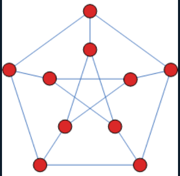


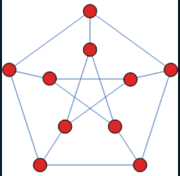
M011
Grafovi

Tema: Predavanje 6

12.11.2018

predavač: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

asistent: —||—



M011
Grafovi

Tema: Grafovi

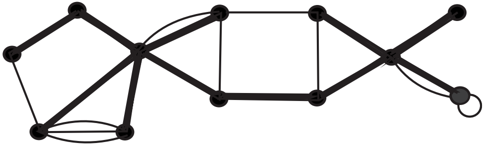
Zimski semestar ak.god. 2018/2019.

10 Razapinjujuća stabla

Prisjetimo se: Razapinjujući podgraf H grafa G je podgraf od G za koji je $V(G) = V(H)$.

Definicija 10.1

Razapinjujuće stablo grafa G je razapinjujući podgraf od G koji je stablo.

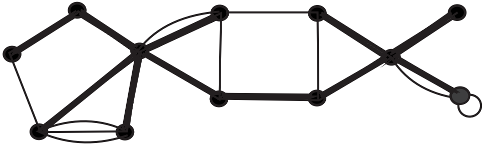


10 Razapinjujuća stabla

Prisjetimo se: Razapinjujući podgraf H grafa G je podgraf od G za koji je $V(G) = V(H)$.

Definicija 10.1

Razapinjujuće stablo grafa G je razapinjujući podgraf od G koji je stablo.



10 Razapinjujuća stabla

Propozicija 10.2

Svaki povezan graf ima razapinjujuće stablo.

Dokaz: Ako je G stablo, nemamo što dokazivati.
Pretpostavimo da G nije stablo i neka je T minimalan povezan razapinjujući podgraf od G.
To znači da vrijedi $c(T) = 1$ i $c(T - e) > 1 \; \forall e \in E(T)$.
Stoga je svaki brid u T rezni, a kako je T povezan, to je prema Korolaru 9.7 T stablo. $\square$

$\boxed{\text{NAPOMENA:}}$ Razapinjujuće stablo T grafa G možemo dobiti uklanjanjem bridova iz G koji pripadaju ciklusima sve dok ne ostanu samo mostovi.
Ako G ima n vrhova i m bridova, tada moramo ukloniti ukupno $m - (n - 1) = m - n + 1$ bridova da bismo dobili T.

10 Razapinjujuća stabla

Korolar 10.3

Ako je G povezan graf, onda je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz: Ako je G povezan, onda prema Propoziciji 10.2 sadrži razapinjujuće stablo. Prema Teoremu 9.10 imamo
$|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$. $\square$

Teorem 10.4

Neka je T razapinjujuće stablo povezanog grafa G, $e \in E(G) \setminus E(T)$. Tada $T + e$ sadrži jedinstven ciklus.

Dokaz: Kako je T aciklički, svaki ciklus od $T + e$ sadrži e. Nadalje, C je ciklus od $T + e$ ako i samo ako vrijedi da je $C - e$ put u T koji spaja krajeve od e. Prema Teoremu 9.6, takav put u T je jedinstven pa $T + e$ sadrži jedinstveni ciklus. $\square$

10 Razapinjujuća stabla

Korolar 10.3

Ako je G povezan graf, onda je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz: Ako je G povezan, onda prema Propoziciji 10.2 sadrži razapinjujuće stablo. Prema Teoremu 9.10 imamo
$|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$. □

Teorem 10.4

Neka je T razapinjujuće stablo povezanog grafa G, $e \in E(G) \setminus E(T)$. Tada $T + e$ sadrži jedinstven ciklus.

Dokaz: Kako je T aciklički, svaki ciklus od $T + e$ sadrži e. Nadalje, C je ciklus od $T + e$ ako i samo ako vrijedi da je $C - e$ put u T koji spaja krajeve od e. Prema Teoremu 9.6, takav put u T je jedinstven pa $T + e$ sadrži jedinstveni ciklus. □

10 Razapinjujuća stabla

Korolar 10.3

Ako je G povezan graf, onda je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz: Ako je G povezan, onda prema Propoziciji 10.2 sadrži razapinjujuće stablo. Prema Teoremu 9.10 imamo
$|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$. □

Teorem 10.4

Neka je T razapinjujuće stablo povezanog grafa G, $e \in E(G) \setminus E(T)$. Tada $T + e$ sadrži jedinstven ciklus.

