,...,n. \end{gathered}$$

Данная модель имеет много других интерпретаций. Например, вместо предметов можно рассматривать n проектов, каждый из которых требует затрат на реализацию в размере a_j и дает прибыль c_j, $j = 1,...,n$. Начальный капитал для реализации проектов равен b. Требуется выбрать такие проекты, которые дадут максимальную прибыль. Очевидно, что данная задача сводится к той же математической модели, что и задача о рюкзаке.

4.2. Методы решения задач целочисленного линейного программирования

Симплекс-метод, использующийся для решения задачи ЛП, не гарантирует целочисленности решения, поэтому для отыскания оптимального решения задачи ЦЛП требуются специальные методы. Наиболее естественным методом решения задачи ЦЛП кажется **метод округления**, который заключается в следующем. Сначала находится оптимальное решение x^* линейной релаксации. Далее значения переменных, не являющиеся целыми в x^*, округляют так, чтобы получить решение z' с целочисленными значениями. Данный метод в ряде случаев является вполне пригодным, если достаточно получить только приближенное решение и погрешность округления невелика по сравнению со значениями округляемых переменных. Однако во многих ситуациях метод округления оказывается неприемлемым, так как получаемое им решение z' может либо значительно отличаться от оптимального z^* (по значению целевой функции), либо не принадлежать допустимому множеству D_0.

К общим методам решения задачи ЦЛП относятся **метод ветвей и границ** (см., например, [5]), **метод отсечения** [3,6,9], **динамическое программирование** [1,7], **метод перебора L-классов** [3] и ряд других. Для специальных классов задач ЦЛП разрабатываются алгоритмы, учитывающие особенности таких задач.

Здесь мы рассмотрим исторически первый метод решения задач ЦЛП – метод отсечения. Основная идея этого метода заключается в следующем. С помощью симплекс-метода решается задача ЦЛП (4.1) – (4.3). Если оптимальное решение x^* получается нецелочисленным, то вводится дополнительное линейное ограничение (отсечение), которое исключает полученный оптимум x^* и уменьшает релаксационное множество (отсекает некоторую его часть), при этом все допустимые целочисленные точки сохраняются. Если оптимальное решение задачи ЛП с дополнительным ограничением целочисленное, то процесс заканчивается; в противном случае добавляется новое отсечение. Процесс присоединения отсечений повторяется до тех пор, пока либо не будет найдено целочисленное оптимальное решение, либо будет показано, что задача ЦЛП не имеет решений.

Графически метод отсечения может быть проиллюстрирован следующим образом (рис. 4.1).

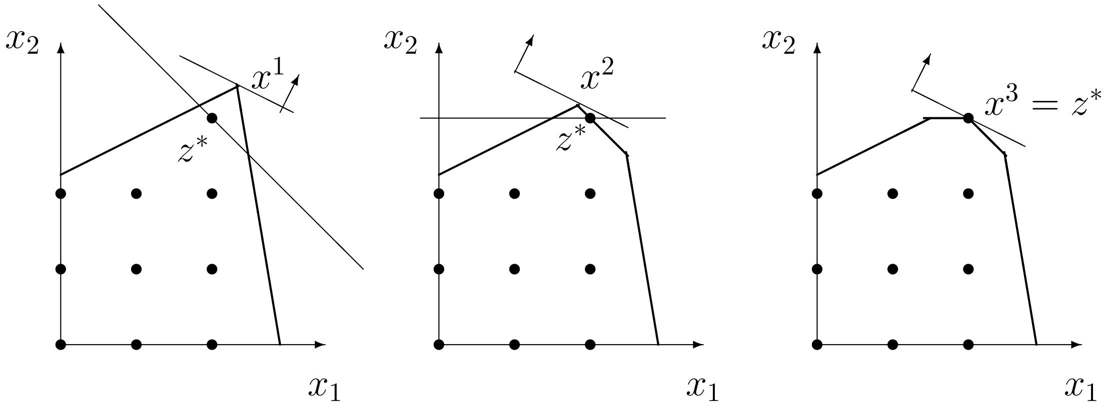


Рис. 4.1

Дадим теперь формальное описание метода отсечения. Линейное неравенство $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + ... + \gamma_n x_n \leq \gamma_0$ (или кратко $(\gamma, x) \leq \gamma_0$) называется *правильным отсечением*, если выполняются условия:

1)$(\gamma, x^*) > \gamma_0$;

2)$(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для любого $z \in D_0$.

Далее будем предполагать, что целевая функция задачи ЦЛП ограничена сверху на релаксационном множестве D, если оно не пусто, т.е. в случае непустоты множества D задача ЛП (4.1) – (4.3) разрешима.

