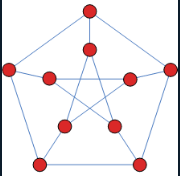


M011 Grafovi

Tema: Predavanje 5

05.11.2018

predavač: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

asistent: —||—

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Definicija 8.1

Težinski graf G^α je graf G čijim su bridovima pridruženi neki realni brojevi, tj. postoji težinska funkcija $\alpha : E(G) \to \mathbb{R}$ pri čemu broj $\alpha(e)$ zovemo težinom brida $e \in E(G)$.

Za podgraf H grafa G^α definiramo broj

$$\alpha(H) := \sum_{e \in E(H)} \alpha(e)$$

i zovemo ga težina od H.

Ako promotrimo sve (u, v)-putove u G^α, $u, v \in V(G^\alpha)$, tada broj

$$d_{G^\alpha}(u, v) = min\{\alpha(P) : \text{ P je put od vrha } u \text{ do vrha } v\ \}$$

zovemo minimalna težinska udaljenost između vrhova u i v.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Definicija 8.1

Težinski graf G^α je graf G čijim su bridovima pridruženi neki realni brojevi, tj. postoji težinska funkcija $\alpha : E(G) \to \mathbb{R}$ pri čemu broj $\alpha(e)$ zovemo težinom brida $e \in E(G)$.

Za podgraf H grafa G^α definiramo broj

$$\alpha(H) := \sum_{e \in E(H)} \alpha(e)$$

i zovemo ga težina od H.

Ako promotrimo sve (u, v)-putove u G^α, $u, v \in V(G^\alpha)$, tada broj

$$d_{G^\alpha}(u, v) = min\{\alpha(P) : \text{ P je put od vrha } u \text{ do vrha } v\ \}$$

zovemo minimalna težinska udaljenost između vrhova u i v.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Česti problemi s težinskim grafovima vezani su za pronalazak podgrafa određenog tipa koji ima najveću ili najmanju težinu.

Npr. u cestovnoj mreži kojom su povezani neki gradovi, potrebno je odrediti "najkraći put" (minimalnu težinsku udaljenost) između neka dva grada. U tom slučaju težine bridova su duljine cesta između izravno povezanih gradova.

NAPOMENE:

- Težine možemo pridružiti i vrhovima nekog grafa. Npr. težina vrha u grafu može biti stupanj tog vrha ili pak suma težina svih bridova incidentnih s tim vrhom.
- Matrica susjedstva težinskog grafa na poziciji (i, j) ima težinu brida koji spaja vrhove i i j umjesto broja bridova između tih vrhova.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Problem najkraćeg puta: Zadan je povezan graf G^α sa težinskom funkcijom $\alpha : E(G) \to [0, +\infty)$. Treba odrediti $d_{G^\alpha}(u, v)$, tj. minimalnu težinsku udaljenost između vrhova u i v u grafu G^α. (Možemo se ograničiti na jednostavne neusmjerene grafove.)

PRIMJER:

Problem trgovačkog putnika (Traveling Salesman Problem, TSP)

- NP-teški problem diskretne i kombinatorne optimizacije iz 1932. godine
- složenost: O(n!)

OPIS PROBLEMA: Trgovački putnik poznaje određene gradove i sve međusobne udaljenosti među njima, a zadatak mu je krenuti iz nekog odabranog grada tako da posjeti svaki od preostalih gradova točno jednom i vratiti se u početni grad. Kojim bi redoslijedom trgovački putnik morao obilaziti gradove, a da ukupna duljina puta bude minimalna?

Probleme najkraćeg puta rješava tzv. Dijkstrinov algoritam (E.Dijkstra, 1959): od nekog vrha v do svih ostalih (minimalno razapinjujuće stablo s korijenom v)

Dogovorno stavljamo $\alpha(uv) = \infty$ ako $uv \notin E(G)$.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Dijkstrinov algoritam:

- Postavi $u_0 = u$, $t(u_0) = 0$ i $t(v) = \infty$ za sve $v \neq u_0$, $S_0 = \{u_0\}$, $i = 0$.
  (u_0 je inicijalni vrh, $t(v)$ je najkraća udaljenost između v i inicijalnog vrha u_0, S_i skup vrhova iz G takav da su na kraju i-tog koraka poznati najkraći putevi od vrha u_0 do svakog vrha iz S_i.)
- Za svaki vrh v iz S_i^c, zamijeni $t(v)$ sa $min\{t(v), t(u_i) + \alpha(u_i v)\}$. Izračunaj $min\{t(v) : v \in S_i^c\}$ i neka je u_{i+1} vrh u kojem se postiže taj minimum. Stavimo $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
  (Za svaki vrh koji nije ranije uzet u obzir, dakle, iz komplementa je od S_i, treba odrediti minimum od $t(v)$ i sume najkraćeg puta od u_0 do u_i i težine brida $u_i v$. Zatim treba izabrati najmanji takav $t(v)$ i vrh u kojem se postiže taj minimum. Proširimo skup S_i novim vrhom i definiramo S_{i+1}.)
- Ako je $i = |V(G)| - 1$, stani; ako je $i < |V(G)| - 1$, zamijeni i s $i + 1$ i vrati se na drugi korak.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Algoritam daje informaciju o duljini najkraćih putova (ali ne daje informaciju koji su to najkraći putevi) od vrha u_0 do svih ostalih vrhova grafa G.
Udaljenost od u_0 do nekog konkretnog vrha v je $t(v)$.