Dokaz: Kako je T aciklički, svaki ciklus od $T + e$ sadrži e. Nadalje, C je ciklus od $T + e$ ako i samo ako vrijedi da je $C - e$ put u T koji spaja krajeve od e. Prema Teoremu 9.6, takav put u T je jedinstven pa $T + e$ sadrži jedinstveni ciklus. □

10 Razapinjujuća stabla

Korolar 10.3

Ako je G povezan graf, onda je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz: Ako je G povezan, onda prema Propoziciji 10.2 sadrži razapinjujuće stablo. Prema Teoremu 9.10 imamo
$|E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$. □

Teorem 10.4

Neka je T razapinjujuće stablo povezanog grafa G, $e \in E(G) \setminus E(T)$. Tada $T + e$ sadrži jedinstven ciklus.

Dokaz: Kako je T aciklički, svaki ciklus od $T + e$ sadrži e. Nadalje, C je ciklus od $T + e$ ako i samo ako vrijedi da je $C - e$ put u T koji spaja krajeve od e. Prema Teoremu 9.6, takav put u T je jedinstven pa $T + e$ sadrži jedinstveni ciklus. □

10 Razapinjujuća stabla

Jedan od zanimljivih problema u teoriji grafova je računanje ukupnog broja $\tau(G)$ različitih (ali ne i neizomorfnih) razapinjujućih stabala grafa G.

Pritom pomaže sljedeća rekurzija (no, prikladna je samo za manje grafove):

Teorem 10.5

Neka je e brid grafa G koji nije petlja. Tada je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Dokaz: Neka je T razapinjujuće stablo povezanog grafa G. Ako $e \notin E(T)$, onda je T razapinjujuće stablo od $G - e$.
Obratno, svako razapinjujuće stablo od $G - e$ ujedno je i razapinjujuće stablo od G koje ne sadrži e. Slijedi da je $\tau(G - e)$ jednak broju razapinjujućih stabala od G koja ne sadrže e.
Ako je T razapinjujuće stablo od G i $e \in E(T)$, onda je $T \cdot e$ razapinjujuće stablo od $G \cdot e$ pa možemo uspostaviti bijekciju između skupa svih razapinjujućih stabala od G koja sadrže e i skupa svih razapinjujućih stabala od $G \cdot e$.
Slijedi $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$. □

10 Razapinjujuća stabla

NAPOMENE:

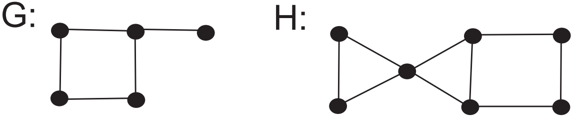
- Ako je e brid u G koji nije petlja, tada

$$|V(G \cdot e)| = |V(G)| - 1, \qquad |E(G \cdot e)| = |E(G)| - 1, \qquad c(G \cdot e) = c(G).$$

- Ako je T stablo, onda je i $T \cdot e$ stablo.

10 Razapinjujuća stabla

Primjer 10.6 Koristeći rekurziju iz Teorema 10.5, odredimo broj razapinjujućih stabala sljedećih grafova:



Rješenje: $\tau(G) = 4, \tau(H) = 33.$

10 Razapinjujuća stabla

Teorem 10.7 (Kirchhoffov matrični teorem o stablima)

Neka je G netrivijalan jednostavan graf. Tada je broj $\tau(G)$ razapinjujućih stabala od G dan formulom $\tau(G) = L_0$, pri čemu je L_0 proizvoljan kofaktor od $L(G)$.

Dokaz:

Najprije ćemo pokazati da su svi kofaktori Laplaceove matrice međusobno jednaki. Štoviše, dokazati ćemo da takva tvrdnja vrijedi za svaku kvadratnu matricu kojoj je suma svih elemenata u proizvoljnom retku ili stupcu jednaka nuli.

