

ЗАДАНИЕ

Оптимизационная модель полета ядра

Практическое задание

В этой работе требуется построить оптимизационную модель полета снаряда.

Содержательная постановка задачи

Тело (ядро/снаряд) массой 1 кг выстреливается из пушки под углом α к горизонту со скоростью 100 м/с. Требуется найти оптимальный угол α , при котором достигается максимальная дальность стрельбы.

Концептуальная постановка задачи

Примем следующие предположения:

- объектом исследования является тело массой 1 кг, принимаемое за материальную точку;
- движение тела подчиняется второму закону Ньютона;
- тело находится под действием двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости движения.

Математическая постановка задачи

Модель ядра имеет четыре вещественных переменных: положение его центра x и y в координатах X и Y , и составляющие скорости V_x и V_y по этим координатам (см. рис. 9.1). Координаты являются интегралами от соответствующих скоростей:

$$\frac{dx}{dt} = V_x; \quad \frac{dy}{dt} = V_y$$

Производная от проекций скоростей определена как:

$$\frac{dV_x}{dt} = -K \cdot V_x^2; \quad \frac{dV_y}{dt} = -g - K \cdot V_y^2, \quad \text{где } K - \text{коэффициент сопротивления воздуха,}$$

$g = 9,81$ – ускорение свободного падения.

Начальные условия:

$$x = 0, \quad y = 0;$$

$$V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha), \quad V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha).$$

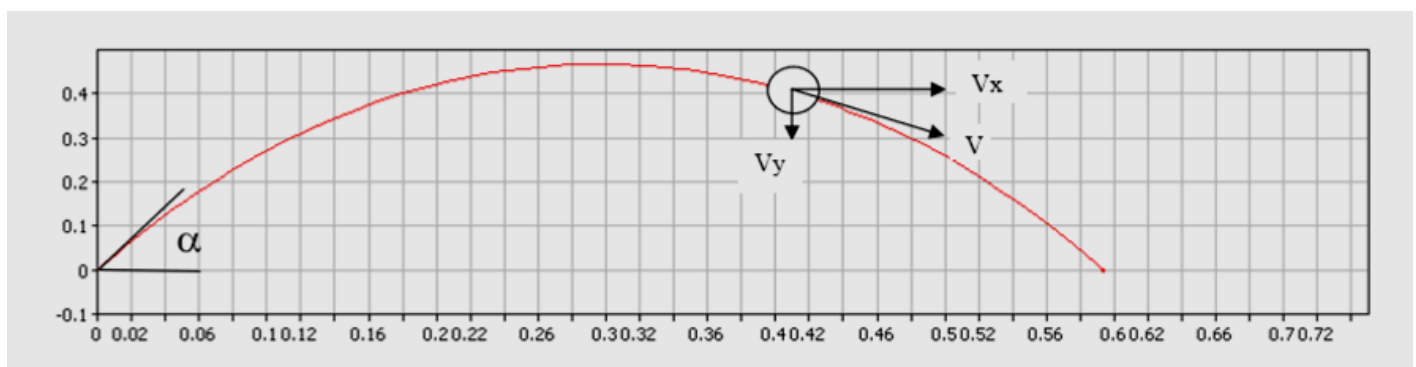


Рис. 9.1

Описание модели

Представим, что наш снаряд вылетает из пушки под очень маленьким углом – почти горизонтально, тогда дальность полета снаряда получится небольшой. Напротив, если выстрелить снарядом под очень большим углом – почти вертикально, то дальность тоже получится небольшой. Очевидно, что существует оптимальный угол, при котором дальность

полета будет наибольшей. Необходимо найти этот угол. Для решения задачи построим оптимизационную модель.

Оптимизация состоит из нескольких последовательных прогонов модели с различными значениями параметров, что позволяет находить значения параметров модели, соответствующие максимуму или минимуму целевой функции. В нашем случае целевая функция – дальность полета ядра. Параметр оптимизации – угол α . Для решения задачи нахождения наивыгоднейшего угла бросания следует выполнить ряд этапов:

1. Создать имитационную модель.
2. Создать оптимизационный эксперимент.
3. Задать целевой функционал (функцию, которую нужно минимизировать или максимизировать).
4. Задать оптимизационные параметры (параметры, значения которых будут меняться).
5. Задать условия остановки прогона.
6. Задать условия остановки оптимизации.
7. Запустить оптимизационный эксперимент.