Složenost Dijkstrinog algoritma: Uzmimo graf s n vrhova. Počinjemo sa 0.tom iteracijom. Na kraju i-te iteracije imamo $n-i-1$ zbrajanja pa je ukupno

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$ zbrajanja.

Na kraju i-te iteracije imamo $2(n-i-1)$ usporedbi, najprije se za neki vrh $v \in S_i^c$ uspoređuju $t(v)$ i $t(u_i)+\alpha(u_i v)$ i novi rezultat je $t(v)$, a zatim se odmah nakon slijedeće usporedbe, za neki drugi vrh w iz S_i^c rezultat $t(w)$ uspoređuje s $t(v)$.
Slijedi da imamo $n(n-1)$ usporedbi. Treba nam još ukupno $(n-1)^2$ usporedbi za odluku je li neki vrh iz S_i^c ili ne.

Ukupno imamo približno $5n^2/2$ računskih operacija pa je složenost algoritma kvadratna, odnosno $\mathcal{O}(n^2)$.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Algoritam daje informaciju o duljini najkraćih putova (ali ne daje informaciju koji su to najkraći putevi) od vrha u_0 do svih ostalih vrhova grafa G.
Udaljenost od u_0 do nekog konkretnog vrha v je $t(v)$.

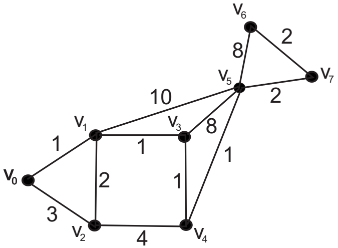
Složenost Dijkstrinog algoritma: Uzmimo graf s n vrhova. Počinjemo sa 0.tom iteracijom. Na kraju i-te iteracije imamo $n-i-1$ zbrajanja pa je ukupno
$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ zbrajanja.
Na kraju i-te iteracije imamo $2(n-i-1)$ usporedbi, najprije se za neki vrh $v\in S_i^c$ uspoređuju $t(v)$ i $t(u_i)+\alpha(u_i v)$ i novi rezultat je $t(v)$, a zatim se odmah nakon slijedeće usporedbe, za neki drugi vrh w iz S_i^c rezultat $t(w)$ uspoređuje s $t(v)$.
Slijedi da imamo $n(n-1)$ usporedbi. Treba nam još ukupno $(n-1)^2$ usporedbi za odluku je li neki vrh iz S_i^c ili ne.

Ukupno imamo približno $5n^2/2$ računskih operacija pa je složenost algoritma kvadratna, odnosno $\mathcal{O}(n^2)$.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Primjer 8.2

Dijkstrinovim algoritmom odredite duljine najkraćih putova od vrha v_0 do svih ostalih vrhova grafa kao na slici:



Rješenje: $t(v_1) = 1$, $t(v_2) = 3$, $t(v_3) = 2$, $t(v_4) = 3$, $t(v_5) = 4$, $t(v_6) = 8$, $t(v_7) = 6$.

8 Težinski grafovi. Problem najkraćeg puta. Dijkstrinov algoritam

Primjene Disjktrinovog algoritma:

Google Maps, Mapquest –upute za vožnju

Poboljšanja:

- Bellman - Ford algoritam (1956): težine mogu biti negativne (sporiji od Dijsktre)
- Floyd - Warshall algoritam (1962): težine mogu biti negativne (ali nema negativnih ciklusa u grafu), pronalazi najkraće putove između SVIH vrhova u grafu

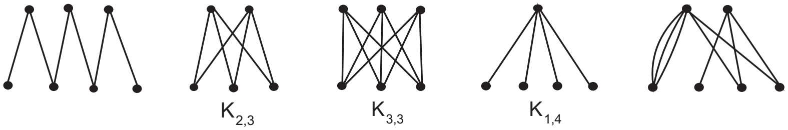
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Prisjetimo se definicije bipartitnih grafova:

Definicija 9.1

Bipartitan graf je graf čiji se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y.
Particija (X, Y) zove se biparticija grafa.

Potpun bipartitan graf jednostavan je bipartitan graf s particijom (X, Y) u kojem je svaki vrh u X spojen sa svakim vrhom u Y. Uz $|X| = m$ i $|Y| = n$, oznaka takvog grafa je $K_{m,n}$.



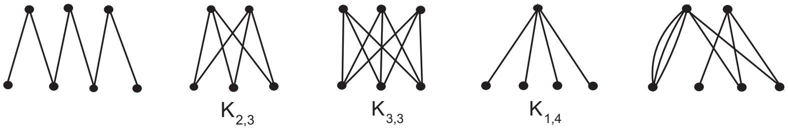
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Prisjetimo se definicije bipartitnih grafova:

Definicija 9.1

Bipartitan graf je graf čiji se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y.
Particija (X, Y) zove se biparticija grafa.

Potpun bipartitan graf jednostavan je bipartitan graf s particijom (X, Y) u kojem je svaki vrh u X spojen sa svakim vrhom u Y. Uz $|X| = m$ i $|Y| = n$, oznaka takvog grafa je $K_{m,n}$.



