

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

1. Решение матричной игры в чистых стратегиях

ПРИМЕР 1. Найти оптимальные стратегии игроков при следующей платежной матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим нижнюю и верхнюю цены игры в чистых стратегиях по формулам:

$$u = \max_i u_i = \max_i \min_j a_{ij},$$

$$v = \min_j v_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Имеем

$$u_1 = \min_j a_{1j} = \min\{-1, 1, -2\} = -2,$$

$$u_2 = \min_j a_{2j} = \min\{3, 5, -1\} = -1,$$

$$u_3 = \min_j a_{3j} = \min\{7, -4, -3\} = -4.$$

Аналогично вычисляем

$$v_1 = \max_i a_{i1} = \max\{-1, 3, 7\} = 7,$$

$$v_2 = \max_i a_{i2} = \max\{1, 5, -4\} = 5,$$

$$v_3 = \max_i a_{i3} = \max\{-2, -1, -3\} = -1.$$

Следовательно, получаем, что нижняя цена игры равна

$$u = \max_i u_i = \max\{-2, -1, -4\} = -1,$$

а верхняя цена игры равна

$$v = \min_j v_j = \min\{7, 5, -1\} = -1.$$

Так как верхняя и нижняя цены совпадают, то игра разрешима в чистых стратегиях, при этом первому игроку выгодно придерживаться второй стратегии, а второму игроку – третьей. Если игроки будут придерживаться указанных стратегий, то выигрыш первого игрока и, соответственно, проигрыш второго игрока равен (-1).

2. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

ПРИМЕР 2. Найти оптимальные стратегии игроков при следующей платежной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1). Данная игра неразрешима в чистых стратегиях. Действительно, нижняя и верхняя цены игры в чистых стратегиях не равны, т.к. $u = -1$, $v = 1$. Будем искать решение игры в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия игрока I представляет собой вектор вероятностей выбора чистых стратегий:

$$x = (x_1, x_2, x_3), \text{ где } x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Аналогично смешанная стратегия игрока II – это вектор вероятностей выбора чистых стратегий для второго игрока:

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4), \text{ где } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1; y_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

2). Проверим, возможно ли уменьшить размерность задачи за счет удаления доминируемых стратегий.

Заметим, что каждый элемент строки 3 не меньше соответствующего элемента строки 1, т.е. выигрыш первого игрока при выборе им чистой стратегии 3 не меньше его выигрыша при выборе им чистой стратегии 1. Очевидно, что разумный игрок предпочтет стратегию 3. Напомним, что при этом чистая стратегия 3 первого игрока называется *доминирующей* над его чистой стратегией 1, а стратегия 1 – *доминируемой* стратегией 3. Таким образом, переходим к платежной матрице

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично каждый элемент столбца 1 (или, например, 2) не больше соответствующего элемента столбца 4, и чистая стратегия 1 (тоже самое 2) второго игрока доминирует над его чистой стратегией 4. Заметим, что ни одна из стратегий 1 и 2 не доминируют другую.

Очевидно, что в оптимальное решение доминируемые чистые стратегии войдут с нулевыми вероятностями, т.е. $x_1^* = 0$, $y_4^* = 0$. Поэтому далее можно рассматривать сокращенную матрицу игры, полученную из исходной A вычеркиванием третьей строки и четвертого столбца:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3). Перейдем к эквивалентной игре с неотрицательной платежной матрицей. Для этого необходимо добавить ко всем элементам матрицы число не меньше, чем модуль минимального элемента матрицы.

Вместо матрицы \bar{A} рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

полученную из матрицы \bar{A} добавлением ко всем ее элементам числа 4.

Заметим, что такой сдвиг платежной матрицы производится для того, чтобы все ее элементы стали неотрицательными. В этом случае выигрыш первого игрока в

любой ситуации неотрицателен, а значит, неотрицательна и цена игры в смешанных стратегиях. Поэтому, решая пару двойственных задач ЛП, можно считать переменные u , v неотрицательными. Несложно показать, что при этом оптимальные смешанные стратегии не меняются, а цена игры также увеличивается на 4.

