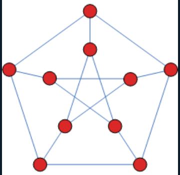


M011
Grafovi

Tema: Predavanje 4

29.10.2018

predavač: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

asistent: —||—

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Vidjeli smo da mnoga svojstva grafova možemo uočiti samo na temelju njihove 'dobre' geometrijske reprezentacije.

No, što ako želimo izračunati neku grafovsku invarijantu[1] za povezan graf s 500 vrhova?

U tom slučaju se moramo poslužiti računalom s tim da graf na prikladan način moramo zapisati u računalnoj memoriji.

Jedan od načina na koji zapisujemo graf u računalu jest pomoću matrice.

[1] Grafovska invarijanta je preslikavanje f koje svakom grafu pridružuje neki matematički objekt, nepromijenjen pri djelovanju bilo kojeg izomorfizma grafa, tj. vrijedi $f(G_1) = f(G_2)$ za $G_1 \cong G_2$. Najjednostavnije invarijante su: broj vrhova, broj bridova, niz stupnjeva, broj vrhova određenog stupnja, broj ciklusa određene duljine, suma udaljenosti među svim vrhovima, particija skupa vrhova u k podskupova između kojih je broj bridova minimalan ili maksimalan...

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Definicija 7.1

Neka je G prozvoljan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Matrica susjedstva $A(G)$ grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica s elementima a_{ij} koji su jednaki broju bridova između vrhova v_i i v_j, $i, j = 1, \ldots, n$.

Iz definicije je jasno sljedeće:

- $A(G)$ je simetrična matrica, tj. $a_{ij} = a_{ji}$.
  (Kod usmjerenih grafova to neće biti slučaj.)
- Ako vrhovi v_i i v_j nisu spojeni bridom, onda $a_{ij} = a_{ji} = 0$.
- Za jednostavan graf G matrica susjedstva $A(G)$ je $(0, 1)$-matrica takva da su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki nuli (a svaki od preostalih elemenata je ili 1 ili 0).
- Za multigrafove također vrijedi $a_{ii} = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$ jer ne postoji brid koji spaja neki vrh sam sa sobom, tj. nemamo petlje u grafu.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Definicija 7.1

Neka je G prozvoljan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matrica susjedstva $A(G)$ grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica s elementima a_{ij} koji su jednaki broju bridova između vrhova v_i i v_j, $i, j = 1, \dots, n$.

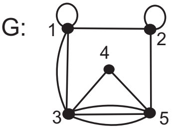
NAPOMENA:

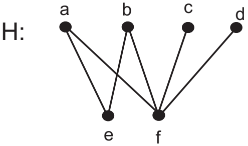
U raznoj literaturi postoje različiti načini definiranja matrice susjedstva za pseudografove. Npr. ako vrh v_1 ima jednu petlju, prema gornjoj definiciji to bi značilo da je broj bridova između vrha v_1 i v_1 jednak 1 pa je $a_{11} = 1$. Ovo je prikladno za računanje broja šetnji duljine $l \geq 1$ u G.

Zbog nekih drugih svojstava, prikladno je u ovoj situaciji staviti $a_{11} = 2$ (npr. tada je suma elemenata u svakom retku jednaka stupnju odgovarajućeg vrha pa je suma svih elemenata matrice susjedstva jednaka dvostrukom broju bridova).

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Evo primjera:





$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Još jedan način zadavanja grafa je pomoću matrice incidencije.

Definicija 7.2

Neka je G prozvoljan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom bridova $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matrica incidencije $M(G)$ grafa G je $n \times m$ matrica s elementima m_{ij} za koje vrijedi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ i } e_j \text{ nisu incidentni} \\ 2, & e_j \text{ je petlja nad } v_i \\ 1, & \text{inače,} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$

Matrica incidencije broji koliko puta su neki vrh i neki brid incidentni.

- Graf G jedinstveno je određen s $A(G)$ $(M(G))$, no, obrat ne vrijedi. "Izgled" matrice susjedstva (matrice incidencije) ovisi o načinu kako smo označili vrhove u grafu pa tako jednom grafu možemo pridružiti više matrica susjedstva (matrica incidencije)...o tome malo poslije...