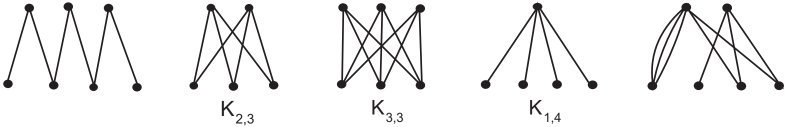
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Prisjetimo se definicije bipartitnih grafova:

Definicija 9.1

Bipartitan graf je graf čiji se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y.
Particija (X, Y) zove se biparticija grafa.

Potpun bipartitan graf jednostavan je bipartitan graf s particijom (X, Y) u kojem je svaki vrh u X spojen sa svakim vrhom u Y. Uz $|X| = m$ i $|Y| = n$, oznaka takvog grafa je $K_{m,n}$.



9 Bipartitni grafovi. Stabla

Sljedeći teorem odnosi se na karakterizaciju bipartitnih grafova:

Teorem 9.2

Graf G je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne cikluse.

Dokaz:
$\Rightarrow$ Neka je G bipartitan i neka je (X, Y) biparticija skupa vrhova $V(G)$.
Neka je zatim $C = v_0 v_1 \ldots v_k v_0$ ciklus u G.
Bez smanjenja općenitosti uzmimo $v_0 \in X$. Tada zbog $v_0 v_1 \in E(G)$ i bipartitnosti grafa G vrijedi $v_1 \in Y$.
No, sada je $v_2 \in X$, a $v_3 \in Y$...Općenito imamo da je $v_{2i} \in X$, a $v_{2i+1} \in Y$.
No, zbog $v_0 \in X$ i $v_0 v_k \in E(G)$ slijedi $v_k \in Y$. Stoga postoji neki i takav da $k = 2i + 1$, a to znači da je C paran ciklus.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da G ne sadrži neparne cikluse. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je G povezan.
Za proizvoljan $u \in V(G)$ definiramo skupove

$$X = \{x \in V(G) : d(u, x) \text{ paran }\}, \qquad Y = \{y \in V(G) : d(u, y) \text{ neparan }\}.$$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Sljedeći teorem odnosi se na karakterizaciju bipartitnih grafova:

Teorem 9.2

Graf G je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne cikluse.

Dokaz:
$\Rightarrow$ Neka je G bipartitan i neka je (X, Y) biparticija skupa vrhova $V(G)$.
Neka je zatim $C = v_0v_1 \ldots v_kv_0$ ciklus u G.
Bez smanjenja općenitosti uzmimo $v_0 \in X$. Tada zbog $v_0v_1 \in E(G)$ i bipartitnosti grafa G vrijedi $v_1 \in Y$.
No, sada je $v_2 \in X$, a $v_3 \in Y$...Općenito imamo da je $v_{2i} \in X$, a $v_{2i+1} \in Y$.
No, zbog $v_0 \in X$ i $v_0v_k \in E(G)$ slijedi $v_k \in Y$. Stoga postoji neki i takav da $k = 2i + 1$, a to znači da je C paran ciklus.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da G ne sadrži neparne cikluse. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je G povezan.
Za proizvoljan $u \in V(G)$ definiramo skupove

$$X = \{x \in V(G) : d(u, x) \text{ paran } \}, \qquad Y = \{y \in V(G) : d(u, y) \text{ neparan } \}.$$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Sljedeći teorem je karakterizacija bipartitnih grafova:

Teorem 9.2

Graf G je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne cikluse.

Dokaz:
Pokazati ćemo da je (X, Y) biparticija od G.
Neka je P najkraći (u, v)-put, a Q najkraći (u, w)-put, $v, w \in X$.
Neka je zatim u_1 posljednji zajednički vrh od P i Q (gledano u smjeru od u prema v, w).
Obzirom da su P i Q najkraći putevi, onda su i (u, u_1)-dijelovi od P i Q najkraći (u, u_1)-putevi pa imaju istu duljinu.
Jer su duljine od P i Q iste parnosti, to su i duljine od $P_1 = (u_1, v)$-dio od P i $Q_1 = (u_1, w)$-dio od Q iste parnosti.
Slijedi da (v, w)-put $P_1^{-1}Q_1$ ima parnu duljinu.
Kada bi v bio spojen bridom sa w, onda bi $P_1^{-1}Q_1v$ bio ciklus neparne duljine, a to ne može biti.
Stoga nikoja dva vrha u X nisu spojena.
Slično zaključujemo da nikoja dva vrha u Y nisu spojena bridom. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Bipartitne grafove možemo karakterizirati i pomoću nezavisnih (stabilnih) skupova.

Najprije ćemo definirati takve skupove. Evo nekoliko (ekvivalentnih) definicija nezavisnih skupova:

- Neka je G graf. Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako je $G[X]$ točkasti graf.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako za svaka dva vrha $u, v \in X$ vrijedi $uv \notin E(G)$.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako svaki brid u G ima najviše jedan vrh u X s kojim je incidentan.

Posebno su zanimljivi najveći nezavisni skupovi, tj, oni koji imaju najveći kardinalni broj.

Teorem 9.3

Graf G je bipartitan ako i samo ako postoji particija od $V(G)$ na dva nezavisna podskupa. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Bipartitne grafove možemo karakterizirati i pomoću nezavisnih (stabilnih) skupova.

Najprije ćemo definirati takve skupove. Evo nekoliko (ekvivalentnih) definicija nezavisnih skupova:

- Neka je G graf. Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako je $G[X]$ točkasti graf.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako za svaka dva vrha $u, v \in X$ vrijedi $uv \notin E(G)$.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako svaki brid u G ima najviše jedan vrh u X s kojim je incidentan.

