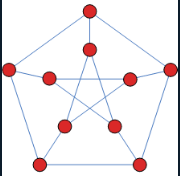


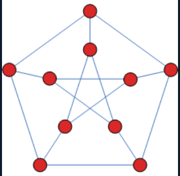
M011
Grafovi

Tema: Predavanje 7

19.11.2018

predavač: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

asistent: —||—



M011
Grafovi

Tema: Grafovi

Zimski semestar ak.god. 2018/2019.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Znamo da je graf G povezan ako između bilo koja dva vrha postoji put u G.
No, zanima nas "koliko jako" je G povezan, tj. hoće li prestati biti povezan izbacivanjem samo jednog vrha (brida) ili izbacivanjem više njih.

Sjetimo se: Vrh grafa G zovemo rezni vrh ako se njegovim izbacivanjem povećava broj komponenata povezanosti od G. Analogno se definira rezni brid (ili most) nekog grafa.

Definicija 12.1

Vršni rez (separator, separacijski skup) od G je podskup $V' \subseteq V(G)$ tako da je $G - V'$ nepovezan ili trivijalan. K-vršni rez je vršni rez s k elemenata, tj. $|V'| = k$. Slično definiramo bridni rez i k-bridni rez od G. Najmanji bridni rez zovemo vez.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Definicija 12.2

Povezanost ili vršna povezanost $\kappa(G)$ grafa G je najmanji broj vrhova čijim izbacivanjem graf prestaje biti povezan ili postaje trivijalan, tj.

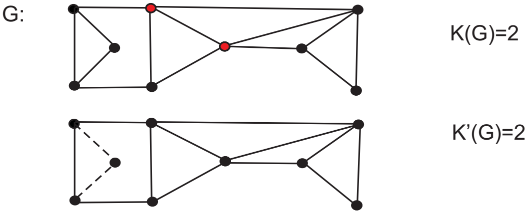
$$\kappa(G) = \min\{|V'| \,:\, V' \text{ vršni rez od } G\}.$$

Slično definiramo bridnu povezanost $\kappa'(G)$. To je najmanji broj bridova čijim izbacivanjem graf prestaje biti povezan ili postaje trivijalan, tj.

$$\kappa'(G) = \min\{|F'| \,:\, F' \text{ bridni rez od } G\}.$$

◇ Kažemo da je G k-povezan ako je $\kappa(G) \geq k$.
◇ Kažemo da je G k-bridno povezan ako je $\kappa'(G) \geq k$.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem



- Za G nepovezan imamo $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$.
- Ako je G povezan, onda je 1-povezan.
- Za svako stablo T_n s $n \geq 2$ vrhova imamo $\kappa'(T_n) = \kappa(T_n) = 1$.
- Za potpun graf vrijedi $\kappa(K_n) = \kappa'(K_n) = n - 1$.
- Ako $G \neq K_n$ i ako su u i v nesusjedni vrhovi iz G, tada uklanjanjem $n - 2$ vrhova dobivamo graf u kojem nema (u, v)-puta. Stoga $\kappa(G) \leq n - 2$.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Teorem 12.3 (Whitney (1932.))

Za proizvoljan graf G imamo $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Dokaz: Ako je G trivijalan (tj. ima samo jedan vrh), onda je $\kappa'(G) = \kappa(G) = 0$. Neka G nije trivijalan graf. Ukoliko uklonimo sve bridove incidentne s vrhom najmanjeg stupnja $\delta(G)$, dobiti ćemo nepovezan graf s barem jednim izoliranim vrhom. Slijedi $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Dokažimo prvu nejednakost.

Ako je G nepovezan, onda je $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$ i gotovi smo.

Neka je G povezan. Ako je $\kappa'(G) = 1$, onda G sadrži rezni brid e. Izbacivanjem jednog od krajeva od e, dobivamo ili nepovezan ili trivijalan graf (jer ako je e rezni brid u G, onda je G ili K_2 ili je barem jedan od krajeva od e rezni vrh.) U oba slučaja vrijedi $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

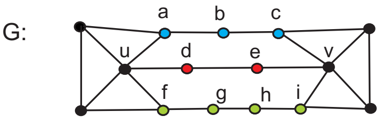
Teorem 12.3 (Whitney (1932.))