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Još jedan način zadavanja grafa je pomoću matrice incidencije.

Definicija 7.2

Neka je G prozvoljan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i skupom bridova $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Matrica incidencije $M(G)$ grafa G je $n \times m$ matrica s elementima m_{ij} za koje vrijedi

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ i } e_j \text{ nisu incidentni} \\ 2, & e_j \text{ je petlja nad } v_i \\ 1, & \text{inače}, \end{cases}$$

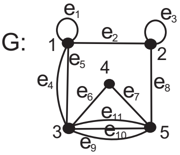
$i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.$

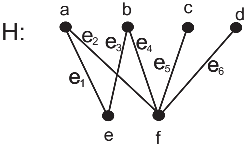
Matrica incidencije broji koliko puta su neki vrh i neki brid incidentni.

- Graf G jedinstveno je određen s $A(G)$ ($M(G)$), no, obrat ne vrijedi. "Izgled" matrice susjedstva (matrice incidencije) ovisi o načinu kako smo označili vrhove u grafu pa tako jednom grafu možemo pridružiti više matrica susjedstva (matrica incidencije)...o tome malo poslije...

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Primjer:





$$M_G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

- Za multigraf G suma elemenata u i-tom retku (ili i-tom stupcu) u $A(G)$ jednaka je stupnju vrha $v_i \in V(G)$,
  a suma svih elemenata u $A(G)$ (ili u $M(G)$) jednaka je dvostrukom broju bridova u G.
- Ako je i-ti redak od $A(G)$ (ili od $M(G)$) nul-redak, onda je v_i izoliran vrh u G. (No, tada je i i-ti stupac od $A(G)$ nul-stupac.)
- Suma elemenata u i-tom retku od $M(G)$ jednaka je stupnju vrha v_i u G.
- Suma elemenata u svakom stupcu od $M(G)$ jednaka je 2 (zbog incidencije).

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Obzirom da jednom grafu možemo pridružiti više matrica susjedstva, vrijedi:

Teorem 7.3

Izomorfni grafovi imaju isti skup matrica susjedstva.

Pitamo se: U kakvoj su vezi matrice susjedstva pridružene izomorfnim grafovima ?

Teorem 7.4

Grafovi G i H s n vrhova su izomorfni ako i samo ako postoji permutacijska matrica P reda n takva da vrijedi

$$A(H) = P^{-1}A(G)P.$$

(P opisuje permutaciju vrhova: $P = (\pi(1)\,\pi(2)\,\ldots\pi(n))^{\tau}$.)

Očito su $A(G)$ i $A(H)$ slične matrice, a znamo da slične matrice imaju isti rang, isti spektar, istu determinantu i štošta drugo...

$\boxed{\text{NAPOMENA:}}$ Primijetimo da je skup matrica susjedstva pridružen svim međusobno izomorfnim potpunim grafovima jednočlan skup!

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Primjer 7.5 Neka su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od $A(K_n)$. Dokažimo da je $\lambda_1 = n-1$ i $\lambda_i = -1$ za $i = 2, \ldots, n$.

Rješenje: Tražimo nultočke karakterističnog polinoma matrice $A(K_n)$, tj. rješavamo jednadžbu $det(\lambda I - A(K_n)) = 0$.

Imamo

$$det(\lambda I - A(K_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^{n-1}(\lambda - n + 1).$$

Za $\lambda = -1$ svi retci determinante su jednaki $\Rightarrow$ -1 je svojstvena vrijednost kratnosti $n-1$.

Znamo da općenito vrijedi $tr A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, što u našem slučaju znači $tr A(K_n) = 0$.

Slijedi $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = -1(n-1) + \lambda_1 = 0$, odnosno, $\lambda_1 = n-1$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Primjer 7.5 Neka su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od $A(K_n)$. Dokažimo da je $\lambda_1 = n-1$ i $\lambda_i = -1$ za $i = 2, \ldots, n$.

Rješenje: Tražimo nultočke karakterističnog polinoma matrice $A(K_n)$, tj. rješavamo jednadžbu $det(\lambda I - A(K_n)) = 0$.
Imamo

$$det(\lambda I - A(K_n) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^{n-1}(\lambda - n + 1).$$

Za $\lambda = -1$ svi retci determinante su jednaki $\quad\Rightarrow\quad -1$ je svojstvena vrijednost kratnosti $n-1$.