Posebno su zanimljivi najveći nezavisni skupovi, tj, oni koji imaju najveći kardinalni broj.

Teorem 9.3

Graf G je bipartitan ako i samo ako postoji particija od $V(G)$ na dva nezavisna podskupa. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Bipartitne grafove možemo karakterizirati i pomoću nezavisnih (stabilnih) skupova.

Najprije ćemo definirati takve skupove. Evo nekoliko (ekvivalentnih) definicija nezavisnih skupova:

- Neka je G graf. Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako je $G[X]$ točkasti graf.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako za svaka dva vrha $u, v \in X$ vrijedi $uv \notin E(G)$.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako svaki brid u G ima najviše jedan vrh u X s kojim je incidentan.

Posebno su zanimljivi najveći nezavisni skupovi, tj, oni koji imaju najveći kardinalni broj.

Teorem 9.3

Graf G je bipartitan ako i samo ako postoji particija od $V(G)$ na dva nezavisna podskupa. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Bipartitne grafove možemo karakterizirati i pomoću nezavisnih (stabilnih) skupova.

Najprije ćemo definirati takve skupove. Evo nekoliko (ekvivalentnih) definicija nezavisnih skupova:

- Neka je G graf. Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako je $G[X]$ točkasti graf.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako za svaka dva vrha $u, v \in X$ vrijedi $uv \notin E(G)$.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako svaki brid u G ima najviše jedan vrh u X s kojim je incidentan.

Posebno su zanimljivi najveći nezavisni skupovi, tj, oni koji imaju najveći kardinalni broj.

Teorem 9.3

Graf G je bipartitan ako i samo ako postoji particija od $V(G)$ na dva nezavisna podskupa. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Bipartitne grafove možemo karakterizirati i pomoću nezavisnih (stabilnih) skupova.

Najprije ćemo definirati takve skupove. Evo nekoliko (ekvivalentnih) definicija nezavisnih skupova:

- Neka je G graf. Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako je $G[X]$ točkasti graf.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako za svaka dva vrha $u, v \in X$ vrijedi $uv \notin E(G)$.
- Skup $X \subseteq V(G)$ je nezavisan ako svaki brid u G ima najviše jedan vrh u X s kojim je incidentan.

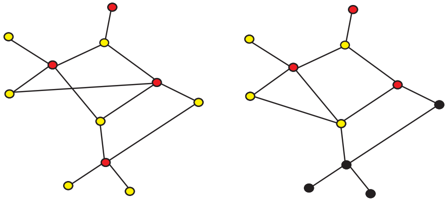
Posebno su zanimljivi najveći nezavisni skupovi, tj, oni koji imaju najveći kardinalni broj.

Teorem 9.3

Graf G je bipartitan ako i samo ako postoji particija od $V(G)$ na dva nezavisna podskupa. □

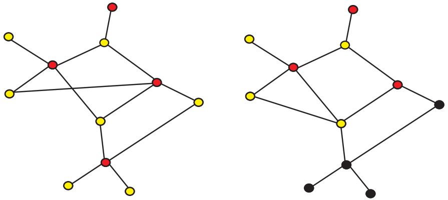
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Lako je provjeriti je li neki graf bipartitan. Dovoljno je uzeti dvije različite boje B_1 i B_2 i bojati vrhove grafa na slijedeći način:
Proizvoljno odaberemo neki vrh u grafu i obojimo ga s jednom od boja, npr. s B_1. Zatim sve njegove susjede obojimo s B_2.
Nastavljamo bojati vrhove tako da sve susjede već obojanog vrha bojimo drugom, različitom bojom. Ako uspijemo obojiti graf na način da ne postoji niti jedan par susjednih vrhova koji su obojeni istom bojom, zaključujemo da je graf bipartitan, a particija se sastoji od skupova X i Y takvih da unutar svakog skupa imamo vrhove iste boje.
U suprotnom graf nije bipartitan!



9 Bipartitni grafovi. Stabla

Lako je provjeriti je li neki graf bipartitan. Dovoljno je uzeti dvije različite boje B_1 i B_2 i bojati vrhove grafa na slijedeći način:
Proizvoljno odaberemo neki vrh u grafu i obojimo ga s jednom od boja, npr. s B_1. Zatim sve njegove susjede obojimo s B_2.
Nastavljamo bojati vrhove tako da sve susjede već obojanog vrha bojimo drugom, različitom bojom. Ako uspijemo obojiti graf na način da ne postoji niti jedan par susjednih vrhova koji su obojeni istom bojom, zaključujemo da je graf bipartitan, a particija se sastoji od skupova X i Y takvih da unutar svakog skupa imamo vrhove iste boje.
U suprotnom graf nije bipartitan!

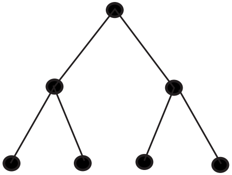


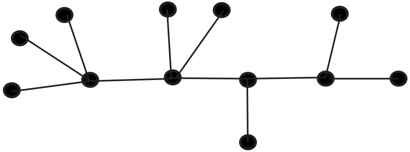
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Definicija 9.5

Aciklički graf ili šuma je graf koji ne sadrži cikluse. Stablo je povezan aciklički graf.

Komponente povezanosti šume su stabla.