Процесс отсечения

Шаг 0. Полагаем $D^{(1)} = D, t = 1$.

Итерация t $(t \geq 1)$

Шаг 1. Находим $x^{(t)}$ – оптимальное решение задачи:

$$f(x) \to max, x \in D^{(t)}.$$

Если $x_j^{(t)} \in Z, j = 1, ..., n$, либо $D^{(t)}$ – пусто, процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (4.1) – (4.4), во втором случае – решения нет.

Шаг 2. Строим правильное отсечение $(\gamma, x) \leq \gamma_0$.

Присоединяем его к ограничениям текущей задачи ЦЛП и полагаем $D^{(t+1)} = D^{(t)} \cap \{x : (\gamma, x) \leq \gamma_0\}$.

Переходим к следующей итерации на шаг 1, увеличив t на 1.

Конкретные алгоритмы отсечения отличаются друг от друга правилами построения отсечений. По характеру приближения к оптимальному решению алгоритмы отсечения можно разбить на две основные группы: прямые и двойственные (разумеется, возможны и промежуточные варианты). В прямых алгоритмах порождается последовательность допустимых решений задачи ЦЛП. К ним относятся алгоритмы Юнга, Гловера и другие [5]. В двойственных алгоритмах движение к оптимальному решению осуществляется по недопустимым точкам. Различают дробные и полностью целочисленные процессы такого типа. Дробный алгоритм строит приближения, лежащие в D, но не являющиеся целочисленными. Напротив, полностью целочисленный алгоритм отсечения дает целочисленные приближения, не принадлежащие D.

4.3. Отсечения Гомори

Наиболее известными и широко используемыми являются отсечения, предложенные американским математиком Р. Гомори. Один из способов построения этих отсечений заключается в следующем.

Предположим, что в задаче (4.1) – (4.4) все исходные данные целочисленные. Пусть x^* – нецелочисленное решение задачи ЛП (4.1) - (4.3). Предположим, что $x_i^* \notin Z$. В завершающей симплексной таблице i-я строка соответствует уравнению

$$x_i + \sum_{j \in J} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0},$$

где J – множество индексов небазисных переменных.
Тогда отсечение Гомори имеет вид

$$- \sum_{j \in J} \{\alpha_{ij}\} x_j \leq \ -\{\alpha_{i0}\}, \qquad (4.5)$$

где $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α.

Отсечение Гомори является правильным отсечением, так как исключает оптимальное решение задачи ЛП и сохраняет все допустимые целочисленные точки.

Замечания:

1. При некоторых дополнительных условиях можно доказать, что алгоритм отсечения Гомори за конечное число шагов либо находит оптимальное решение задачи ЦЛП, либо устанавливает, что задача неразрешима.

2. Указанные отсечения Гомори применяются только для задач ЦЛП с целочисленными исходными данными, в противном случае алгоритм может не найти оптимального решения z^*.

3. При добавлении отсечения Гомори симплексная таблица теряет прямую допустимость, однако остается двойственно допустимой. Следовательно, для решения задач ЛП удобнее использовать двойственный симплекс-метод.

Рассмотрим использование алгоритма отсечения Гомори на примере.

Пример 4.1. Решить задачу ЦЛП:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \ x_1 + \ x_2 \to min \\
& \ x_1 + 2x_2 \geq \ 4, \\
& 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\
& 4x_1 + \ \ x_2 \geq \ 8, \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Решаем задачу без условия целочисленности двойственным симплекс-методом. Оптимальная таблица имеет вид:

		x_5	x_3
f	$-20/7$	$1/7$	$3/7$
x_1	$12/7$	$-2/7$	$1/7$
x_2	$8/7$	$1/7$	$-4/7$
x_3	0	0	-1
x_4	$52/7$	$3/7$	$16/7$
x_5	0	-1	0

Оптимальное решение задачи ЛП $x_1^* = 12/7$, $x_2^* = 8/7$ не является целочисленным. Выберем переменную с дробным значением, например, x_1. Ей соответствует уравнение:

$$-\frac{2}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_3 + x_1 = \frac{12}{7}.$$

Тогда отсечение Гомори выглядит следующим образом:

$$-\frac{5}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_3 \leq -\frac{5}{7}.$$

Вводим дополнительную переменную x_6 и присоединяем полученное отсечение снизу к симплексной таблице. Получаем следующую таблицу:

		x_5	x_3
f	$-20/7$	$1/7$	$3/7$
x_1	$12/7$	$-2/7$	$1/7$
x_2	$8/7$	$1/7$	$-4/7$
x_3	0	0	-1
x_4	$52/7$	$3/7$	$16/7$
x_5	0	-1	0
x_6	$-5/7$	$-5/7$	$-1/7$