Znamo da općenito vrijedi $trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, što u našem slučaju znači $trA(K_n) = 0$.

Slijedi $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = -1(n-1) + \lambda_1 = 0$, odnosno, $\lambda_1 = n-1$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

- Sve svojstvene vrijednosti matrice susjedstva su realni brojevi (jer je A(G) realna simetrična matrica).
- Postoji ortonormalna baza za $\mathbb{R}^n$ sačinjena od svojstvenih vektora matrice $A(G)$.
- Po Perron-Frobeniusovom teoremu, $A(G)$ ima pozitivnu svojstvenu vrijednost l, takvu da apsolutne vrijednosti svih ostalih svojstvenih vrijednosti nisu veće od l. Toj sv. vrijednosti odgovara svojstveni vektor čije su sve komponente pozitivni realni brojevi.
- Svakom bipartitnom grafu s particijom (X, Y), $|X| = m$, $|Y| = n - m$, možemo pridružiti matricu susjedstva $\begin{bmatrix} 0 & B^\tau \\ B & 0 \end{bmatrix}$ pri čemu je B $n \times m$ matrica. Spektar bipartitnog grafa simetričan je obzirom na 0.
- Najveća svojstvena vrijednost r-regularnog grafa je $\lambda = r$. Odgovarajući svojstveni vektor je **1**$= (1, 1, \ldots, 1)^\tau$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Broj šetnji duljine l u nekom grafu može se odrediti pomoću matrice susjedstva:

Teorem 7.6

Neka je $A(G) = A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G i $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Tada je (i, j)-ti član l-te potencije A^l jednak broju (v_i, v_j)-šetnji duljine l.
Broj svih šetnji na G duljine l jednak je sumi svih elemenata matrice A^l.

Dokaz: Indukcijom po l.
BAZA: $l = 1$ očito je a_{ij} broj (v_i, v_j)-šetnji duljine 1.
PRETPOSTAVKA: Neka tvrdnja vrijedi za $l = k - 1$.
KORAK: Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $l = k$.

Znamo da $A^k = A^{k-1}A$. Sa $a_{ij}^{(k)}$ označimo (i, j)-ti član matrice A^k. Slijedi

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k-1)} a_{rj}.$$

-n je broj vrhova u grafu

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Broj šetnji duljine l u nekom grafu može se odrediti pomoću matrice susjedstva:

Teorem 7.6

Neka je $A(G) = A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G i $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Tada je (i, j)-ti član l-te potencije A^l jednak broju (v_i, v_j)-šetnji duljine l.
Broj svih šetnji na G duljine l jednak je sumi svih elemenata matrice A^l.

Dokaz: Indukcijom po l.
BAZA: $l = 1$ očito je a_{ij} broj (v_i, v_j)-šetnji duljine 1.
PRETPOSTAVKA: Neka tvrdnja vrijedi za $l = k - 1$.
KORAK: Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $l = k$.

Znamo da $A^k = A^{k-1}A$. Sa $a_{ij}^{(k)}$ označimo (i, j)-ti član matrice A^k. Slijedi

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k-1)} a_{rj}.$$

-n je broj vrhova u grafu

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Broj šetnji duljine l u nekom grafu može se odrediti pomoću matrice susjedstva:

Teorem 7.6

Neka je $A(G) = A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G i $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Tada je (i,j)-ti član l-te potencije A^l jednak broju (v_i, v_j)-šetnji duljine l.
Stoga je broj svih šetnji na G duljine l jednak sumi svih članova od A^l.