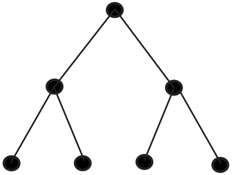


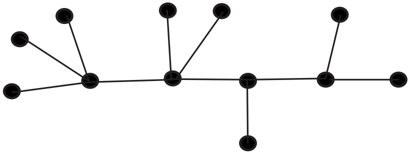
9 Bipartitni grafovi. Stabla

Definicija 9.5

Aciklički graf ili šuma je graf koji ne sadrži cikluse. Stablo je povezan aciklički graf.

Komponente povezanosti šume su stabla.





9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.6

Svaka dva vrha u stablu povezana su jedinstvenim putem.

Dokaz: Neka je G stablo i neka su P_1, P_2 različiti (u, v)-putevi.
Kako je $P_1 \neq P_2$, postoji neki brid $e = xy$ u P_1 koji nije u P_2.
Očito je $(P_1 \cup P_2) - e$ povezan pa sadrži (x, y)-put P. Slijedi $P + e$ je ciklus što je kontradikcija. $\square$

Korolar 9.7

Povezan graf je stablo ako i samo ako su mu svi bridovi ujedno i mostovi.

Dokaz:
$\Leftarrow$ Neka je svaki brid nekog povezanog grafa G most. Slijedi da graf ne sadrži cikluse pa smo dobili povezan aciklički graf, tj. stablo.
$\Rightarrow$ Neka je G stablo. Tada G ne sadrži cikluse pa mu svaki brid mora biti most. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.6

Svaka dva vrha u stablu povezana su jedinstvenim putem.

Dokaz: Neka je G stablo i neka su P_1, P_2 različiti (u, v)-putevi.
Kako je $P_1 \neq P_2$, postoji neki brid $e = xy$ u P_1 koji nije u P_2.
Očito je $(P_1 \cup P_2) - e$ povezan pa sadrži (x, y)-put P. Slijedi $P + e$ je ciklus što je kontradikcija. □

Korolar 9.7

Povezan graf je stablo ako i samo ako su mu svi bridovi ujedno i mostovi.

Dokaz:
$\Leftarrow$ Neka je svaki brid nekog povezanog grafa G most. Slijedi da graf ne sadrži cikluse pa smo dobili povezan aciklički graf, tj. stablo.
$\Rightarrow$ Neka je G stablo. Tada G ne sadrži cikluse pa mu svaki brid mora biti most. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.6

Svaka dva vrha u stablu povezana su jedinstvenim putem.

Dokaz: Neka je G stablo i neka su P_1, P_2 različiti (u, v)-putevi.
Kako je $P_1 \neq P_2$, postoji neki brid $e = xy$ u P_1 koji nije u P_2.
Očito je $(P_1 \cup P_2) - e$ povezan pa sadrži (x, y)-put P. Slijedi $P + e$ je ciklus što je kontradikcija. $\square$

Korolar 9.7

Povezan graf je stablo ako i samo ako su mu svi bridovi ujedno i mostovi.

Dokaz:
$\Leftarrow$ Neka je svaki brid nekog povezanog grafa G most. Slijedi da graf ne sadrži cikluse pa smo dobili povezan aciklički graf, tj. stablo.
$\Rightarrow$ Neka je G stablo. Tada G ne sadrži cikluse pa mu svaki brid mora biti most. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.6

Svaka dva vrha u stablu povezana su jedinstvenim putem.

Dokaz: Neka je G stablo i neka su P_1, P_2 različiti (u, v)-putevi.
Kako je $P_1 \neq P_2$, postoji neki brid $e = xy$ u P_1 koji nije u P_2.
Očito je $(P_1 \cup P_2) - e$ povezan pa sadrži (x, y)-put P. Slijedi $P + e$ je ciklus što je kontradikcija. $\square$

Korolar 9.7

Povezan graf je stablo ako i samo ako su mu svi bridovi ujedno i mostovi.

Dokaz:
$\Leftarrow$ Neka je svaki brid nekog povezanog grafa G most. Slijedi da graf ne sadrži cikluse pa smo dobili povezan aciklički graf, tj. stablo.
$\Rightarrow$ Neka je G stablo. Tada G ne sadrži cikluse pa mu svaki brid mora biti most. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

- Za (u, v)-put P u grafu G kažemo da je maksimalan ako ne postoji vrh $w \notin V(P)$ takav da je w spojen bridom sa jednim od vrhova u i v.

Lema 9.8

Neka je P maksimalan put u grafu G s krajevima u vrhovima u i v. Tada $N_G(u) \subseteq V(P)$ i $N_G(v) \subseteq V(P)$. Ako je G acikličan, tada $d_G(u) = d_G(v) = 1$.

Dokaz:
Ako je $e = vw \in E(G)$, $w \notin V(P)$, tada je i Pw put pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je P maksimalan. Stoga, $N_G(v) \subseteq V(P)$.
Za acikličke grafove vrijedi da ako $wv \in E(G)$, tada je w sadržan u P pa je wv posljednji brid u P (računajući u smjeru od u) i $d_G(v) = 1$. Isto vrijedi i za drugi kraj u puta P. □

Korolar 9.9

Svako stablo T s najmanje dva vrha sadrži najmanje dva vrha stupnja jedan i takvi vrhovi zovu se listovi.

Dokaz: Obzirom da je T acikličan graf, oba kraja maksimalnog puta u T su vrhovi stupnja jedan. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

- Za (u, v)-put P u grafu G kažemo da je maksimalan ako ne postoji vrh $w \notin V(P)$ takav da je w spojen bridom sa jednim od vrhova u i v.

