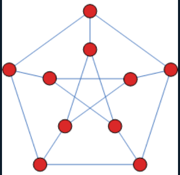


M011
Grafovi

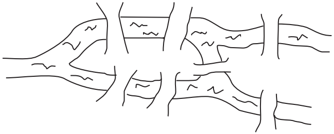
Tema: Predavanje 8

26.11.2018

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Prisjetimo se problema Königsberških mostova:

Stari pruski grad Königsberg smješten je na obalama rijeke Pregel. Dio grada smješten je na dva otoka, koji su bili povezani s kopnom i međusobno sa sedam mostova, kako je prikazano na slici.

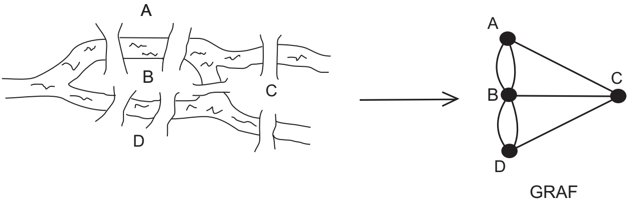


Građani su se pitali postoji li način da prošetaju gradom tako da prijeđu svaki most samo jednom.

Euler je dokazao da takav obilazak mostova NE postoji.

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Evo i pridruženog multigrafa:



Jezikom teorije grafova problem glasi:

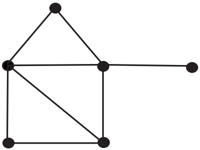
Postoji li u zadanom multigrafu staza koja sadrži sve njegove bridove? (NE)

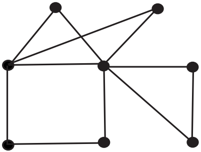
13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Definicija 13.1

Eulerova staza od G je staza koja sadrži sve bridove od G. Eulerova tura je zatvorena Eulerova staza.
Graf G je Eulerov ako sadrži Eulerovu turu.

◇ Prema definiciji staze to znači da Eulerova staza sadrži svaki brid točno jednom.
◇ Očito su grafovi koji sadrže Eulerove ture ili Eulerove staze netrivijalni povezani grafovi (jer mi ustvari želimo obići sve vrhove grafa).





13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Karakterizacija Eulerovih grafova:

Teorem 13.2

Neprazan povezan graf G je Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi od G parnog stupnja.

Dokaz:

$\Rightarrow$ Neka je G Eulerov graf i neka je C Eulerova tura na G s početkom i krajem u vrhu u.
Kada posjetimo neki vrh $v \neq u$ u C, tada moramo računati i dva brida incidentna s v.
Ako opet posjetimo vrh v, morati ćemo računati dva nova brida incidentna s v koji nisu bili ranije posjećeni.
Slijedi da svi unutarnji vrhovi Eulerove ture moraju imati paran stupanj.
Obzirom da tura počinje i završava u vrhu u, zaključujemo da je i $d(u)$ paran broj.

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Karakterizacija Eulerovih grafova:

Teorem 13.2

Neprazan povezan graf G je Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi od G parnog stupnja.

$\Leftarrow$ Neka su svi vrhovi u G parnog stupnja, G je povezan s $|E(G)| > 0$ i neka G nije Eulerov graf. Pretpostavimo da G ima najmanji broj bridova. Zbog uvjeta o parnosti stupnjeva slijedi da G sadrži neku zatvorenu stazu. (Krenemo od nekog vrha i 'ulazimo' odn. 'izlazimo' iz vrhova koristeći bridove točno jednom. Zbog parnog stupnja početnog vrha, svakako ćemo ga opet posjetiti.) Neka je C takva staza i neka je maksimalne duljine. Zbog pretpostavke slijedi da C nije Eulerova tura od G pa $G - E(C)$ ima komponentu G' sa $|E(G')| > 0$, tj. postoje bridovi u G koji nisu u C. Obzirom da se G' može dobiti uklanjanjem svih bridova iz C i pripadnih izoliranih vrhova (ukoliko postoje), slijedi da su svi vrhovi u G' također parnog stupnja. Zbog $|E(G')| < |E(G)|$ zaključujemo da G' ima Eulerovu turu C'. Zbog povezanosti od G slijedi da postoji $v \in V(C) \cap V(C')$ i možemo ga smatrati početkom i krajem od C i C'. No, tada je CC' zatvorena staza od G s $|E(CC')| > |E(C)| \Rightarrow\Leftarrow$. $\square$

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Karakterizacija Eulerovih staza ('otvorenih' ili zatvorenih):

Korolar 13.3

Povezan graf G ima Eulerovu stazu ako i samo ako G ima najviše dva vrha neparnog stupnja.