Dokaz:

Svaka (v_i, v_j)-šetnja duljine k sastoji se od (v_i, v_r)-šetnje duljine $k-1$, gdje je v_r neki susjed od v_j, i brida $v_r v_j$.
Prema pretpostavki indukcije, broj (v_i, v_r)-šetnji duljine $k-1$ je jednak $a_{ir}^{(k-1)}$, pa je prema principu umnoška i zbroja broj (v_i, v_j)-šetnji duljine k jednak

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k-1)} a_{rj} = a_{ij}^{k}.$$

$\square$

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Definicija 7.7

Neka je G jednostavan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i neka je d_i stupanj vrha v_i, $i = 1, \ldots, n$. Laplaceova ili Kirchhoffova matrica $L(G)$ grafa G je $n \times n$ matrica s elementima l_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, tako da vrijedi

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA:}}$ Očito je $L = D - A$, gdje je $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ dijagonalna matrica sa stupnjevima d_i vrhova v_i na glavnoj dijagonali, $i = 1, \ldots, n$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Definicija 7.7

Neka je G jednostavan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i neka je d_i stupanj vrha v_i, $i = 1, \dots, n$. Laplaceova ili Kirchhoffova matrica $L(G)$ grafa G je $n \times n$ matrica s elementima l_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, tako da vrijedi

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

- Laplaceova matrica je simetrična pozitivno semidefinitna matrica, tj $x^\tau L x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Suma elemenata u svakom retku, tj. stupcu, jednaka je nuli.
- Jedan svojstveni vektor Laplaceove matrice je $(1, 1, \dots, 1)^\tau$ i njemu odgovara svojstvena vrijednost $\lambda = 0$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Definicija 7.7

Neka je G jednostavan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i neka je d_i stupanj vrha v_i, $i = 1, \ldots, n$. Laplaceova ili Kirchhoffova matrica $L(G)$ grafa G je $n \times n$ matrica s elementima l_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, tako da vrijedi

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

- Neka je N orijentirana matrica incidencije definirana s $N_{ij} = 1$ ako $v = i$, $e = ij \in E(G), i < j$, $N_{ij} = -1$ ako $v = j, e = ij \in E(G), i < j$, $N_{ij} = 0$, inače.
  Tada vrijedi $L = NN^{\tau}$.

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

Evo i još jedne (malo složenije) matrice pridružene grafu:

Definicija 7.8

Neka je G povezan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matrica udaljenosti $D(G)$ grafa G je $n \times n$ matrica s elementima $d(v_i, v_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

- Matrica udaljenosti je nenegativna simetrična matrica.
- Na glavnoj dijagonali su nule (bez obzira radi li se o jednostavnom grafu, multigrafu ili pseudografu).

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

NAPOMENE:

Spektralna teorija grafova povezuje svojstva grafa sa spektrom i svojstvenim vektorima odgovarajućih pridruženih matrica.

Jedna od značajnijih primjena spektralne teorije grafova je u kvantnoj kemiji.
Razne molekularne strukture mogu se reprezentirati pomoću grafova. Pri tome su atomi vrhovi tog grafa, a kemijske veze između njih su bridovi.
Energetske razine elektrona u takvim molekulama su zapravo svojstvene vrijednosti matrice susjedstva. Stabilnost molekule kao i druga važna kemijska svojstva u bliskoj su vezi sa spektrom grafa (pod spektrom grafa mislimo na spektar matrice susjedstva), a i sa svojstvenim vektorima.

S tim u vezi, definirana je energija grafa $E(G)$ kao suma apsolutnih vrijednosti svojstvenih vrijednosti od $A(G)$, tj. ako je spektar od $A(G)$ skup $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, tada

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

7 Reprezentacija grafova. Specijalne matrice

NAPOMENE:

Trenutno vrlo popularna uporaba spektralne teorije grafova je u kompleksnim mrežama. Pojavljuju se nove matrice kao što su matrica centriranosti (centrality matrix), modularna matrica i razne druge. Njihovi spektri važni su u otkrivanju specijalnih skupova vrhova u grafu (clusters, communities).

7 Reprezentacija grafova skupovima

Još jedan način reprezentacije grafova je pomoću skupova.

Definirajmo familiju $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ podskupova skupa X i graf presjeka $G_{\mathcal{X}}$ sa skupom vrhova $X_1, \ldots, X_n$ i bridovima $X_iX_j, \forall i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$ tako da $X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

Teorem 7.9

Svaki graf je graf presjeka neke familije podskupova.