Lema 9.8

Neka je P maksimalan put u grafu G s krajevima u vrhovima u i v. Tada $N_G(u) \subseteq V(P)$ i $N_G(v) \subseteq V(P)$. Ako je G acikličan, tada $d_G(u) = d_G(v) = 1$.

Dokaz:

Ako je $e = vw \in E(G)$, $w \notin V(P)$, tada je i Pw put pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je P maksimalan. Stoga, $N_G(v) \subseteq V(P)$.

Za acikličke grafove vrijedi da ako $wv \in E(G)$, tada je w sadržan u P pa je wv posljednji brid u P (računajući u smjeru od u) i $d_G(v) = 1$. Isto vrijedi i za drugi kraj u puta P. $\square$

Korolar 9.9

Svako stablo T s najmanje dva vrha sadrži najmanje dva vrha stupnja jedan i takvi vrhovi zovu se listovi.

Dokaz: Obzirom da je T acikličan graf, oba kraja maksimalnog puta u T su vrhovi stupnja jedan. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

- Za (u, v)-put P u grafu G kažemo da je maksimalan ako ne postoji vrh $w \notin V(P)$ takav da je w spojen bridom sa jednim od vrhova u i v.

Lema 9.8

Neka je P maksimalan put u grafu G s krajevima u vrhovima u i v. Tada $N_G(u) \subseteq V(P)$ i $N_G(v) \subseteq V(P)$. Ako je G acikličan, tada $d_G(u) = d_G(v) = 1$.

Dokaz:
Ako je $e = vw \in E(G)$, $w \notin V(P)$, tada je i Pw put pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je P maksimalan. Stoga, $N_G(v) \subseteq V(P)$.
Za acikličke grafove vrijedi da ako $wv \in E(G)$, tada je w sadržan u P pa je wv posljednji brid u P (računajući u smjeru od u) i $d_G(v) = 1$. Isto vrijedi i za drugi kraj u puta P. □

Korolar 9.9

Svako stablo T s najmanje dva vrha sadrži najmanje dva vrha stupnja jedan i takvi vrhovi zovu se listovi.

Dokaz: Obzirom da je T acikličan graf, oba kraja maksimalnog puta u T su vrhovi stupnja jedan. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

- Za (u, v)-put P u grafu G kažemo da je maksimalan ako ne postoji vrh $w \notin V(P)$ takav da je w spojen bridom sa jednim od vrhova u i v.

Lema 9.8

Neka je P maksimalan put u grafu G s krajevima u vrhovima u i v. Tada $N_G(u) \subseteq V(P)$ i $N_G(v) \subseteq V(P)$. Ako je G acikličan, tada $d_G(u) = d_G(v) = 1$.

Dokaz:
Ako je $e = vw \in E(G)$, $w \notin V(P)$, tada je i Pw put pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je P maksimalan. Stoga, $N_G(v) \subseteq V(P)$.
Za acikličke grafove vrijedi da ako $wv \in E(G)$, tada je w sadržan u P pa je wv posljednji brid u P (računajući u smjeru od u) i $d_G(v) = 1$. Isto vrijedi i za drugi kraj u puta P. □

Korolar 9.9

Svako stablo T s najmanje dva vrha sadrži najmanje dva vrha stupnja jedan i takvi vrhovi zovu se listovi.

Dokaz: Obzirom da je T acikličan graf, oba kraja maksimalnog puta u T su vrhovi stupnja jedan. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.10

Ako je G stablo, onda je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz:

Koristimo matematičku indukciju po broju n vrhova stabla G.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita jer stablo s jednim vrhom nema bridove.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svako stablo s n vrhova.
Dokažimo tvrdnju za stablo G s $(n+1)$-im vrhom.
Prema Korolaru 9.9 postoji $v \in V(G)$ takav da $d(v) = 1$.
Ukoliko izbacimo v i njemu incidentan brid (jedan jedini), dobivamo stablo $G' = G - v$ s n vrhova za koje vrijedi pretpostavka indukcije, tj. $|E(G')| = n - 1$. Slijedi $|E(G)| = n - 1 + 1 = n$.
Općenito, za stablo G vrijedi $|E(G)| = |V(G)| - 1$. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.10

Ako je G stablo, onda je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz:

Koristimo matematičku indukciju po broju n vrhova stabla G.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita jer stablo s jednim vrhom nema bridove.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svako stablo s n vrhova.
Dokažimo tvrdnju za stablo G s $(n+1)$-im vrhom.
Prema Korolaru 9.9 postoji $v \in V(G)$ takav da $d(v) = 1$.
Ukoliko izbacimo v i njemu incidentan brid (jedan jedini), dobivamo stablo $G' = G - v$ s n vrhova za koje vrijedi pretpostavka indukcije, tj. $|E(G')| = n - 1$. Slijedi $|E(G)| = n - 1 + 1 = n$.
Općenito, za stablo G vrijedi $|E(G)| = |V(G)| - 1$. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Teorem 9.10

Ako je G stablo, onda je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz:
Koristimo matematičku indukciju po broju n vrhova stabla G.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita jer stablo s jednim vrhom nema bridove.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svako stablo s n vrhova.
Dokažimo tvrdnju za stablo G s $(n+1)$-im vrhom.
Prema Korolaru 9.9 postoji $v \in V(G)$ takav da $d(v) = 1$.
Ukoliko izbacimo v i njemu incidentan brid (jedan jedini), dobivamo stablo $G' = G - v$ s n vrhova za koje vrijedi pretpostavka indukcije, tj. $|E(G')| = n - 1$. Slijedi $|E(G)| = n - 1 + 1 = n$.
Općenito, za stablo G vrijedi $|E(G)| = |V(G)| - 1$. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Lema 9.11

Ako je G povezan graf za koji vrijedi $|E(G)| = |V(G)| - 1$, onda je G stablo.