Dokaz:
$\Rightarrow$ Prema Teoremu 13.2, ako G ima Eulerovu stazu, tada je svaki unutarnji vrh te staze parnog stupnja. Prema Lemi o rukovanju, broj vrhova neparnog stupnja je paran broj pa je u G ili 0 ili 2 vrha neparnog stupnja.
$\Leftarrow$ Neka je G netrivijalan povezan graf s najviše dva vrha neparnog stupnja.
Prema Lemi o rukovanju, u G je ili 0 ili 2 vrha neparnog stupnja. Ako u G nema takvih vrhova, onda prema Teoremu 13.2 G ima zatvorenu Eulerovu stazu. Ako su u G dva takva vrha, u i v, onda uz oznaku $e = uv$, svaki vrh od $G + e$ je parnog stupnja pa prema Teoremu 13.2 $G + e$ ima Eulerovu turu $C = v_0 e_1 v_1 \dots e_{|E(G)|+1} v_{|E(G)|+1}$, gdje je $e_1 = e$, $v_0 = u$, $v_1 = v$, a $v_0 = v_{|E(G)|+1}$.
Slijedi da je staza $v_1 e_2 v_2 \dots e_{|E(G)|+1} v_{|E(G)|+1}$ Eulerova staza od G. $\square$

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

NAPOMENE:

- Ako graf ima Eulerovu stazu koja nije zatvorena, onda G sadrži točno dva vrha neparnog stupnja!
- Ako povezan graf G sadrži točno dva vrha neparnog stupnja, onda G ima Eulerovu stazu koja nije zatvorena!
- Ako Eulerovom grafu G uklonimo brid e, tada $G - e$ sadrži 'otvorenu' Eulerovu stazu!

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Definicija 13.4

Hamiltonov put na G je put koji sadrži sve vrhove. Hamiltonov ciklus na G je ciklus na G koji sadrži sve vrhove od G. Graf G je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov ciklus.

W.R. Hamilton 1856. razmatra tzv. problem trgovačkog putnika:

- Trgovački putnik treba obići neke gradove i vratiti se na mjesto polaska tako da tijekom putovanja kroz svaki grad prođe samo jednom (pa onda i svakom cestom najviše jednom).

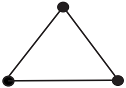
NAPOMENE:

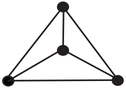
- Za razliku od Eulerovih grafova, ne postoji karakterizacija Hamiltonovih grafova.
- Problem određivanja Hamiltonova puta ili ciklusa u nekom grafu je NP-potpun problem.
- Eulerovi i Hamiltonovi grafovi nisu u direktnoj vezi, tj. postoje grafovi koji su i jedno i drugo, koji su jedno, a nisu drugo ili nisu ni jedno ni drugo.

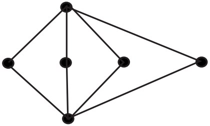
13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

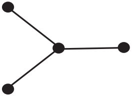
Primjer 13.5

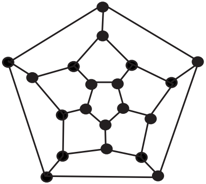
Koji su grafovi Eulerovi, a koji Hamiltonovi?