Создание имитационной модели

Создайте новую модель Polet с чистого листа (не используя шаблоны).

Откройте палитру **Системная динамика**. Перенесите 4 элемента типа **Накопитель** на диаграмму класса активного объекта и переименуйте их соответственно в X, Y, Vx и Vy. Теперь в нашей модели есть 4 динамических переменных, описывающих координату и скорость перемещения снаряда, как показано на рис. 9.2.

Свяжем объявленные переменные вышеприведенными зависимостями, для этого в панели **Свойства** введите соответствующие формулы и начальные значения, как это показано на рис.9.3.

Обратите внимание на уравнение: $d(v_y)/dt = -g - K \cdot V_y^2$, при возведении V_y в квадрат член уравнения $-K \cdot V_y^2$ всегда будет отрицательным, независимо от направления движения снаряда, т.е. будет потеряно направление скорости движения, что приведет к ошибке. Необходимо видоизменить это уравнение так, чтобы знак скорости не потерялся:

$$d(v_y)/dt = -g - K \cdot V_y \cdot |V_y|.$$

Аналогично нужно изменить и уравнение для Vx.

Теперь, когда мы описали движение снаряда, нужно объявить и присвоить значения параметрам g , K , V_0 и α .

Для этого перенесите из палитры **Системная динамика** 4 элемента типа **Параметр** на диаграмму класса активного объекта, переименуйте их в g , k , $v0$, a и задайте им значения: 9,81; 0,01; 100; 1 соответственно.