Dokaz: Ako povezan graf nije stablo, mora imati ciklus.
Odstranjivanjem nekog brida e iz ciklusa, graf $G' = G - e$ će i dalje ostati povezan, imat će $|V(G)|$ vrhova i $|V(G)| - 2$ bridova.
Graf G' je povezan i prema Teoremu 9.10 nije stablo. Slijedi da G' ima ciklus. Opet odstranimo neki brid iz ciklusa. Dobivamo povezan graf G'' koji nije stablo. Nastavljamo odstranjivati bridove iz ciklusa. Naposljetku ćemo doći u situaciju da ne možemo odstraniti brid, a da dobijemo povezan graf, tj. svi su bridovi mostovi. Prema Korolaru 9.7 to znači da imamo stablo. Ako se to dogodilo u k-tom koraku, stablo će imati $|V(G)|$ vrhova i $|V(G)| - (k + 1)$ bridova. Po Teoremu 9.10 slijedi $k = 0$ pa je i polazni graf stablo. □

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Lema 9.11

Ako je G povezan graf za koji vrijedi $|E(G)| = |V(G)| - 1$, onda je G stablo.

Dokaz: Ako povezan graf nije stablo, mora imati ciklus.
Odstranjivanjem nekog brida e iz ciklusa, graf $G' = G - e$ će i dalje ostati povezan, imat će $|V(G)|$ vrhova i $|V(G)| - 2$ bridova.
Graf G' je povezan i prema Teoremu 9.10 nije stablo. Slijedi da G' ima ciklus. Opet odstranimo neki brid iz ciklusa. Dobivamo povezan graf G'' koji nije stablo.
Nastavljamo odstranjivati bridove iz ciklusa. Naposljetku ćemo doći u situaciju da ne možemo odstraniti brid, a da dobijemo povezan graf, tj. svi su bridovi mostovi. Prema Korolaru 9.7 to znači da imamo stablo. Ako se to dogodilo u k-tom koraku, stablo će imati $|V(G)|$ vrhova i $|V(G)| - (k+1)$ bridova. Po Teoremu 9.10 slijedi $k = 0$ pa je i polazni graf stablo. $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Korolar 9.12

Stablo je bipartitan graf!

Dokaz: Po Teoremu 9.2 graf G je bipartitan ako i samo ako G ne sadrži neparne cikluse. Stablo ne sadrži cikluse pa ne sadrži niti neparne cikluse. Stoga je svako stablo bipartitan graf! $\square$

9 Bipartitni grafovi. Stabla

Korolar 9.12

Stablo je bipartitan graf!

Dokaz: Po Teoremu 9.2 graf G je bipartitan ako i samo ako G ne sadrži neparne cikluse. Stablo ne sadrži cikluse pa ne sadrži niti neparne cikluse. Stoga je svako stablo bipartitan graf! $\square$

Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Put P_n je stablo.
- Zvijezda S_n je stablo.
- Dvostruka zvijezda (Double star) DS_n je stablo nastalo spajanjem središnjih vrhova dvije zvijezde.

Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Put P_n je stablo.
- Zvijezda S_n je stablo.
- Dvostruka zvijezda (Double star) DS_n je stablo nastalo spajanjem središnjih vrhova dvije zvijezde.

Neki specijalni grafovi (stabla) III

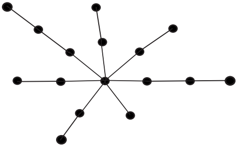
- Put P_n je stablo.
- Zvijezda S_n je stablo.
- Dvostruka zvijezda (Double star) DS_n je stablo nastalo spajanjem središnjih vrhova dvije zvijezde.

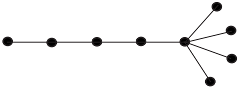
Neki specijalni grafovi (stabla) III

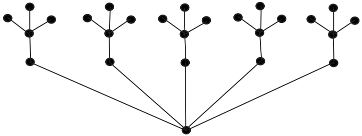
- Put P_n je stablo.
- Zvijezda S_n je stablo.
- Dvostruka zvijezda (Double star) DS_n je stablo nastalo spajanjem središnjih vrhova dvije zvijezde.

Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Zvjezdoliko stablo ili Pauk (Starlike tree, Spider) $S(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ sadrži jedinstven vrh v stupnja većeg od 2 i vrijedi $S(n_1, n_2, \ldots, n_k) - v = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$.
- Komet ili Metla (Comet, Broom) $B_{n,\Delta}$ je zvjezdoliko stablo $S(1, 1, \ldots, 1, n - \Delta)$.
- (n, k)-Banana je stablo nastalo spajanjem po jednog lista iz n kopija zvijezde S_k s jednim novim vrhom.