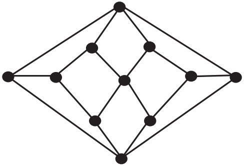




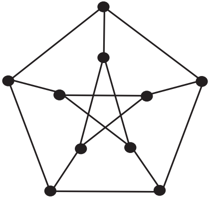




DODEKAEDAR



HERSCHELOV GRAF



13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Nužan uvjet za egzistenciju Hamiltonova ciklusa u grafu glasi:

Lema 13.6

Ako je G Hamiltonov, onda za svaki neprazan skup $S \subseteq V(G)$ vrijedi

$$c(G-S) \leq |S|.$$

Dokaz:

Neka je $C = u_1 e_1 u_2 e_2 \ldots e_n u_n$ Hamiltonov ciklus u G . Neka $G - S$ ima točno k komponenata povezanosti G_i, $i = 1, \ldots, k$.
Slučaj $k = 1$ je trivijalan jer to znači da $c(G-S) = 1 \leq |S|$, obzirom da je S neprazan.
Pretpostavimo $k > 1$. Neka je u_i posljednji vrh u C koji pripada G_i i neka je v_i slijedeći vrh koji slijedi u C, tj. ili je $v_i = u_{i+1}$ za $i < n$ ili je $v_i = u_1$ za $i = n$. Tada je $v_i \in S$ $\forall i = 1, \ldots, k$, zbog izbora u_i, i $v_j \neq v_t$ $\forall j \neq t$ jer je C ciklus i $u_i v_i \in E(G)$ $\forall i$.
Slijedi $|S| \geq k$. $\square$

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Obrat Leme 13.6. ne vrijedi.

Primjer grafa za kojeg vrijedi tvrdnja Leme 13.6 je Petersenov graf, no, on nije Hamiltonov.

Postoje grafovi koji su 'skoro Hamiltonovi'.

◇ Za povezan graf kažemo da je Hipohamiltonov ako nije Hamiltonov, ali izbacivanjem proizvoljnog vrha dobivamo graf koji sadrži Hamiltonov ciklus.

Petersenov graf je Hipohamiltonov! Štoviše, on je najmanji Hipohamiltonov graf.

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Korolar 13.7

Svaki Hamiltonov graf je 2-povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je G Hamiltonov graf i da nije 2-povezan. Slijedi $\kappa(G) = 1$, tj. graf sadrži rezni vrh x.
To znači da postoje vrhovi $u \neq v$, $u \neq x$ i $v \neq x$ koji se nalaze u različitim komponentama povezanosti grafa $G - x$.
Neka je $C = c_1 c_2 \ldots c_n c_1$ Hamiltonov ciklus u G. Tada se vrhovi u i v moraju pojaviti u tom ciklusu, npr. u se pojavljuje prije v, tj. $C = c_1 \ldots u \ldots v \ldots c_n c_1$. Između vrhova u i v mora biti x jer x pripada svakom (u, v)-putu u G.
No, i $v \ldots c_n c_1 \ldots u$ je jedan (u, v)-put koji također mora sadržavati x. Stoga se x u C pojavljuje više od jednog puta, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da je C Hamiltonov ciklus. $\square$

NAPOMENA:

- Hamiltonov graf je ujedno i 2-bridno povezan jer kada bi u takvom grafu postojao most, onda bi jedan njegov kraj morao biti rezni vrh (osim u slučaju K_2 koji ionako nije Hamiltonov), a pokazali smo da Hamiltonov graf nema reznih vrhova.

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Teorem 13.8 (Ore, 1962.)

Neka je G jednostavan graf. Pretpostavimo da postoje nesusjedni vrhovi $u, v \in V(G)$ takvi da vrijedi $d(u) + d(v) \geq n = |V(G)|$. Graf G je Hamiltonov ako i samo ako je $G + uv$ Hamiltonov.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ako je G Hamiltonov, tada postoji ciklus u G koji sadrži sve vrhove iz G. Stoga je i $G + uv$ Hamiltonov za neki par nesusjednih vrhova $u, v \in V(G)$.
$\Leftarrow$ Neka $G + uv$ sadrži Hamiltonov ciklus C. Ako C ne sadrži brid $e = uv$, tada je C Hamiltonov ciklus i u G.
Neka C sadrži brid e. Možemo pretpostaviti da C počinje i završava u vrhu u. No, jer su u i v spojeni, imamo $u = v_1 v_2 v_3 \ldots v_n = v$ Hamiltonov put u G.
No, tada postoji $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ tako da je $uv_i \in E(G)$ i $v_{i-1}v \in E(G)$. (Ovo se lako može dokazati kontradikcijom: ako za svaki $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ vrijedi da $uv_i \notin E(G)$ ili $v_{i-1}v \notin E(G)$, tada bismo imali $d_G(u) + d_G(v) < n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom.)
Sada možemo konstruirati Hamiltonov ciklus u G:
$u = v_1 v_2 \ldots v_{i-1} v_n v_{n-1} v_{n-2} \ldots v_i v_1 = u.$ □