Заметим, что после добавления отсечения таблица теряет свойство прямой допустимости. Решая новую задачу ЛП двойственным симплекс-методом, получим последнюю симплексную таблицу:

B	x_0	x_6	x_3
f	-3	$1/5$	$2/5$
x_1	2	$-2/5$	$1/5$
x_2	1	$1/5$	$-3/5$
x_3	0	0	-1
x_4	7	$3/5$	$11/5$
x_5	1	$-7/5$	$1/5$
x_6	0	-1	0

Оптимальное решение задачи ЛП $x^* = (2, 1)$ является целочисленным. Следовательно, оно также является и оптимальным решением задачи ЦЛП. Значение целевой функции на этом решении равно $f^* = -3$.

Процесс решения задачи изображен на рис. 4.2.

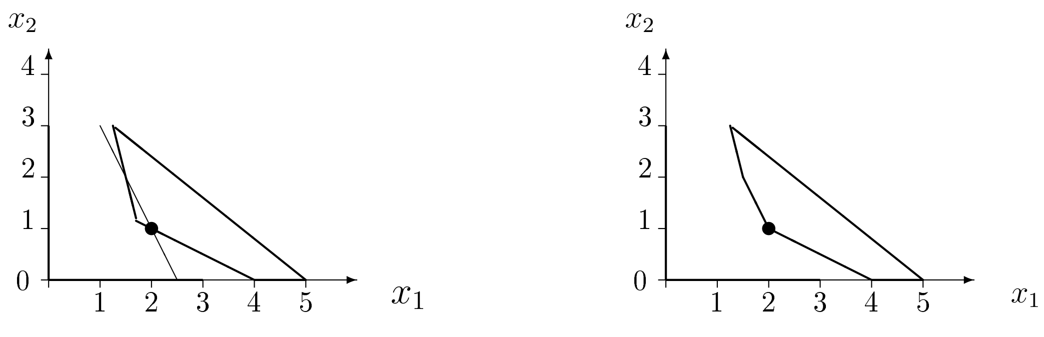


Рис. 4.2

5. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Реализация многих проектов в различных сферах связано с осуществлением ряда работ (операций, действий), одни из которых могут выполняться одновременно, а другие только в определенной последовательности. Методы сетевого планирования позволяют анализировать и находить оптимальный график выполнения сложных проектов, а также наглядно представлять ход выполнения проектов и взаимосвязь отдельных этапов.

5.1. Основные определения

Всякий намеченный комплекс действий, необходимый для достижения некоторой цели, будем называть *проектом.* Каждый этап выполнения проекта расчленяется на некоторые подэтапы. Часть планируемого процесса, связанного с затратами труда, средств, ресурсов, времени, называется *работой.* Работы бывают двух видов:

действительные, т.е. связанные с затратами труда, времени, ресурсов;

фиктивные, т.е. не связанные с затратами и вводящиеся для удобства. Факт выполнения одной или нескольких работ и начала следующих за ними работ называется *событием.* Для совершения события не требуется никаких затрат, а само событие не имеет продолжительности.

Графическое представление последовательности выполнения работ с указанием их длительности, показывающее взаимосвязь отдельных этапов, называется *сетевым графиком.*

Приведем простейший пример сетевого графика.

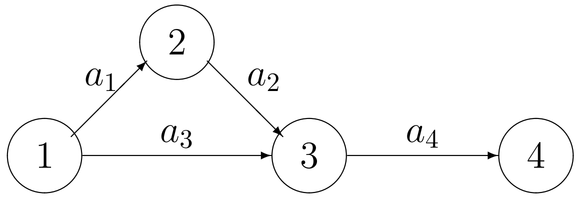


Рис. 5.1

Здесь цифрами 1,2,3,4 обозначены события (вершины графа), а

a_1, a_2, a_3, a_4 – работы (дуги графа). Из графика следует, например, что событие 3 заключается в выполнении работ a_2, a_3 и только после этого может выполняться работа a_4.

Любая стрелка на сетевом графике соединяет две вершины и отражает процесс перехода от одного состояния к другому. Поэтому работа может быть отражена парой чисел, соответствующих номерам предшествующего и последующего событий. Длительность работы (i, j) будем обозначать через t_{ij} (рис 5.2).

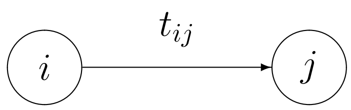


Рис. 5.2

Если наступлению данного события не предшествует какая-либо работа, то это событие называется *исходным* (на рис. 5.1 событие 1). Событие, не имеющее последующих работ, называется *завершающим*, т.е. с наступлением такого события завершается весь проект.