Zatim ćemo promotriti slučaj nepovezanog grafa, a onda dokazati teorem za proizvoljan povezan graf metodom matematičke indukcije po broju bridova, pri čemu ćemo se poslužiti Teoremom 10.5.

10 Razapinjujuća stabla

Teorem 10.7 (Kirchhoffov matrični teorem o stablima)

Neka je G netrivijalan jednostavan graf. Tada je broj $\tau(G)$ razapinjujućih stabala od G dan formulom $\tau(G) = L_0$, pri čemu je L_0 proizvoljan kofaktor od $L(G)$.

Dokaz:

Najprije ćemo pokazati da su svi kofaktori Laplaceove matrice međusobno jednaki. Štoviše, dokazati ćemo da takva tvrdnja vrijedi za svaku kvadratnu matricu kojoj je suma svih elemenata u proizvoljnom retku ili stupcu jednaka nuli.

Zatim ćemo promotriti slučaj nepovezanog grafa, a onda dokazati teorem za proizvoljan povezan graf metodom matematičke indukcije po broju bridova, pri čemu ćemo se poslužiti Teoremom 10.5.

10 Razapinjujuća stabla

Propozicija 10.8 Neka je A kvadratna matrica nad poljem $\mathbb{R}$ takva da joj je suma svih elemenata u proizvoljnom retku ili stupcu jednaka nuli. Tada su svi kofaktori od A međusobno jednaki.

Dokaz: Promotrimo matricu $A+J$, pri čemu je J all-one matrica, tj. matrica čiji su svi elementi jednaki jedan. Računamo determinantu $det(A+J)$ prema sljedećim koracima:
1.) svaki redak dodamo nekom fiksnom retku, npr. prvom retku $\Rightarrow$ svi elementi prvog retka su jednaki n, ostali elementi su nepromijenjeni
2.) svaki stupac dodamo nekom fiksnom stupcu, npr. prvom $\Rightarrow$ element u prvom retku i prvom stupcu jednak je n^2, svi ostali elementi prvog stupca jednaki su n, ostali elementi su nepromijenjeni
3.) izlučimo n iz prvog retka $\Rightarrow$ prvi stupac ima sve elemente n, svi elementi osim prvog u prvom retku jednaki su 1
4.) oduzmemo prvi redak od svakog preostalog retka $\Rightarrow$ element u prvom retku i prvom stupcu je n, preostali elementi prvog stupca jednaki su nuli, preostali elementi prvog retka su jednaki jedan
5.) razvijemo determinantu po prvom stupcu $\Rightarrow det(A+J)=n^2A(1,1)$, $A(1,1)$-$(1,1)$-kofaktor od $A \Rightarrow A(i,j)=\frac{1}{n^2}det(A+J), i,j=1,\ldots,n.$ $\square$

10 Razapinjujuća stabla

Propozicija 10.8 Neka je A kvadratna matrica nad poljem $\mathbb{R}$ takva da joj je suma svih elemenata u proizvoljnom retku ili stupcu jednaka nuli. Tada su svi kofaktori od A međusobno jednaki.

Dokaz: Promotrimo matricu $A + J$, pri čemu je J all-one matrica, tj. matrica čiji su svi elementi jednaki jedan. Računamo determinantu $det(A + J)$ prema sljedećim koracima:
1.) svaki redak dodamo nekom fiksnom retku, npr. prvom retku $\Rightarrow$ svi elementi prvog retka su jednaki n, ostali elementi su nepromijenjeni
2.) svaki stupac dodamo nekom fiksnom stupcu, npr. prvom $\Rightarrow$ element u prvom retku i prvom stupcu jednak je n^2, svi ostali elementi prvog stupca jednaki su n, ostali elementi su nepromijenjeni
3.) izlučimo n iz prvog retka $\Rightarrow$ prvi stupac ima sve elemente n, svi elementi osim prvog u prvom retku jednaki su 1
4.) oduzmemo prvi redak od svakog preostalog retka $\Rightarrow$ element u prvom retku i prvom stupcu je n, preostali elementi prvog stupca jednaki su nuli, preostali elementi prvog retka su jednaki jedan
5.) razvijemo determinantu po prvom stupcu $\Rightarrow det(A + J) = n^2 A(1, 1)$, $A(1, 1)$-$(1, 1)$-kofaktor od $A \Rightarrow A(i, j) = \frac{1}{n^2} det(A + J), i, j = 1, \dots, n.$ $\square$

10 Razapinjujuća stabla

Nastavljamo s dokazom glavnog teorema. Neka je G jednostavan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ i neka je $|E(G)| = m$.