Dokaz: Neka je G proizvoljan graf. Za svaki vrh $v \in V(G)$ definiramo skup

$$X_v = \{\{v, u\} : vu \in E(G)\}.$$

Očito $X_u \cap X_v \neq \emptyset$ ako i samo ako $uv \in E(G)$. $\square$

Značajan problem u teoriji grafova jest odrediti kardinalni broj najmanjeg skupa X, kojeg zovemo još i bazni skup, tako da neki graf G možemo reprezentirati kao graf presjeka familije podskupova od X.

Problem određivanja takvog kardinalnog broja može se poistovjetiti s problemom pokrivanja bridova grafa G klikama iz G.

7 Reprezentacija grafova skupovima

Promotrimo uniju podskupova iz familije $\mathcal{X}$, tj. neka je $U = \cup_{i=1}^{n} X_i$ i neka je $|U| = k$.

Neka $x \in U$ proizvoljan. Tada je podskup skupa vrhova grafa presjeka G kojemu odgovaraju svi podskupovi koji sadrže x jedna klika u G.

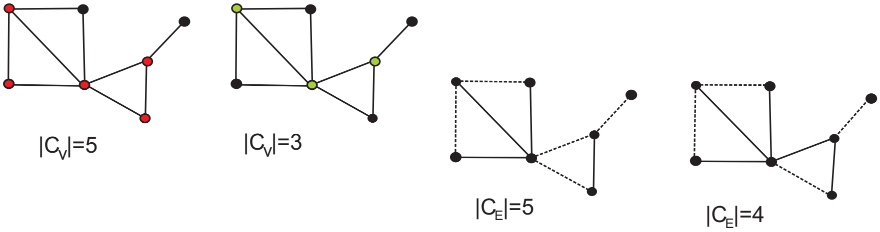
Bilo koja dva vrha iz podskupa skupa vrhova od G su susjedna jer je presjek odgovarajućih podskupova iz familije $\mathcal{X}$ neprazan, tj. sadrži x.

Također, svaki brid grafa presjeka G sadržan je u jednoj od klika jer brid odgovara nepraznom presjeku, a presjek je neprazan ako sadrži najmanje jedan element unije U. Stoga, bridove grafa G možemo pokriti s k klika, svaka odgovara točno jednom elementu unije U.

7 Reprezentacija grafova skupovima

No, što općenito znači 'pokriti' bridove, odnosno, vrhove nekog grafa?

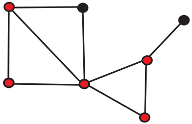
- Vršni pokrivač grafa G je podskup C_V skupa vrhova u G takvih da je svaki brid u G incidentan s najmanje jednim vrhom iz C_V.
  Najzanimljiviji pokrivači vrhova su oni koji imaju najmanji kardinalni broj.
- Bridni pokrivač grafa G je podskup C_E skupa bridova u G takvih da je svaki vrh u G incidentan s najmanje jednim bridom C_E.
  Najzanimljiviji pokrivači bridova su oni koji imaju najmanji kardinalni broj.



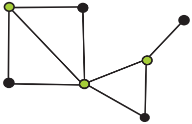
7 Reprezentacija grafova skupovima

No, što općenito znači ’pokriti’ bridove, odnosno, vrhove nekog grafa?

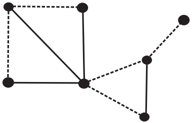
- Vršni pokrivač grafa G je podskup C_V skupa vrhova u G takvih da je svaki brid u G incidentan s najmanje jednim vrhom iz C_V.
  Najzanimljiviji pokrivači vrhova su oni koji imaju najmanji kardinalni broj.
- Bridni pokrivač grafa G je podskup C_E skupa bridova u G takvih da je svaki vrh u G incidentan s najmanje jednim bridom C_E.
  Najzanimljiviji pokrivači bridova su oni koji imaju najmanji kardinalni broj.



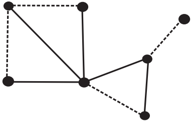
$|C_V|=5$



$|C_V|=3$



$|C_E|=5$



$|C_E|=4$

7 Reprezentacija grafova skupovima

Problem određivanja najmanjeg kardinalnog broja baznog skupa X ekvivalentan je određivanju najmanjeg broja klika u pripadnom grafu G koje zajedno pokrivaju sve bridove u G.