При разработке сетевого графика придерживаются следующих правил.

1. В каждую вершину, кроме исходной, должна входить хотя бы одна дуга; из каждой вершины, кроме завершающей, должна выходить хотя бы одна дуга.

2. Сетевой график не должен содержать циклов.

3. Если две работы определяются одними и теми же событиями, то необходимо ввести дополнительное событие и фиктивную работу (см. рис. 5.3):

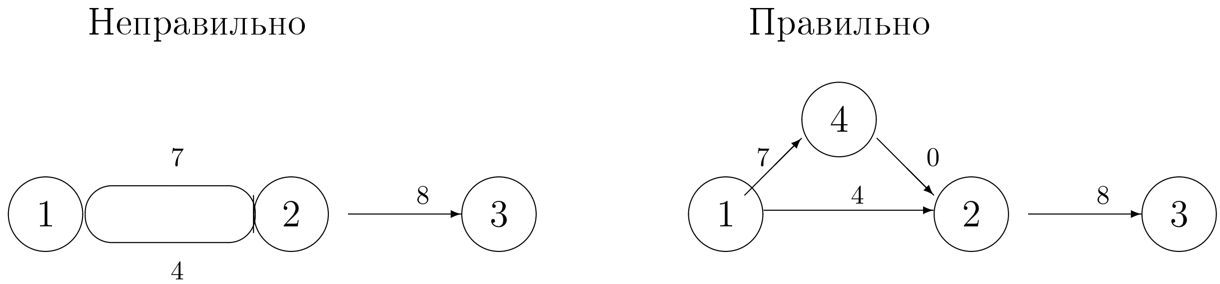


Рис. 5.3

4. Если какие-либо работы могут начаться до полного завершения предыдущей работы, то последнюю нужно разбить на части и считать каждую часть самостоятельной работой (см. рис. 5.4):

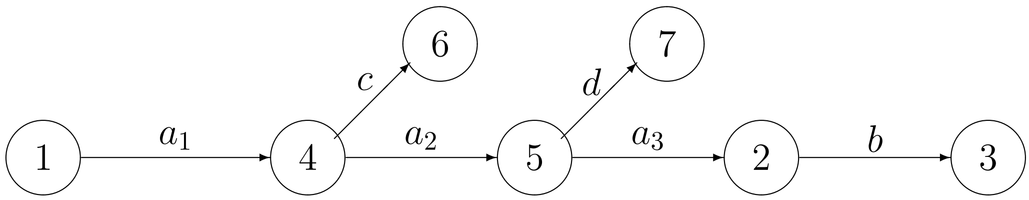


Рис. 5.4

На рисунке изображена часть сетевого графика, где работа a разбита на три работы a_1, a_2 и a_3.

5.2. Пути в сетевых графиках

Любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие каждой работы последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путем.* Путь в сетевом графике от исходного события до завершающего называется *полным.* *Продолжительностью* пути называется время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на этом пути. Например, путь $(1,3)-(3,5)-(5,6)$ на рис 5.5 является полным. Его продолжительность равна 21.

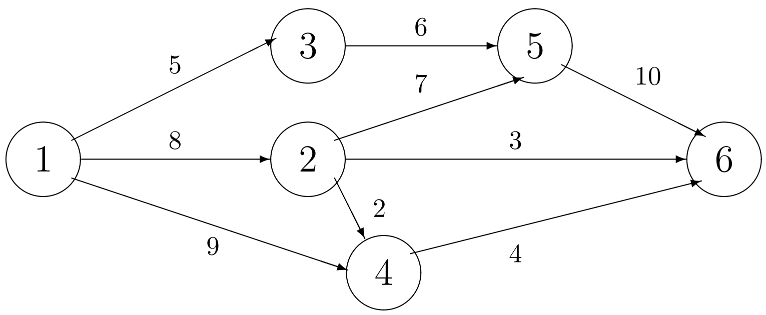


Рис. 5.5

Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим*, а работы, лежащие на этом пути, – *критическими*.

Задача сетевого планирования состоит в составлении графика выполнения работ – определении сроков начала и окончания каждой работы, при которых весь комплекс работ выполняется за минимально возможное время. Для определения этого времени достаточно найти критический путь и вычислить его продолжительность. От длительности критических работ зависит общее время выполнения проекта. Изменение сроков их выполнения изменяет общую продолжительность выполнения проекта. Существуют различные алгоритмы нахождения критического пути. Один из них мы рассмотрим в следующем параграфе.