1° Graf G je nepovezan. Dokazat ćemo da je u tom slučaju $L_0 = 0$.
Neka se G sastoji od c komponenata povezanosti H_i i $|V(H_i)| = n_i$, $i = 1, \ldots, c$, $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$. Laplaceova matrica grafa G može se particionirati na blokove:

$$L(G) = \begin{bmatrix} L(H_1) & O_{n_1\times n_2} & O_{n_1\times n_3} & \ldots & O_{n_1\times n_{c-1}} & O_{n_1\times n_c} \\ O_{n_2\times n_1} & L(H_2) & O_{n_2\times n_3} & \ldots & O_{n_2\times n_{c-1}} & O_{n_2\times n_c} \\ O_{n_3\times n_1} & O_{n_3\times n_2} & L(H_3) & \ldots & O_{n_3\times n_{c-1}} & O_{n_3\times n_c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & O & O \\ O_{n_{c-1}\times n_1} & O_{n_{c-1}\times n_2} & O_{n_{c-1}\times n_3} & \ldots & L(H_{c-1}) & O_{n_{c-1}\times n_c} \\ O_{n_c\times n_1} & O_{n_c\times n_2} & O_{n_c\times n_3} & \ldots & O_{n_c\times n_4} & L(H_c) \end{bmatrix},$$

gdje je $O_{n_i\times n_j}$ nul-matrica tipa $n_i \times n_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, c$.
Kofaktor $L(G)(n, n)$ jednak je nuli: ako dodamo prvom retku slijedećih $n_1 - 1$ redaka, dobit ćemo determinantu kojoj su elementi prvog retka jednaki nuli. Prema Propoziciji 10.8 vrijedi $L_0 = 0$.

10 Razapinjujuća stabla

2° Graf G je povezan. Vrijedi $m \geq n-1$. Dokažimo tvrdnju teorema indukcijom po m.
BAZA INDUKCIJE: $m=1$. Tada $n=2$ i $G \cong P_2$ pa je G stablo. Proizvoljan kofaktor od $L(P_2)$ jednak je 1, što i jest ukupan broj razapinjujućih stabala stabla P_2.
PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljan graf s najviše $m-1$ bridova.
KORAK INDUKCIJE: Dokažimo tvrdnju za proizvoljan graf G s m bridova.
Neka je $e=\{i,j\}$ brid u G i BSO neka $i>j$. Definiramo matricu E reda n za koju vrijedi $E_{ij}=E_{ji}=-1$, $E_{ii}=E_{jj}=1$, a svi ostali elementi su jednaki nuli. Vrijedi

$$L(G)=L(G-e)+E.$$

Brisanjem i-tog retka i i-tog stupca u sve tri matrice daje

$$L(G)_{|\{i,i\}}=L(G-e)_{|\{i,i\}}+E[j], \tag{1}$$

gdje je $E[j]$ matrica čiji su svi elementi osim $E_{jj}=1$ jednaki nuli.

10 Razapinjujuća stabla

Za proizvoljnu kvadratnu matricu M vrijedi sljedeći identitet:

$$det(M + E[i]) = det(M) + M(i,i),$$

pa ako ga primijenimo u (1), dobivamo:

$$det(L(G)_{|\{i,i\}}) = det(L(G-e)_{|\{i,i\}}) + det\left(L(G-e)_{|\{i,i\}_{|\{j,j\}}}\right).$$