4). Для поиска оптимальных смешанных стратегий составляем пару двойственных задач ЛП для игры с платежной матрицей \tilde{A} :

$$\begin{array}{ll}
 u \rightarrow \max & v \rightarrow \min \\
 u - 2x_2 - 5x_3 \leq 0, & y_1 \geq 0, \\
 u - 6x_2 \leq 0, & y_2 \geq 0, \\
 u - 5x_2 - 3x_3 \leq 0, & y_3 \geq 0, \\
 x_2 + x_3 = 1, & v \geq 0, \\
 x_2 \geq 0, & v - 2y_1 - 6y_2 - 5y_3 \geq 0, \\
 x_3 \geq 0, & v - 5y_1 - 3y_3 \geq 0, \\
 u \geq 0, & y_1 + y_2 + y_3 = 1.
 \end{array}$$

Прежде чем решать двойственные задачи, удобно сделать замену переменных, тем самым сократив их количество:

$$s_i = \frac{x_i}{u}, \quad i = 2, 3; \quad t_j = \frac{y_j}{v}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$s_2 + s_3 = \frac{x_2}{u} + \frac{x_3}{u} = \frac{1}{u}, \quad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{y_1}{v} + \frac{y_2}{v} + \frac{y_3}{v} = \frac{1}{v},$$

и задачи принимают вид:

$$\begin{array}{ll}
 s_2 + s_3 \rightarrow \min & t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \max \\
 2s_2 + 5s_3 \geq 1, & t_1 \geq 0, \\
 6s_2 \geq 1, & t_2 \geq 0, \\
 5s_2 + 3s_3 \geq 1, & t_3 \geq 0, \\
 s_2 \geq 0, & 2t_1 + 6t_2 + 5t_3 \leq 1, \\
 s_3 \geq 0, & 5t_1 + 3t_3 \leq 1.
 \end{array}$$

Решая двойственные задачи, получаем оптимальные решения:

$$\begin{aligned}
 s^* &= (s_2^*, s_3^*) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{15} \right), \\
 t^* &= (t_1^*, t_2^*, t_3^*) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Найдем оптимальное значение целевой функции одной из двойственных задач:

$$u^* = \frac{1}{s_1^* + s_2^*} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{2}{15}} = \frac{10}{3}.$$

Так как оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают, то $v^* = u^* = \frac{10}{3}$.

Возвращаясь к исходным переменным, вычисляем вероятности выбора чистых стратегий первым игроком:

$$x_2^* = s_2^* \cdot u^* = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{9},$$

$$x_3^* = s_3^* \cdot u^* = \frac{2}{15} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{9}.$$

Аналогично получаем вероятности выбора чистых стратегий вторым игроком:

$$y_1^* = t_1^* \cdot v^* = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2}{3},$$

$$y_2^* = t_3^* \cdot v^* = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$y_3^* = t_2^* \cdot v^* = 0 \cdot \frac{10}{3} = 0,$$

Принимая во внимание исключенные из рассмотрения доминируемые стратегии, получаем оптимальные смешанные стратегии для игроков I и II :

$$x^* = \left(0, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right), \quad y^* = \left(\frac{10}{13}, \frac{3}{13}, 0, 0\right).$$

С учетом сдвига матрицы цена игры в смешанных стратегиях равна

$$u^* = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}.$$

Это значит, что при многократном повторении игры игроку I следует выбирать свою вторую чистую стратегию с вероятностью $\frac{5}{9}$, а третью – с вероятностью $\frac{4}{9}$.

Аналогично второй игрок, чтобы минимизировать свой проигрыш, должен выбирать первую стратегию с вероятностью $\frac{2}{3}$, а вторую – с вероятностью $\frac{1}{3}$. При этом ожидаемый средний выигрыш игрока I (и проигрыш игрока II) будет равен $-\frac{2}{3}$.