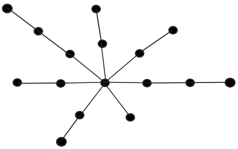


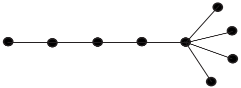


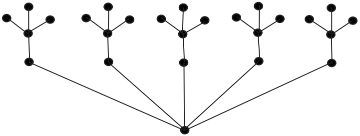


Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Zvjezdoliko stablo ili Pauk (Starlike tree, Spider) $S(n_1, n_2, \dots, n_k)$ sadrži jedinstven vrh v stupnja većeg od 2 i vrijedi $S(n_1, n_2, \dots, n_k) - v = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \dots \cup P_{n_k}$.
- Komet ili Metla (Comet, Broom) $B_{n,\Delta}$ je zvjezdoliko stablo $S(1, 1, \dots, 1, n - \Delta)$.
- (n, k)-Banana je stablo nastalo spajanjem po jednog lista iz n kopija zvijezde S_k s jednim novim vrhom.

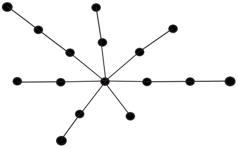


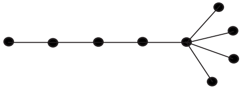


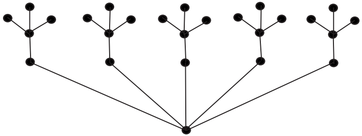


Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Zvjezdoliko stablo ili Pauk (Starlike tree, Spider) $S(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ sadrži jedinstven vrh v stupnja većeg od 2 i vrijedi $S(n_1, n_2, \ldots, n_k) - v = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$.
- Komet ili Metla (Comet, Broom) $B_{n,\Delta}$ je zvjezdoliko stablo $S(1, 1, \ldots, 1, n - \Delta)$.
- (n, k)-Banana je stablo nastalo spajanjem po jednog lista iz n kopija zvijezde S_k s jednim novim vrhom.

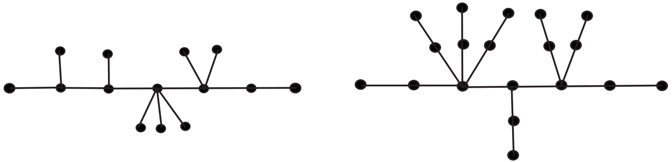






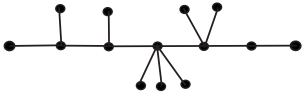
Neki specijalni grafovi (stabla) III

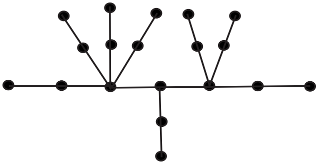
- Gusjenica (Caterpillar) je stablo u kojem su svi vrhovi spojeni bridom sa središnjim putem, tj. to je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo put.
- Jastog (Lobster) je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo gusjenicu.



Neki specijalni grafovi (stabla) III

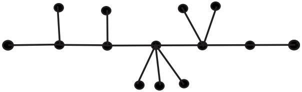
- Gusjenica (Caterpillar) je stablo u kojem su svi vrhovi spojeni bridom sa središnjim putem, tj. to je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo put.
- Jastog (Lobster) je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo gusjenicu.

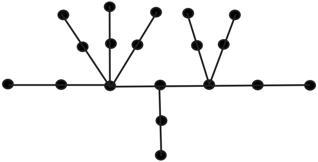




Neki specijalni grafovi (stabla) III

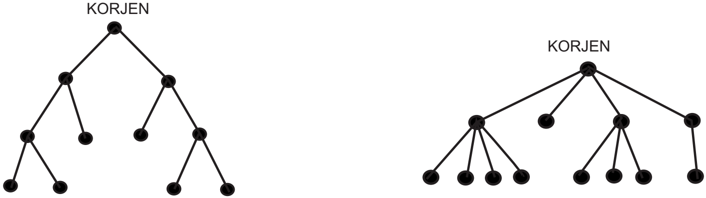
- Gusjenica (Caterpillar) je stablo u kojem su svi vrhovi spojeni bridom sa središnjim putem, tj. to je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo put.
- Jastog (Lobster) je stablo takvo da uklanjanjem svih listova i njima incidentnih bridova dobivamo gusjenicu.





Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Korjensko stablo je stablo u kojem smo 'odlučili' istaknuti jedan vrh i nazvati ga korijenom.
  Ako je korijen stabla vrh stupnja jedan, onda se takvo stablo zove posađeno stablo.
- m-arno stablo je korjensko stablo u kojem svaki vrh ima najviše m djece.
  Visina stabla je duljina najdužeg puta od korijena do nekog vrha. Ako je visina jednaka k, onda takvo stablo ima najviše m^k listova.
  Unutarnji vrhovi su vrhovi koji nisu listovi.
- Binarna stabla se koriste prilikom sortiranja podataka.



Neki specijalni grafovi (stabla) III

- Korjensko stablo je stablo u kojem smo 'odlučili' istaknuti jedan vrh i nazvati ga korijenom.
  Ako je korijen stabla vrh stupnja jedan, onda se takvo stablo zove posađeno stablo.
- m-arno stablo je korjensko stablo u kojem svaki vrh ima najviše m djece.
  Visina stabla je duljina najdužeg puta od korijena do nekog vrha. Ako je visina jednaka k, onda takvo stablo ima najviše m^k listova.
  Unutarnji vrhovi su vrhovi koji nisu listovi.
- Binarna stabla se koriste prilikom sortiranja podataka.