Matrica $L(G-e)_{|\{i,i\}_{|\{j,j\}}}$ nastala je od $L(G-e)$ izbacivanjem i-tog i j-tog retka te i-tog i j-tog stupca. No, istu matricu dobivamo brisanjem istih redaka i stupaca iz $L(G)$, odnosno, brisanjem onog retka i onog stupca koji odgovaraju vrhu nastalom identifikacijom vrhova i i j pri kontrakciji brida $e = \{i,j\}$ iz G:

$$L(G-e)_{|\{i,i\}_{|\{j,j\}}} = L(G \cdot e)_{|\{\bar{ij},\bar{ij}\}}.$$

Obzirom da grafovi $G-e$ i $G \cdot e$ imaju manje bridova od G, za njih vrijedi pretpostavka indukcije, tj. vrijedi

$$det(L(G-e)_{|\{i,i\}}) + det\left(L(G-e)_{|\{i,i\}_{|\{j,j\}}}\right) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e),$$

a prema Teoremu 10.5 desna strana gornje jednakosti jednaka je $\tau(G)$ pa imamo $det(L(G)_{|\{i,i\}}) = L(G)(i,i) = \tau(G) \Rightarrow \tau(G) = L_0$ i teorem je dokazan. □

10 Razapinjujuća stabla

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$ Kirchhoffov matrični teorem o stablima vrijedi i za multigrafove uz odgovarajuću modifikaciju Laplaceove matrice!

10 Razapinjujuća stabla

Slijedi važna posljedica Propozicije 10.8. koja daje eksplicitnu formulu za računanje broja razapinjujućih stabala nekog grafa G pomoću svojstvenih vrijednosti pridružene Laplaceove matrice:

Korolar 10.9

Neka je $L(G)$ Laplaceova matrica nekog grafa G s n vrhova. Vrijedi

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\prod_{i=2}^{n}\lambda_i,$$

gdje su λ_i sve svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice različite od nule.

Dokaz: Prema Teoremu 10.7 i Propoziciji 10.8 i vrijedi

$$\tau(G) = L(G)(i,j) = \frac{1}{n^2}det(L(G)+J).$$

Ostaje dokazati da $det(L(G)+J) = n\prod_{i=2}^{n}\lambda_i$, pri čemu je $\lambda_1 = 0$.

10 Razapinjujuća stabla

Za dokazivanje tvrdnje $det(L(G)+J)=n\prod_{i=2}^{n}\lambda_i$ koristiti ćemo rezultat o svojstvenim vrijednostima rang-jedan modifikacije proizvoljne realne simetrične matrice:

Lema 10.10 Neka je A realna simetrična matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Neka je v svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_k, $k\in\{1,\ldots,n\}$ i neka je $q\in\mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor. Svojstvene vrijednosti matrice $A+vq^\tau$ su $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1},\lambda_k+v^\tau q,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n$. □

Ako primijenimo ovu lemu na Laplaceovu matricu $L(G)$ i svojstvenu vrijednost $\lambda=0$ sa pridruženim svojstvenim vektorom $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)^\tau$, onda uz $q^\tau=(1,\ldots,1)$ vrijedi $L(G)+\mathbf{1}\mathbf{1}^\tau=L(G)+J$ pa su svojstvene vrijednosti od $L(G)+J$ brojevi $n,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Slijedi $det(L(G)+J)=n\prod_{i=2}^{n}\lambda_i$. □

10 Razapinjujuća stabla

Valja prebrojati i sva različita stabla sa označenim vrhovima i pripadnim nizom stupnjeva:

Propozicija 10.11

Neka je zadan skup $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ te prirodni brojevi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Tada je ukupan broj stabala sa skupom vrhova V i nizom stupnjeva $(d_1, \ldots, d_n)$, $d_i = d(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jednak

$$\frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!}.$$

Dokaz: Indukcijom po n. Za $n = 1, 2$ trivijalno!
Jer je suma $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 < 2n$, postoji i takav da $d_i = 1$. Neka je $d_n = 1$.
Uklonimo vrh v_n. U svakom takvom stablu vrh v_n je (bio) spojen s nekim vrhom v_j, $1 \leq j \leq n-1$, pa odstranjivanje v_n rezultira novim stablom sa vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ čiji su stupnjevi redom $d_1, \ldots, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}$.

10 Razapinjujuća stabla

Dokaz: Obratno, ako imamo neko stablo na skupu vrhova $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ sa stupnjevima redom $d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}$, tada spajajući v_j s v_n dobijemo stablo na skupu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sa stupnjevima $d_1, \ldots, d_n$. Prema pretpostavci indukcije, broj stabala na $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ sa stupnjevima $d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}$ jednak je

$$\frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\cdots(d_{j-1}-1)!(d_j-2)!(d_{j+1}-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} = \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

jer smo uzeli $d_n = 1$.