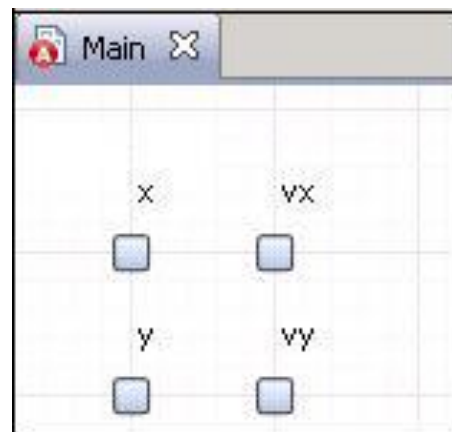


Рис. 9.2

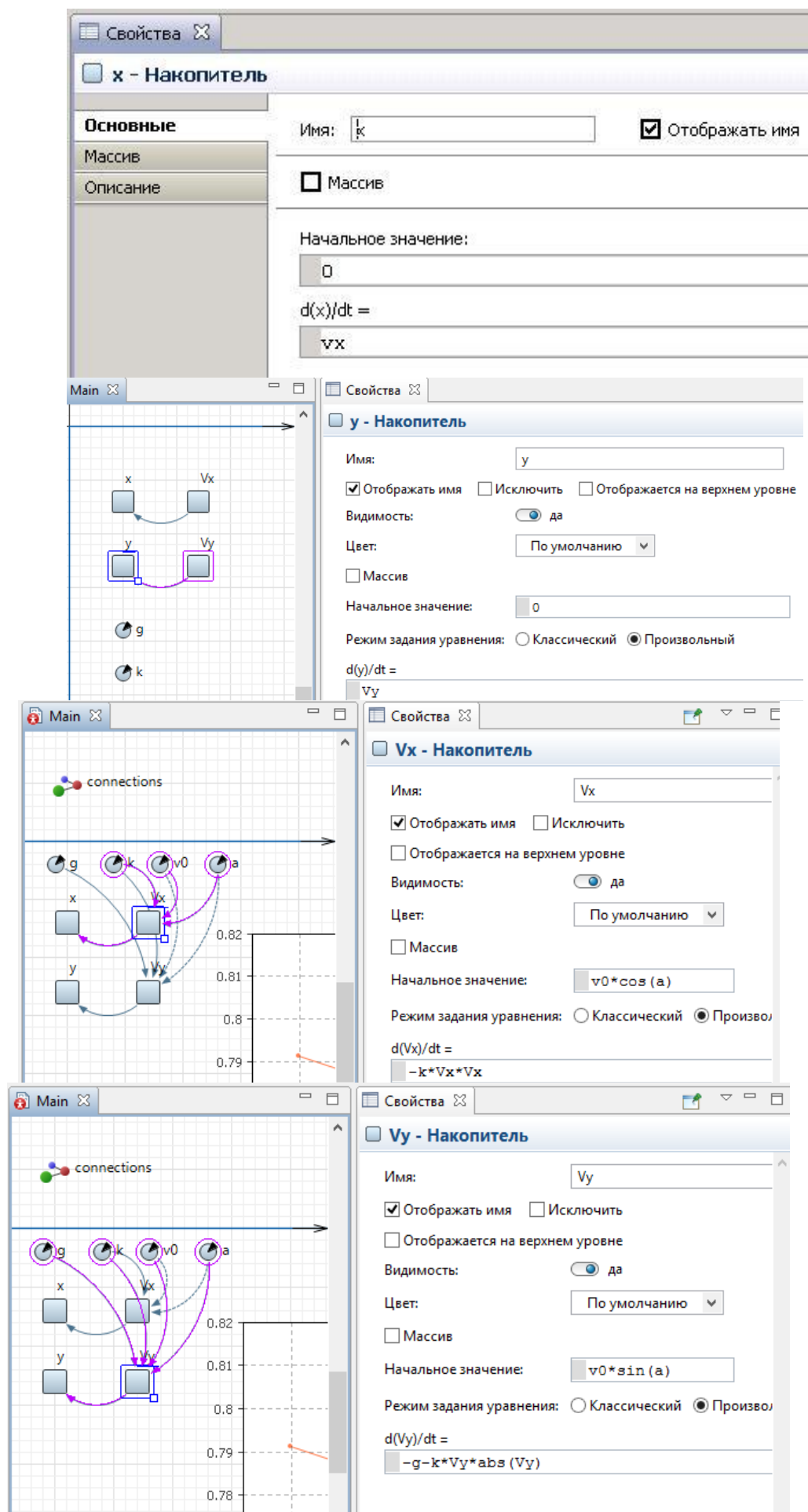


Рис. 9.3

Теперь нарисуем траекторию движения снаряда. Для этого перенесите из палитры **Статистика** элемент типа **График** на диаграмму класса активного объекта, затем в свойствах графика нажмите на кнопку: **Добавить элемент данных**. В поле **Значение по оси X** введите x , а в поле **Значение по оси Y** – y соответственно, как показано на рис. 9.4.

