Avec les mêmes Z et T que précédemment. On se donne $s : T \to \mathbb{R}$ une fonction de score.

On souhaite estimer

$$s_T = \frac{1}{|T|} \sum_{x \in T} s(x)$$

Soit $\{M_k\}_{k \leq K}$ une suite de K tirages aléatoires uniformes (avec remise) de m éléments de Z.
On peut écrire

$$\begin{aligned} M_k &= (M_k \cap T) \sqcup (M_k \cap (Z \setminus T)) \\ &= M_k^T \sqcup (M_k \cap (Z \setminus T)) \quad \text{(notation)} \end{aligned}$$

⚠ Avec le résultat précédent, on IGNORE les premiers tirages tq $M_0^T = \emptyset$.

On note $\hat{a}$: $\quad \hat{a} = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{k=1}^{K} \operatorname{avg} M_k^T$

avec

$$\operatorname{avg} M_k^T = \begin{cases} 0 & \text{si } M_k^T = \emptyset \\ \frac{1}{|M_k^T|} \sum_{M_k^T} s(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{K} = |\{k \leq K \ / \ M_k^T \neq \emptyset\}|$$

Par construction $\bar{K} \geq 1$.
Alors $\mathbb{E}[\hat{a}] = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{et } M_k^T \neq \emptyset}}^{K} \frac{1}{|M_k^T|} \sum_{x \in M_k^T} \mathbb{E}[s(x)]$

$$= \frac{\bar{K}}{\bar{K}} \cdot \frac{|M_k^T|}{|M_k^T|} \cdot \mathbb{E}[s_T] = s_T$$

Notre estimateur est sans biais !