10 Razapinjujuća stabla

Dokaz: Ukupan broj stabala na $v_1, \ldots, v_n$ sa stupnjevima $d_1, \ldots, d_n$ jednak je (varirajući s kime je spojen vrh v_n):

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(d_j - 1)(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) \right) \frac{(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!} = \frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}$$

i tvrdnja je dokazana. □

10 Razapinjujuća stabla

Primijetimo da je broj svih različitih stabala s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jednak broju svih različitih razapinjujućih stabala potpunog grafa K_n sa istim skupom vrhova.

Teorem 10.12 (Cayleyeva formula, 1889.)

Broj svih stabala s n vrhova jednak je n^{n-2}.

Dokaz: Dokaz možemo provesti na nekoliko načina. Neki od njih:

1.) Koristeći Propoziciju 10.11

2.) Koristeći Korolar 10.9

Mi ćemo teorem dokazati na način 1.)

10 Razapinjujuća stabla

Teorem 10.12 (Cayleyeva formula, 1889.)

Broj svih stabala s n vrhova jednak je n^{n-2}.

Dokaz: Prema Propoziciji 10.11 broj svih stabala s n vrhova jednak je

$$\sum_{d_1,\ldots,d_n\geq 1, d_1+\ldots+d_n=2n-2} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!} = \sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 0, k_1+\cdots+k_n=n-2} \frac{(n-2)!}{k_1!\cdots k_n!}$$

$$= (\text{ prema multinomnom teoremu }) = (1+\ldots+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

2.) Dovoljno je izračunati jedan kofaktor Laplaceove matrice potpunog grafa K_n.

11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

U praksi se pojavljuje neizostavan problem kojeg zovemo problem spajanja.

Primjerice, želimo izgraditi cestovnu mrežu između fiksnog broja gradova na način da minimiziramo troškove gradnje.

Jezikom teorije grafova to znači da želimo odrediti optimalan razapinjujući podgraf zadanog težinskog grafa s n vrhova.

Takav podgraf će očito biti razapinjujuće stablo jer bi u suprotnom brisanjem bilo kojeg vrha koji nije rezni smanjili ukupnu težinu podgrafa.

Dakle, tražimo razapinjujuće stablo minimalne težine u težinskom grafu G. Takvo stablo zovemo optimalno stablo.

Obzirom da su u praksi težine zapravo troškovi, uzimamo u obzir težinsku funkciju: $\alpha : E(G) \to \mathbb{R}^+$.

11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

- Pretpostavimo najprije da $\alpha(e) = 1 \; \forall e \in E(G)$.
  Tada je optimalno stablo razapinjujuće stablo od G s najmanjim brojem bridova.
  No, svako razapinjujuće stablo ima isti broj bridova pa je svako takvo stablo optimalno stablo.

◇ Za konstrukciju proizvoljnog razapinjujućeg stabla koristimo sljedeći algoritam:
1.) Odaberemo brid e_1 koji nije petlja;
2.) Ako su bridovi $e_1, \ldots, e_i$ već odabrani, odaberimo $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$ tako da je $G\left[\{e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\}\right]$ acikličan;
3.) Kraj ako se korak 2.) više ne može provesti.

Algoritam je dobar, tj. za rezultat daje maksimalan acikličan podgraf povezanog grafa, a to je razapinjujuće stablo.

11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

- 1956. Joseph Kruskal proširuje algoritam tako da vrijedi za grafove s proizvoljno zadanim težinama bridova.

◇ Za konstrukciju optimalnog stabla koristimo tzv. Kruskalov algoritam:
1.) Odaberemo brid e_1 minimalne težine koji nije petlja ;
2.) Ako su bridovi $e_1, \ldots, e_i$ već odabrani, odaberimo $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$ tako da vrijedi:
(i) $G\left[\{e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\}\right]$ acikličan;
(ii) $\alpha(e_{i+1})$ minimalan pod uvjetom (i);
3.) Kraj ako se korak 2.) više ne može provesti.