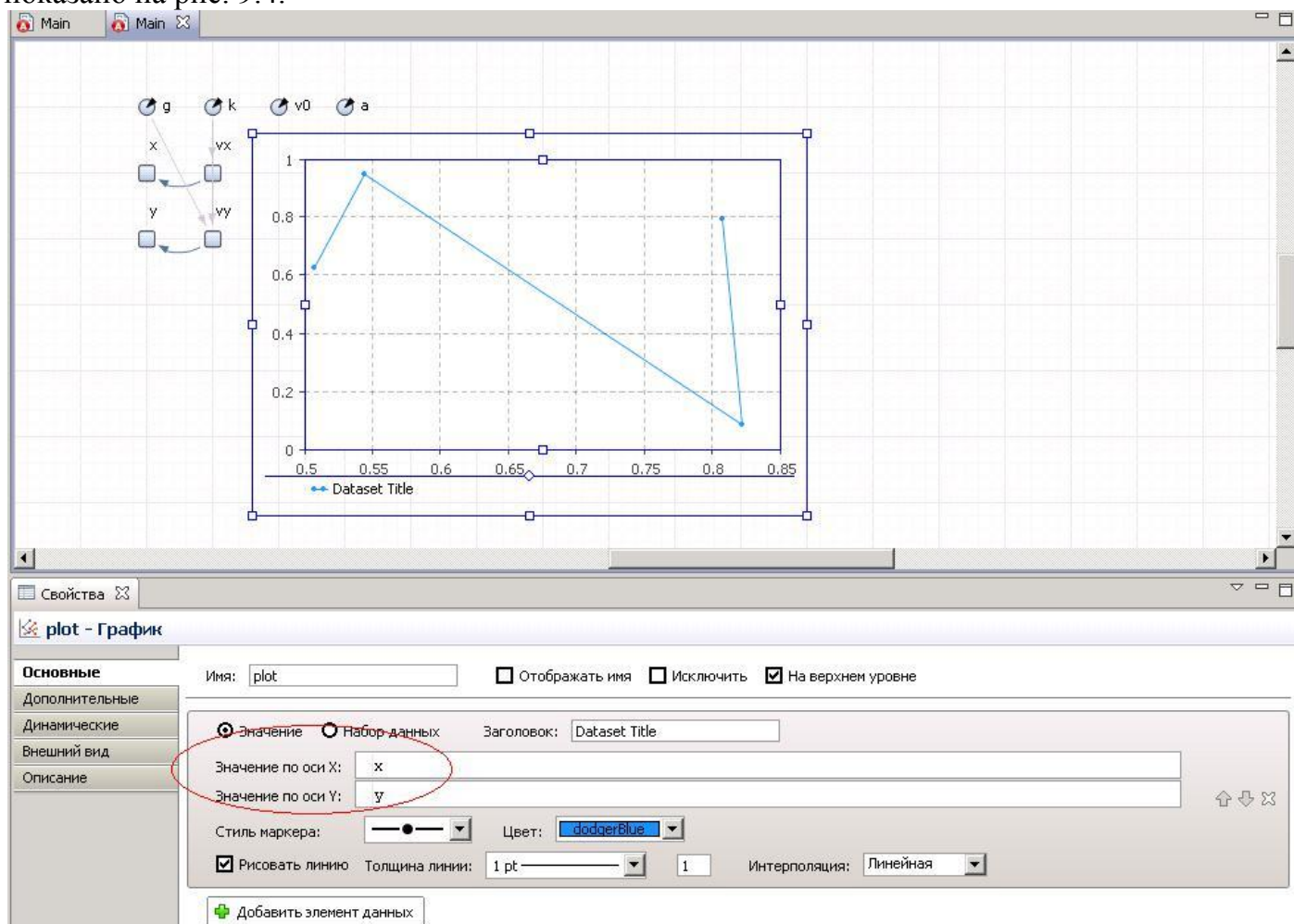


Рис. 9.4

Запустив модель на выполнение, мы увидим траекторию движения снаряда, рис. 9.5.

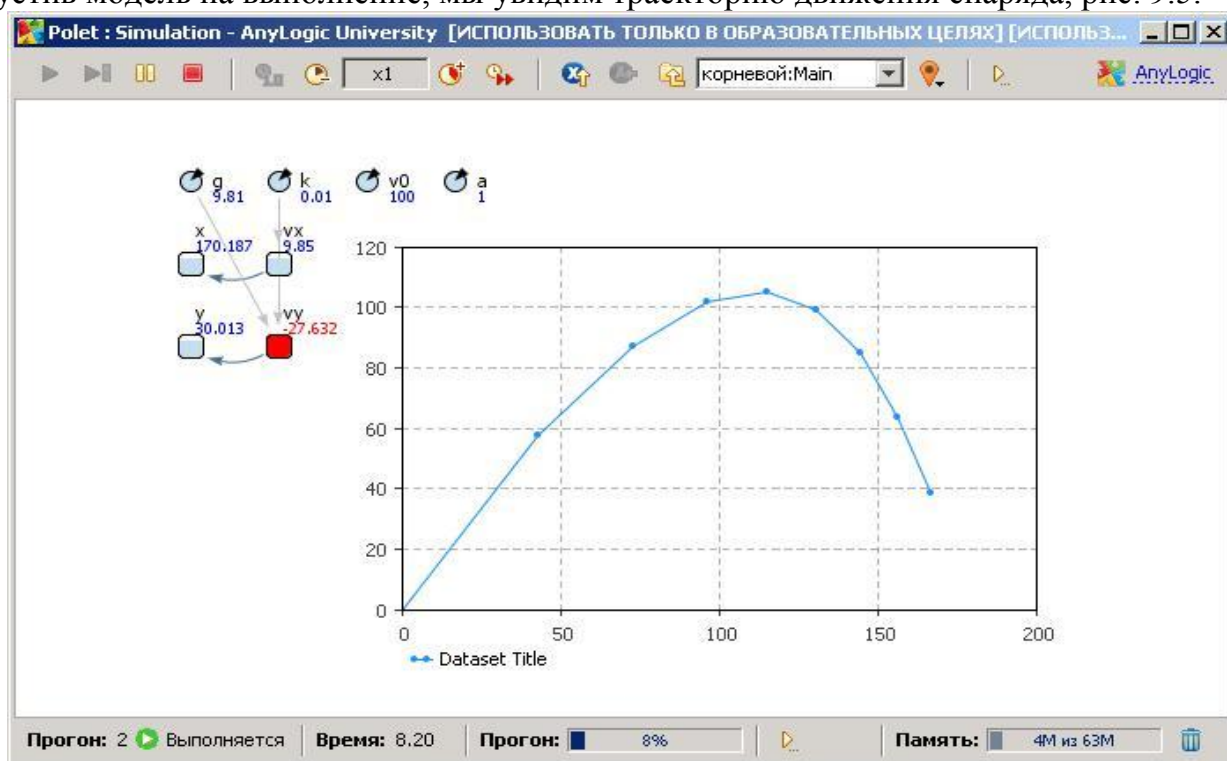


Рис. 9.5

Визуализировав траекторию движения снаряда, мы можем оценить адекватность модели в первом приближении, а для более точной проверки нужно выполнить тестовые примеры. Но сейчас нас интересует оптимальный угол выстрела, а для этого нужно определить дальность полета.

Введем простую переменную D из палитры **Системная динамика** **Динамическая переменная** в которую будем записывать дальность полета снаряда, а именно: значение переменной x в момент падения снаряда на землю. Отследить момент падения можно с помощью стейтчарта, который мы сейчас и построим.

С помощью палитры **Диаграмма состояний** постройте стейтчарт, как показано на рис. 9.6.

Переход в конечное состояние должен происходить при выполнении условия $y < 0$, т.е. когда снаряд коснется земли. При этом должно выполняться действие, при котором переменная D получит значение дальности полета, а именно $D = x$. Сохраните проект и запустите модель для проверки ее работоспособности. Обратите внимание, что при достижении уровня земли, точнее нулевой высоты полета, наш снаряд продолжает движение. Чтобы этого не происходило нужно остановить прогон модели. Для этого в конечном состоянии в поле **Действие** впишите следующую функцию `finishSimulation()`, модель будет останавливаться.

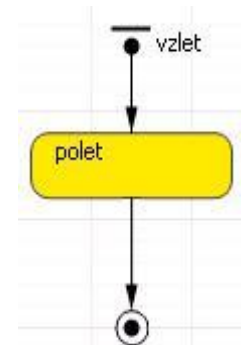
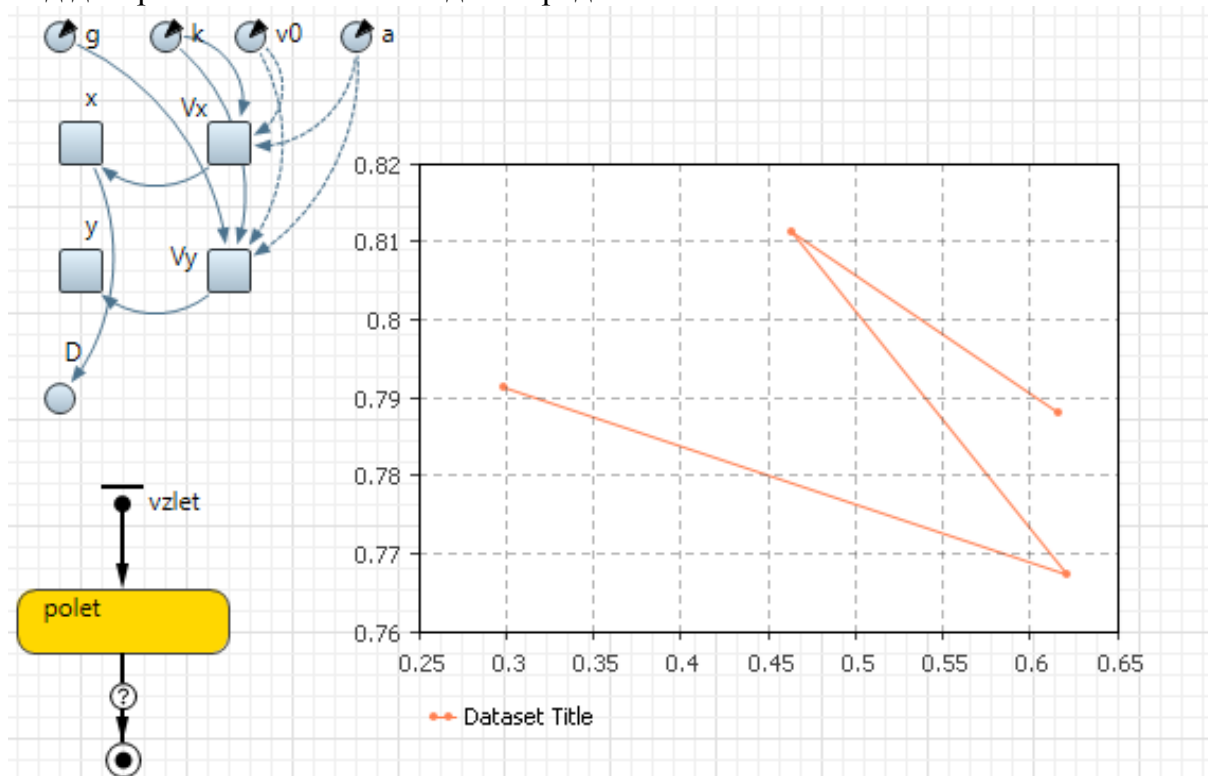


Рис. 9.6

Вид диаграммы состояний модели представлен ниже:



Мы создали имитационную модель и задали условие остановки прогона, теперь приступим к созданию оптимизационного эксперимента.

Создание оптимизационного эксперимента

Чтобы создать оптимизационный эксперимент в панели **Проекты**, щелкните правой кнопкой мыши по элементу модели и выберите **Создать|Эксперимент** из контекстного меню. Появится диалоговое окно **Новый эксперимент**. Выберите **Оптимизация** из списка **Тип эксперимента**, затем введите имя эксперимента в поле **Имя**, например `Optimum`. Остальные параметры оставьте без изменений.

Щелкните мышью по кнопке **Готово**. Мы создали оптимизационный эксперимент, теперь нужно ввести целевой функционал. Так как нам нужно максимизировать дальность полета, то в качестве целевой функции следует выбрать переменную D . Корневой активный объект эксперимента доступен здесь как `root`, поэтому запишем `root.D`.

Задайте условие остановки оптимизации – количество итераций = 500, это максимальное число итераций, доступное в учебной версии. Если выбрать опцию **Автоматическая остановка**, то оптимизация будет продолжаться до тех пор, пока значение целевой функции не перестанет существенно улучшаться (эта функция не доступна в учебной версии программы).

Затем следует задать оптимизационные параметры, т.е. параметры, значения которых будут меняться. Мы изменяем только один параметр: угол выстрела α , причем этот угол может принимать любое значение от 0 до 180° , поэтому в таблице **Параметры** напротив параметра α щелкните мышью в ячейке **Тип** и выберите тип параметра непрерывный и установите минимальное значение – 0, максимальное – 3.1415, начальное значение – 1, рис. 9.7. Нажмите кнопку **Создать интерфейс**, при этом будет создан интерфейс эксперимента – на презентацию будут добавлены элементы управления, отображающие текущий прогресс оптимизации и облегчающие управление процессом. Затем сохраните проект и запустите оптимизационный эксперимент.

Запуск модели

Кнопка **Запустить оптимизацию** на презентации оптимизационного эксперимента выполняет запуск оптимизационного процесса, рис. 9.8. В правой части расположен график, визуально отображающий ход оптимизации. По оси X откладываются номера итераций, а по оси Y - **Текущее**, **Лучшее допустимое** и **Лучшее недопустимое** значения, найденные для каждой итерации.

Optimum - Оптимизационный эксперимент

Имя: Корневой класс модели: ☐ Исключить

Генератор случайных чисел:

- ☒ Случайное начальное число (уникальные "прогоны")
- ☐ Фиксированное начальное число (воспроизводимые "прогоны") Начальное число:
- ☐ Случайный генератор (подкласс класса Random):

Целевая функция: ☐ минимизировать ☒ максимизировать

Условия остановки оптимизации

- ☒ Количество итераций:
- ☐ Автоматическая остановка

Параметры:

Параметр	Тип	Значение			
		Мин.	Макс.	Шаг	Начальное
g	фиксированный	9.81			
k	фиксированный	0.01			
v0	фиксированный	100			
a	непрерывный	0	3.1415	0	1

Рис. 9.7

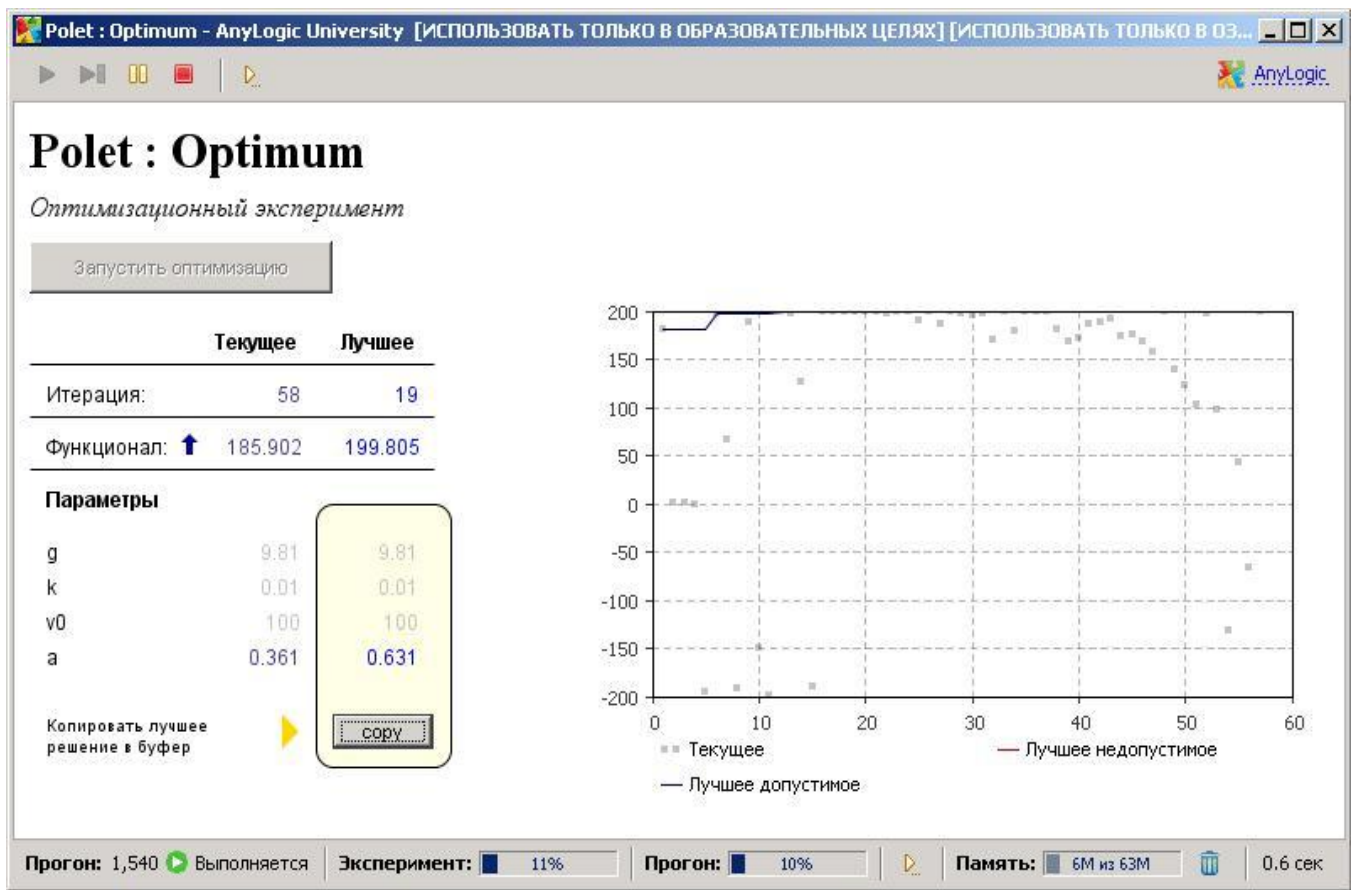


Рис. 9.8

Таблица, расположенная в левой части окна, отображает всю необходимую информацию о ходе оптимизационного процесса. В столбце **Текущее** отображаются: номер последней завершенной итерации, значение целевой функции и значения параметров, при которых оно было получено на момент окончания этой итерации.

В столбце **Лучшее** отображается та же информация для найденного решения, которое является оптимальным на данный момент.

По завершении оптимизации это решение будет считаться оптимальным найденным решением. Вы можете экспортировать полученное решение в другие эксперименты модели, щелкнув по кнопке **сору** и вставив его в дальнейшем в нужный эксперимент с помощью кнопки **Вставить из буфера**, расположенной в нижней части страницы **Основные панели Свойства** этого эксперимента.

Постройте модель и продемонстрируйте полученный результат преподавателю.