Za proizvoljan graf G imamo $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Pretpostavimo sada da je $\kappa'(G) \geq 2$. Tada odstranjivanjem $\kappa'(G)$ bridova dobivamo graf koji nije povezan, a odstranjivanjem bilo kojih $\kappa'(G) - 1$ od tih bridova dobivamo graf s najmanje jednim reznim bridom $e = uv$.
Za svaki od tih $\kappa'(G) - 1$ bridova odaberimo jedan kraj koji je različit i od u i od v. (Moguće je da za dva ili više različitih bridova odaberemo isti vrh.) Označimo sa S skup takvih vrhova.
Njihovim uklanjanjem dobivamo graf iz kojeg smo izbacili najmanje $\kappa'(G) - 1$ bridova.
Ako smo dobili nepovezan graf, onda imamo $\kappa(G) \leq |S| \leq \kappa'(G) - 1 < \kappa'(G)$.
Ako smo dobili povezan graf, onda on sadrži rezni brid e, pa izbacivanjem jednog od krajeva u i v brida $e = uv$ koji ima još susjeda, dobivamo nepovezan ili trivijalan graf pa vrijedi $\kappa(G) \leq |S| + 1 \leq \kappa'(G)$. □

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Familija puteva u G je unutarnje disjunktna ako niti jedan vrh grafa G nije unutarnji vrh više od jednog puta te familije.
Kažemo da skup $S \subseteq V(G)$ separira vrhove u i v grafa G ako u i v pripadaju različitim komponentama povezanosti od $G - S$. Skup S zovemo (u, v)-separacijski skup.



F={uabcv,udev,ufghiv}-FAMILIJA UNUTARNJE DISJUNKTNIH PUTEVA
S={b,e,g}- (u,v)-SEPARACIJSKI SKUP

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Teorem 12.4 (Mengerov teorem (1927.))

Neka je G graf s $|V(G)| \geq k+1$ vrhova. Tada vrijedi:
G je k-povezan ako i samo ako su svaka dva različita vrha od G povezana s barem k unutarnje disjunktnih puteva.

Dokaz: Najprije ćemo iskazati slabiju verziju Mengerovog teorema, a onda pomoću nje dokazati ovu (jaku) verziju.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Teorem 12.5 (Mengerov teorem (1927.))

Neka su u i v dva nesusjedna vrha u povezanom grafu G. Tada je minimalan broj vrhova koji separiraju u i v jednak maksimalnom broju unutarnje disjunktnih (u, v)-puteva.

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Dokažimo sada glavni teorem:

Teorem 12.4 (Mengerov teorem (1927.))

Neka je G graf s $|V(G)| \geq k+1$ vrhova. Tada vrijedi:
G je k-povezan ako i samo ako su svaka dva različita vrha od G povezana s barem k unutarnje disjunktnih puteva.

Dokaz: Ako su svaka dva različita vrha povezana s barem k unutarnje disjunktnih puteva, onda je jasno da $\kappa(G) \geq k$. Za drugi smjer pretpostavimo da $\kappa(G) = k$, ali da G sadrži vrhove u i v koji su povezani s najviše $k-1$ unutarnje disjunktnih puteva. Prema slabijoj verziji Mengerovog teorema, mora vrijediti $e = uv \in E(G)$. Tada su u i v povezani s najviše $k-2$ unut. disj. puteva u $G - e$ pa u i v možemo separirati u $G - e$ sa skupom S takvim da $|S| = k-2$. No, $|V(G)| > k$, jer je $\kappa(G) = k$, pa postoji $w \in V(G)$ koji nije u $S \cup \{u, v\}$. Vrh w je separiran u $G - e$ sa S od u ili od v, inače bi postojao (u, v)-put u $(G - e) \setminus S$. Neka je w separiran od u. Skup $S \cup \{v\}$ ima $k-1$ elemenata i separira u i w u G. Dobili smo kontradikciju s pretpostavkom da $\kappa(G) = k$. $\square$

12 k-povezanost i k-bridna povezanost grafa. Mengerov teorem

Iskažimo verziju Mengerova teorema s bridovima.

Teorem 12.6 (Mengerov teorem (1927.))

G je k-bridno povezan ako i samo ako su svaka dva različita vrha od G povezana s barem k bridno disjunktnih puteva.