Može se pokazati da je složenost ovog (pohlepnog) algoritma $\mathcal{O}(E \log V)$.

Odmah je vidljivo da algoritam za rezultat daje maksimalan acikličan podgraf povezanog grafa, a to je razapinjujuće stablo.

No, je li takvo stablo zaista optimalno?

11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

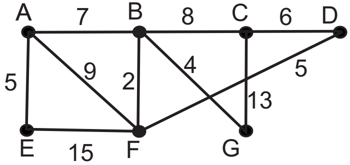
Teorem 11.1

Svako razapinjujuće stablo $T^* = G\left[\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}\right]$ dobiveno Kruskalovim algoritmom je optimalno stablo.

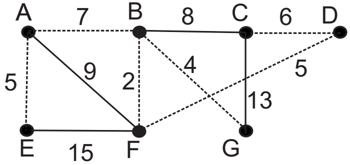
11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

Primjer 11.2

Primjenom Kruskalovog algoritma odredite minimalno razapinjujuće stablo grafa G:



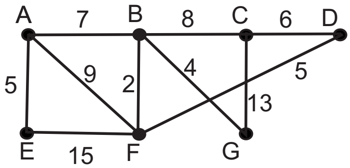
Rješenje:



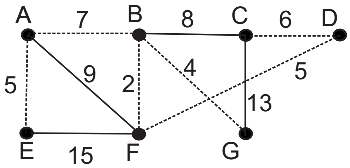
11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

Primjer 11.2

Primjenom Kruskalovog algoritma odredite minimalno razapinjujuće stablo grafa G:



Rješenje:



11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

- 1930. Robert C. Prim kreira (pohlepni) algoritam koji također vrijedi za grafove čije su težine bridova proizvoljno zadane.

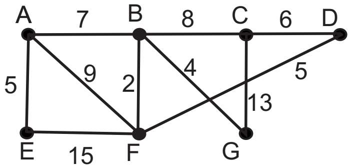
◇ G je proizvoljan neprazan povezan težinski graf sa skupom vrhova V i skupom bridova E ;
1.) Postavimo $W, Z = \emptyset$, odabremo proizvoljan vrh v i postavimo $Z = \{v\}$;
Ponavljaj sve dok ne vrijedi $Z = V$:
2.) Izaberi brid $\{u, v\}$ s minimalnom težinom tako da je u iz Z, a v nije
(ako imamo višestruke bridove sa istom težinom, biramo bilo koji od tih bridova);
Dodaj v u Z i $\{u, v\} \in W$;
Minimalno razapinjujuće stablo ima skup vrhova Z i skup bridova W.

Složenost ovog algoritma je $\mathcal{O}(E + V \log V)$.

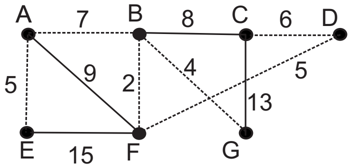
11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

Primjer 11.2

Primjenom Primovog algoritma odredite minimalno razapinjujuće stablo grafa G:



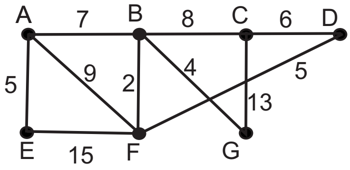
Rješenje:



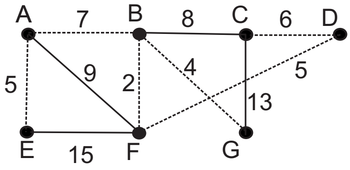
11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

Primjer 11.2

Primjenom Primovog algoritma odredite minimalno razapinjujuće stablo grafa G:



Rješenje:



11 Minimalna razapinjujuća stabla (Primov i Kruskalov algoritam)

Kruskalov i Primov algoritam jednako su učinkoviti algoritmi za određivanje minimalnog razapinjujućeg stabla!

NAPOMENA:

- Primijetimo da Dijsktrinovim algoritmom također dobivamo razapinjujuće stablo (nastalo je računanjem najkraćih puteva koji izlaze iz nekog vrha) .
  No, takvo stablo (zovemo ga još stablo najkraćih puteva) nema nikakve veze s minimalnim razapinjujućim stablom dobivenim Kruskalovim ili Primovim algoritmom.