5.3. Расчет временных параметров сетевого графика

Основными временными параметрами сетей являются ранние и поздние сроки наступления событий. Зная их, можно вычислить остальные параметры сетевого графика: сроки начала и окончания работ и резервы времени событий и работ.

Ранним сроком $t_r(j)$ наступления события j называется наименьшее возможное время завершения всех работ, непосредственно предшествующих данному событию. Он вычисляется по формуле

$$t_r(j) = \max_i \{t_r(i) + t_{ij}\}.$$

Очевидно, что ранний срок наступления исходного события равен нулю, а ранний срок завершающего события совпадает с продолжительностью критического пути. Вычисление ранних сроков наступления событий начинается с исходного события.

Поздним сроком $t_p(j)$ наступления события j называется максимальное допустимое время наступления события, которое не требует увеличения времени на выполнение всего проекта. Поздний срок вычисляется следующим образом:

$$t_p(j) = \min_i \{t_p(i) - t_{ji}\}.$$

Легко увидеть, что ранние и поздние сроки наступления исходного и завершающего событий совпадают. Это также верно для критических работ. Вычисление поздних сроков наступления событий начинается с завершающего события.

Резервом времени $R(j)$ события j называется разность между поздним и ранним сроками наступления этого события, т.е.

$$R(j) = t_p(j) - t_r(j).$$

Также можно определить резерв времени для работ. Выделяют четыре резерва времени работы (i, j).

1. Полный резерв: $R_p(i, j) = t_p(j) - t_r(i) - t_{ij}$.
2. Свободный резерв: $R_s(i, j) = t_r(j) - t_r(i) - t_{ij}$.
3. Независимый резерв: $R_n(i, j) = t_r(j) - t_p(i) - t_{ij}$.
4. Гарантийный резерв: $R_g(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij}$.

Полный резерв времени определяет время, на которое можно перенести начало работы или увеличить ее продолжительность без изменения общего времени выполнения проекта. Полный резерв времени является зависимым резервом, т.е. его изменение у одной работы может привести к изменению резервов по другим работам. Поэтому полный резерв может быть использован только с разрешения руководителя проекта.

Свободный резерв времени определяет время, на которое можно перенести начало работы или увеличить ее продолжительность без изменения раннего срока последующих событий. Этот резерв может быть использован непосредственно исполнителем той или иной работы и не повлечет за собой изменения времени выполнения последующих работ.

Независимый резерв времени означает запас времени, который имеет исполнитель работы, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ним работ.

Гарантийный резерв времени означает для исполнителя резерв времени, который он имеет, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него поздние сроки, но и он сдает свою работу в поздний срок.

Ниже (рис. 5.6) приведены основные временные параметры сетевого графика, изображенного на рис. 5.5.

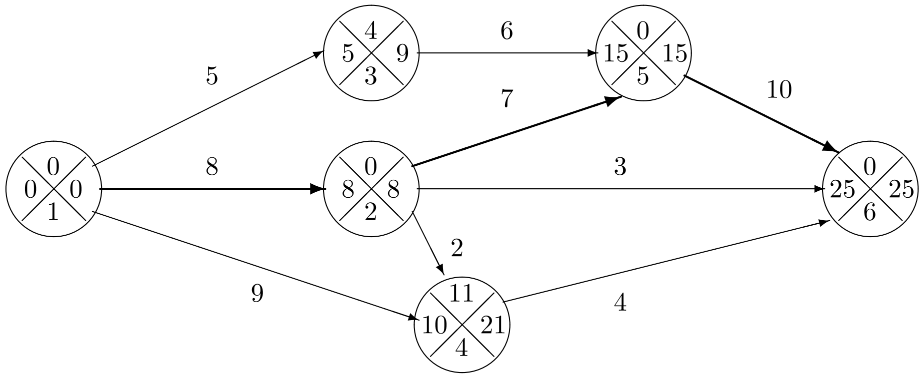


Рис. 5.6

На рис. 5.6 для каждого события (вершины) указаны номер (снизу), ранний срок (слева), поздний срок (справа) и резерв (сверху).

Таким образом, критический путь включает работы (1,2), (2,5) и (5,6). Эти работы, а также события 1, 2, 5 и 6 имеют нулевой резерв времени. Продолжительность критического пути, а следовательно, и время выполнения проекта равны 25.

При анализе графика следует прежде всего выделять критические работы, от которых зависит время выполнения проекта. Перебрасывая ресурсы (людей, технику, финансы) с ненапряженных работ на критические, можно уменьшить сроки выполнения проекта.