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Za očekivati je da grafovi s većim minimalnim stupnjem sadrže izvjesne podgrafove, pa tako i Hamiltonov ciklus.

Teorem 13.9 (G. Dirac, 1952.)

Neka je G jednostavan graf s $|V(G)| \geq 3$ i $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{2}$. Tada je G Hamiltonov.

Dokaz: Neka je G maksimalan jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova koji ispunjava uvjete teorema, a nije Hamiltonov. Vrijedi da G nije potpun jer svaki potpun graf s najmanje tri vrha je Hamiltonov.
Neka su u i v nesusjedni vrhovi u G. Tada, zbog izbora grafa G, graf $G + uv$ je Hamiltonov. No, jer G nije Hamiltonov, svaki Hamiltonov ciklus od $G + uv$ sadrži brid uv. Slijedi da postoji Hamiltonov put s početkom u vrhu u i krajem u vrhu v. No, imamo $d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ pa smo u uvjetima Teorema 13.8. Slijedi da je G Hamiltonov graf, što je u kontradikciji s pretpostavkom da G nije Hamiltonov. $\square$

14 Zatvarač

Definicija 14.1

Za zadani graf G definiramo niz G_0, G_1,..., G_k grafova tako da $G_0 = G$ i $G_{i+1} = G_i + uv$, pri čemu vrijedi $uv \notin E(G_i)$ i $d_{G_i}(u) + d_{G_i}(v) \geq |V(G)|$.
Posljednji član niza je G_k za koji vrijedi: $\forall u, v \in V(G_k)$ ili $uv \in E(G_k)$ (tj. G_k je potpun) ili $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) < |V(G)|$.
Za G_k kažemo da je zatvarač od G i pišemo $G_k = cl(G)$.

- Iako konstrukcija zatvarača nije jedinstvena, tj. u nekom koraku imamo više kandidata -parova vrhova za konstrukciju novog člana niza, može se pokazati da je konačan rezultat, tj. $cl(G)$ jedinstveno određen za sve grafove s 3 ili više vrhova.

14 Zatvarač

Teorem 14.2

Neka je G povezan graf s najmanje 3 vrha. Tada vrijedi:
(i) G je Hamiltonov ako i samo ako je njegov zatvarač $cl(G)$ Hamiltonov.
(ii) Ako je $cl(G)$ potpun graf, tada je G Hamiltonov.

Dokaz: (i)
$\Rightarrow$ Vrijedi $G \subseteq cl(G)$ pa je G razapinjujući podgraf od $cl(G)$, pa ako je G Hamiltonov, onda mora biti i $cl(G)$ Hamiltonov graf.
$\Leftarrow$ Neka je $G_0, G_1, \ldots, G_k = cl(G)$ niz grafova u konstrukciji zatvarača od G. Ako je $cl(G)$ Hamiltonov, tada su i grafovi $G_{k-1}, \ldots, G_0$ Hamiltonovi prema Teoremu 13.7 (Ore).
(ii) Tvrdnja slijedi iz (i) jer je svaki potpun graf s najmanje 3 vrha Hamiltonov. $\square$

NAPOMENA:

- Svaki povezan graf G s najmanje 3 vrha u kojemu svaki par nesusjednih vrhova u i v ispunjava svojstvo $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$ je Hamiltonov graf (jer je zatvarač takvog grafa potpun graf).