Takav problem nije jednostavan.

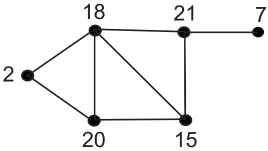
Znamo:

- Za graf G s m bridova, najmanji broj klika koji pokrivaju bridove u G najviše iznosi m.
- Za graf s n vrhova, najmanji broj klika koji pokrivaju bridove u G iznosi najviše $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$, gdje je $[\ ] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ funkcija koja realnom broju pridružuje najbliži cijeli broj.

7 Reprezentacija grafova skupovima

Primjer 7.10 Zadan je skup $A = \{2, 7, 15, 18, 20, 21\}$. Pridružimo mu graf G tako da $V(G) = A$ i $\forall a, b \in A$, $a \neq b$ vrijedi $ab \in E(G)$ ako i samo ako a i b imaju barem jednog zajedničkog djelitelja većeg od 1.
Odredimo zatim najmanji broj klika potrebnih za pokrivanje bridova od G.

Rješenje: Graf G lako je nacrtati.

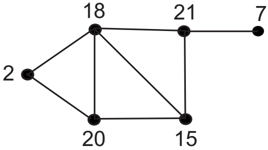


Obzirom da G nije kompliciran, najmanji broj klika koje pokrivaju bridove u G možemo odrediti gledajući u geometrijsku reprezentaciju od G.
Ipak, mi ćemo taj broj odrediti računski.

7 Reprezentacija grafova skupovima

Primjer 7.10 Zadan je skup $A = \{2, 7, 15, 18, 20, 21\}$. Pridružimo mu graf G tako da $V(G) = A$ i $\forall a, b \in A$, $a \neq b$ vrijedi $ab \in E(G)$ ako i samo ako a i b imaju barem jednog zajedničkog djelitelja većeg od 1.
Odredimo potom najmanji broj klika potrebnih za pokrivanje bridova od G.

Rješenje: Graf G lako je nacrtati.

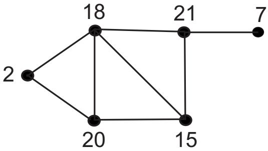


Svakom elementu a skupa A pridružiti ćemo skup X_a koji se sastoji od svih prostih djelitelja tog broja (ne računamo 1).
Imamo slijedeću familiju skupova: $X_2 = \{2\}$, $X_7 = \{7\}$, $X_{15} = \{3, 5\}$, $X_{18} = \{2, 3\}$, $X_{20} = \{2, 5\}$, $X_{21} = \{3, 7\}$.
Uočimo da postoji bijektivna korespodencija između ove familije i skupa vrhova od G, štoviše G je graf presjeka za danu familiju.

7 Reprezentacija grafova skupovima

Primjer 7.10 Zadan je skup $A = \{2, 7, 15, 18, 20, 21\}$. Pridružimo mu graf G tako da $V(G) = A$ i $\forall a, b \in A$, $a \neq b$ vrijedi $ab \in E(G)$ ako i samo ako a i b imaju barem jednog zajedničkog djelitelja većeg od 1.
Odredimo potom najmanji broj klika potrebnih za pokrivanje bridova od G.

Rješenje: Graf G lako je nacrtati.



Neka je $\mathcal{U} = \cup_{a \in A} X_a = \{2, 3, 5, 7\}$. Slijedi $|\mathcal{U}| = 4$. Sada za svaki element x iz $\mathcal{U}$ promotrimo sve skupove X_b koji sadrže x. Očito je da podskup vrhova grafa G kojemu su pridruženi takvi skupovi čini jednu kliku u G. Broj klika jednak je broju elemenata od $\mathcal{U}$, tj. iznosi 4.

7 Reprezentacija grafova skupovima

Primjer 7.10 Zadan je skup $A = \{2, 7, 15, 18, 20, 21\}$. Pridružimo mu graf G tako da $V(G) = A$ i $\forall a, b \in A$, $a \neq b$ vrijedi $ab \in E(G)$ ako i samo ako a i b imaju barem jednog zajedničkog djelitelja većeg od 1.
Odredimo potom najmanji broj klika potrebnih za pokrivanje bridova od G.

Rješenje: