Soit Z un ensemble fini non vide et $T \subset Z$ avec T non vide.
On tire aléatoirement (de façon uniforme) $m > 0$ éléments (avec remise). On s'intéresse au premier tirage tel qu'un des m éléments tirés soit dans T. On note $\tilde{K}$ ce tirage.

Alors
$$\mathbb{P}(\tilde{K}=1) = 1 - \left(\frac{z-t}{z}\right)^m = P_1$$
et
$$\mathbb{P}(\tilde{K}=n) = (1-P_1)^{n-1} . P_1 = \left(\frac{z-t}{z}\right)^{m.(n-1)} \left(1-\left(\frac{z-t}{z}\right)^m\right)$$

C'est la même chose si le tirage est réalisé sans remise. Mais alors $P_1' \geqslant P_1$.

Alors
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(\tilde{K}=n).n = \sum_{n=1}^{N} (1-P_1)^{n-1} P_1 . n$$
$$= \frac{P_1}{1-P_1} \sum_{n=1}^{N} (1-P_1)^n . n$$
$$= P_1 + \frac{P_1}{1-P_1} \sum_{n=2}^{N} (1-P_1)^n . n$$

Or
$$\sum_{n=2}^{\infty} n . x^n = \frac{x^2(2-x)}{(1-x)^2} \quad \text{si } 0 < x < 1$$
[Or $0 < P_1 < 1$ car $m > 0$ et Z et T non vides]

Donc
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(\tilde{K}=n).n \xrightarrow[N \to \infty]{} P_1 + \frac{P_1}{1-P_1} \frac{(1-P_1)^2(1+P_1)}{P_1^2}$$

Or
$$\frac{P_1}{1-P_1} \frac{(1-P_1)^2(1+P_1)}{P_1^2} = \frac{(1-P_1)(1+P_1)}{P_1} = \frac{1-P_1^2}{P_1} = \frac{1}{P_1} - P_1$$

Donc
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(\tilde{K}=n).n \xrightarrow[N \to \infty]{} P_1 + \frac{1}{P_1} - P_1 = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{1-\left(\frac{z-t}{z}\right)^m}$$

On a donc
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{K}=n).n = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{1-\left(\frac{z-t}{z}\right)^m}}$$

Doit pouvoir se retrouver + simplement...