Необходимо также обращать внимание на наличие резервов времени по отдельным работам. Например, свободный резерв для работы (3,5) (рис. 5.6) равен 4. Это означает, что при необходимости можно либо увеличить продолжительность выполнения данной работы в пределах 4 временных единиц, либо начать эту работу позже.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

В предыдущих главах мы рассматривали задачи оптимизации, в которых выбор оптимального решения осуществлялся одним лицом и зависел от известных объективных ограничений. Однако достаточно часто решения приходится принимать в условиях неопределенности. Одним из видов неопределенности является конфликтная ситуация (экономическая конкуренция, военные действия), когда сталкиваются интересы нескольких сторон. При этом каждая сторона преследует свою собственную цель, причем результат конфликта для сторон зависит от действий всех остальных участников конфликта. В данной главе мы рассмотрим задачи принятия решения в конфликтных ситуациях.

6.1. Основные понятия

Теория игр – это особый раздел исследования операций, изучающий математические модели ситуаций, в которых принятие решения зависит от нескольких сторон. Важную роль в этих ситуациях играют конфликты и совместные действия. Под *конфликтом* будем понимать любое явление, для которого можно определить, кто и как в этом явлении участвует, каковы возможные исходы этого явления, кто в этих исходах заинтересован и в чем состоит эта заинтересованность. Такое определение конфликта является достаточно универсальным и охватывает не только конфликты между участниками так называемых "салонных" игр (шахматы, шашки, карточные игры и т.д.), но и экономические столкновения интересов различных фирм в условиях конкуренции, военные действия и ряд других ситуаций.

В теории игр конфликт называют *игрой*, а участников конфликта – *игроками*. Решения, которые могут принимать игроки, называются *стратегиями*. Каждый игрок располагает конечным или бесконечным числом стратегий. *Ситуацией* называется комбинация выбранных игроками стратегий. Выигрыш каждого игрока определяется его *платежной функцией*, значения которой зависят от сложившейся ситуации в игре.

Задача теории игр состоит в установлении принципов оптимального поведения игроков, в доказательстве существования оптимальных ситуаций, которые складываются в результате применения этих принципов, и разработке методов нахождения таких ситуаций.

Игры можно классифицировать по различным критериям. Например, по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам платежной функции, по характеру предварительной договоренности между игроками и др. По числу игроков выделяют *парные игры* и *игры n лиц* при $n > 2$. В играх n лиц могут создаваться *коалиции*, т.е. группы из двух или более игроков, имеющих общую цель и координирующих свои стратегии. Игра называется *коалиционной*, если до ее начала игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о координации своих стратегий.

По количеству стратегий выделяют конечные и бесконечные игры. Если каждый из игроков располагает конечным множеством стратегий, то игра называется *конечной*. Если же хотя бы один игрок имеет бесконечное множество стратегий, то игра называется *бесконечной*.

Еще один критерий классификации игр – по свойствам платежной функции. Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если общая сумма выигрышей всех игроков равна нулю. В парной игре с нулевой суммой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, поэтому такие игры называются *антагонистическими*.

6.2. Матричные игры

Конечные антагонистические игры называются *матричными*. Данное название связано с формой записи таких игр. Так как число стратегий каждого игрока в матричной игре конечно, то их можно пронумеровать. Пусть число стратегий игрока I равно m, а число стратегий игрока II – n. Далее будем называть их *чистыми стратегиями*.

Платежные функции (функции выигрыша) игроков в матричной игре могут быть заданы в виде *платежной матрицы* $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, где a_{ij} – выигрыш игрока I (и, соответственно, проигрыш игрока II) в ситуации (i, j), т.е. когда первый игрок выберет стратегию i, а второй игрок – стратегию j.

Пример 6.1. Игра в орлянку.

Игрок I кладет монету, игрок II, не видя, пытается угадать, какой стороной положил монету игрок I – "орлом" (О) или "решкой" (Р).

Угадал – выиграл 1 очко (а игрок I проиграл 1 очко), не угадал – проиграл 1 очко (а игрок I выиграл 1 очко).

В этой игре у каждого из игроков имеется по две чистых стратегии. У игрока I – положить монету "орлом" или "решкой". А у игрока II – назвать "орел" или "решка". Платежная матрица игры имеет вид:

	о	р
о	-1	1
р	1	-1

Такую таблицу также называют *нормальной формой игры*.

Рассмотрим, как следует действовать игрокам в матричной игре, чтобы добиться поставленных целей – увеличить свой выигрыш или уменьшить проигрыш. Будем считать, что игроки ведут себя разумно, а элементы азарта и риска исключены. Кроме того, предположим, что оба игрока хорошо знакомы с правилами игры, т.е. им известны свои и чужие стратегии, а также величины платежей a_{ij} в любой ситуации.

В задачах принятия решений критерий оптимальности в значительной степени определяется информацией, которой располагает "лицо, принимающее решение". Матричные игры представляют собой случай полного отсутствия информации о действиях другого игрока, поэтому в таких играх, как правило, используют наиболее пессимистичный *минимаксный* критерий или, другими словами, принцип гарантированного результата. Рассмотрим, в чем заключается этот принцип.

Итак, пусть игроки I и II участвуют в матричной игре с платежной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$. Выигрыш игрока I или, что то же самое, проигрыш игрока II в ситуации (i, j) равен a_{ij}. Очевидно, что игрок I будет стараться увеличить свой выигрыш, в то время как второй игрок будет пытаться его уменьшить.

Если игрок I выбрал стратегию i, то второй, будучи разумным игроком, должен ответить такой стратегией j, чтобы выигрыш a_{ij} был минимальным среди чисел $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Обозначим этот выигрыш u_i, т.е.

$$u_i = \min_j a_{ij}.$$

Величина u_i есть наименьший, т.е. гарантированный выигрыш игрока I при выборе им стратегии i безотносительно к решениям второго игрока.

Следовательно, игроку I выгодно выбрать ту стратегию, которая дает максимальное значение u_i:

$$u = \max_i u_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина u называется *нижней ценой игры в чистых стратегиях*, а стратегия игрока I, на которой достигается эта величина, – *максиминной стратегией*.

Аналогично получаем, что величина

$$v_j = \max_i a_{ij}$$

есть максимальный, т.е. гарантированный проигрыш игрока II при выборе им стратегии j. Игроку II из всех стратегий выгодно выбрать ту, при которой его гарантированный проигрыш v_j минимален:

$$v = \min_j v_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина v называется *верхней ценой игры в чистых стратегиях*, а стратегия игрока II, на которой достигается эта величина, – *минимаксной стратегией*.

Еще раз отметим, что, выбрав максиминную стратегию, игрок I гарантированно получит выигрыш, не меньший u, а игрок II, выбрав минимаксную стратегию, не проиграет больше v.

Приведенные рассуждения носят название *принципа минимакса* (или *принципа гарантированного результата*). Кратко этот принцип может быть сформулирован следующим образом: каждый игрок стремится максимально увеличить свой гарантированный выигрыш.

Легко показать, что в любой матричной игре $u \leq v$. Например, в игре в орлянку $u = -1,\ v = 1$.

В теории игр оптимальность решения связывают с ситуацией, в которой ни одному из игроков не выгодно изменять свою стратегию. В этом случае говорят, что имеет место *ситуация равновесия*, а соответствующие стратегии являются *устойчивыми*. При этом выполняется равенство $u = v$.

Ситуация равновесия непосредственно связана с понятием седловой точки платежной матрицы. Элемент a_{pq} матрицы A называется *седловой точкой*, если

$$a_{iq} \leq a_{pq} \leq a_{pj}$$

для всех $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Другими словами, элемент a_{pq} является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любой матричной игры равенство $u = v$ имеет место тогда и только тогда, когда платежная матрица обладает седловой точкой.*

Таким образом, седловая точка платежной матрицы дает ситуацию равновесия (p, q) в матричной игре, при которой если один из игроков придерживается своей минимаксной (максиминной) стратегии, то другой игрок не может улучшить свое положение, отступая от своей максиминной (минимаксной) стратегии. Заметим, что седловая точка может быть не единственной.

Если (p, q) – седловая точка, то стратегии p, q называются *оптимальными чистыми стратегиями*, ситуация (p, q) – *решением игры в чистых стратегиях*, а сама матричная игра – *разрешимой в чистых стратегиях*. Величина $u = v$ называется в этом случае *чистой ценой игры*.

Пример 6.2. Решить игру с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь элемент $a_{23} = 1$ является единственной седловой точкой матрицы A, следовательно, игра разрешима. Оптимальные стратегии – это вторая для первого игрока и третья – для второго. Цена игры равна 1.

В случае, когда матрица A не имеет седловой точки, ситуации равновесия в игре нет, и она не разрешима в чистых стратегиях.

Между играми с седловой точкой и без нее существует большое различие, которое особенно проявляется при многократном повторении игры. В играх без седловой точки игрокам имеет смысл скрывать свои намерения от соперника в отличие от игр с седловой точкой. Если при многократном повторении игры один из игроков будет все время придерживаться какой-либо одной стратегии или даже выбирать свои стратегии по некоторой заранее определенной схеме, то разумный соперник может понять это и улучшить свое игровое положение.

Выход из этой ситуации состоит в следующем: в таких играх игроки должны выбирать свои чистые стратегии с некоторой вероятностью. При этом вероятности выбора стратегий определяют таким образом, чтобы средний выигрыш (проигрыш) был максимальным (минимальным). В этом и состоит идея использования смешанных стратегий, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

6.3. Смешанные стратегии

Смешанной стратегией игрока в матричной игре называется вектор вероятностей выбора его чистых стратегий. Так если $i = 1, \dots, m$ – чистые стратегии игрока I, а $j = 1, \dots, n$ – чистые стратегии игрока II, то смешанные стратегии игроков I и II – это векторы вероятностей $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1 \dots, y_n)$ соответственно, где x_i – вероятность выбора игроком I чистой стратегии i, $i = 1, \dots, m$, а y_j – вероятность выбора игроком II чистой стратегии j, $j = 1, \dots, n$. Очевидно, векторы x и y должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m.$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Пусть X – множество всех смешанных стратегий игрока I, Y – игрока II. Если первый игрок выбрал смешанную стратегию $x \in X$, а второй игрок – $y \in Y$, то *выигрышем игрока* I (соответственно *проигрышем игрока* II) естественно считать математическое ожидание (среднее значение)

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

В соответствии с принципом минимакса гарантированный, т.е. наименьший, выигрыш игрока I при выборе им смешанной стратегии x будет равен

$$u(x) = \min_{y \in Y} H(x, y) = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Поэтому игроку I выгодно выбрать x так, чтобы максимально увеличить $u(x)$:

$$u^* = \max_{x \in X} u(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Аналогично гарантированный, т.е. наибольший, проигрыш игрока *II* при выборе им смешанной стратегии y равен

$$v(y) = \max_{x \in X} H(x, y) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

и игроку *II* выгодно минимизировать $v(y)$:

$$v^* = \min_{y \in Y} v(y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Величины u^* и v^* называются соответственно *нижней* и *верхней ценой игры в смешанных стратегиях.*

Матричная игра называется *разрешимой в смешанных стратегиях*, если $u^* = v^*$. При этом стратегии x^*, y^*, для которых $u(x^*) = u^* = v^* = v(y^*)$, называются *оптимальными смешанными стратегиями*, а величина $u^* = v^*$ – *ценой игры в смешанных стратегиях.* Оптимальные смешанные стратегии образуют *ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Как и в случае чистых стратегий, легко показать, что всегда $u^* \le v^*$. Однако для смешанных стратегий строгое неравенство $u^* < v^*$ невозможно. Это следует из основной теоремы матричных игр, доказанной Дж. фон Нейманом.

ТЕОРЕМА 6.2. (О минимаксе.) *В любой матричной игре имеет место равенство $u^* = v^*$, т.е. любая матричная игра разрешима в смешанных стратегиях.*

Оптимальные смешанные стратегии игроков, а также цена игры в смешанных стратегиях могут быть найдены при решении пары взаимно двойственных задач линейного программирования (см., например, [2]):

$$\begin{array}{ll}
u \to max & v \to min \\
u - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0,\ j = 1, ..., n, & y_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, & v \text{ – любая}, \\
x_i \ge 0,\ i = 1, \dots, m, & v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ge 0,\ i = 1, ..., m, \\
u \text{ – любая}, & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.
\end{array}$$

Здесь a_{ij}, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$ – элементы платежной матрицы A; переменные x_i, $i = 1, ..., m$; y_j, $j = 1, ..., n$ – компоненты смешанных стратегий игроков *I* и *II* соответственно; u – гарантированный выигрыш игрока *I*; v – гарантированный проигрыш игрока *II* в смешанных стратегиях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций. М.: Изд-во МГТУ, 2000.

[2] *Заозерская Л.А., Ильев В.П., Леванова Т.В.* Экономико-математические методы: Методические указания и контрольные задания для студентов заочного отделения экономического факультета. Омск: Изд-во ОмГУ, 2004.

[3] *Колоколов А.А.* Дискретное программирование: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГУ, 1984.

[4] *Колоколов А.А., Девятерикова М.В.* Алгоритмы перебора L-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными: Препринт. Омск: Изд-во ОмГУ, 2001.

[5] *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.

[6] *Лесин В.В., Лисовец Ю.П.* Основы методов оптимизации. М.: Изд-во МАИ, 1998.

[7] *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. М.: Мир, 1985.

[8] *Таха Х. А.* Введение в исследование операций: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

[9] *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[10] *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М.: Наука, 1969.

Содержание

Редактор

ИД №

Свод. темплан 2005г.
Подписано к печати Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж 150 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