Състезателно програмиране за 6 клас

Петър Петров, Марин Шаламанов $17\ \mathrm{ юли}\ 2020\,\mathrm{ r}.$



Съдържание

	0.1	Въвед	цение	2	
1	Стил на писане				
	1.1	Основ	вни правила	3	
	1.2	Подре	еждане на кода	3	
		1.2.1	Индентация	3	
		1.2.2	Една команда на ред	3	
		1.2.3	Къдрави скоби	3	
		1.2.4	if, if-else, if-else-if-else	4	
		1.2.5	for	4	
		1.2.6	while	4	
		1.2.7	do-while	4	
	1.3	Проме	енливи	5	
		1.3.1	Предназначение на променлива	5	
		1.3.2	Именуване	5	
		1.3.3	Глобални или локални	5	
		1.3.4	Създаване	5	
		1.3.5	Начални стойности	5	
		1.3.6	Скриване	5	
	1.4	Функі	•	6	
		1.4.1	Къдрави скоби	6	
		1.4.2	Връщана стойност	6	
		1.4.3	Частни случай	6	
2	Груба сила				
	2.1				
	2.2		сила с двойки и тройки	7 7	
	2.3			10	
	2.4			14	
	2.5		1 0 1	16	



0.1 Въведение

Неща, които трябва да споменем тук:

- Целта на книгата е прадстави на състезателите от D група, всички теми и материал, които трябва да знаят за да се преставят отлично на регионалните и националните състезание по информатика.
- Темите съдържат много задачи. Когато се стигне до задача е припоръчително читателя да спре да чете текста и да се опита да реши задачата сам. Чак след това да чете нататък. Често тези решаването на тези задачи е необходимо за успешното разбиране на материала.
- Може да си използва от ученици самостоятелно и от учители в редовно часове или школи.
- Линк към система, където са качени задачите.



Глава 1

Стил на писане

1.1 Основни правила

При писането на код, както на всяко други нещо, има добри и лоши практики. Разбира се нормално е да има разлика, ако пишем код по време на състезание и при работа в голям екип. Много хора започват да се учат като състезатели и се научават, че техния код не е нужно да следва правила. Впоследствие започват работа и разбират, че трябва да се отучат от този навик, и че всеки сериозен екип има серия от правила за спазване. Не правете тази грешка, не отричайте правилата! Истината разбира се не е черна или бяла, тя е някъде по средата. Има правила, които по-време на състезание ни помагат да структурираме по-добре нашите мисли и най-важното - по-лесно да намираме грешките, които допускаме.

В следващите секции описваме основните практики, които смятаме че са полезни да се спазват от състезателите.

1.2 Подреждане на кода

1.2.1 Индентация

Всеки път когато влезем в блок отместването на кода отляво(индентацията) се увеличава с четири интервала. Когато блока завърши, отместването се връща на предишното ниво. Под блок разбираме тяло на функция, if, else, for, do и while.

1.2.2 Една команда на ред

На всеки ред трябва да има най-много една команда.

1.2.3 Къдрави скоби

Използват се винаги с if, else, for, do и while, дори когато тялото е празно или има една команда. Отварящата скоба се слага в края на реда към който се отнася. Затварящата скоба е сама на ред със същото отстояние като това на реда на отварящата скоба.



1.2.4 if, if-else, if-else-if-else

```
Ето така трябва да изглеждат if-else структурите:
```

```
if (условие) {
    команди;
}
if (условие) {
    команди;
} else {
    команди;
}
if (условие) {
    команди;
} else if (условие) {
    команди;
} else {
    команди;
}
1.2.5
        for
Ето така трябва да изглежда цикъла for:
for (инициализация; условие; промяна) {
    команди;
}
1.2.6
        while
Ето така трябва да изглежда цикъла while:
while (условие) {
    команди;
}
1.2.7
        do-while
```

Ето така трябва да изглежда цикъла do-while:

```
do {
    команди;
} while (условие);
```



1.3 Променливи

1.3.1 Предназначение на променлива

Основната идея е една променлива - едно предназначение. Ако искаме да сменим предназначението създаваме отделна променлива.

1.3.2 Именуване

Имената на променливите трябва да ни подсказват за тяхното предназначение. Същевременно е желателно да са кратки, за да не отнемат много време за писане. Компромиса яснота-краткост го оставяме на вас.

Все пак най-често се използват еднобуквени имена. Те не са описателни, за това е добре да изградите ваша конвенция за стандартни значения на еднобуквените имена. Например ако имаме редица от числа, броя е n, масива е a. Ако имаме низ използваме s. Брой заявки пазим в q. Управляваща променлива във for - i,j.

1.3.3 Глобални или локални

Всички променливи по правило ги правим локални. Все пак може да направим променлива глобална, ако планираме да я използваме в различни функции и не искаме да я подаваме като параметър. Обикновено масивите ги правим глобални и като бонус получаваме начални стойности.

1.3.4 Създаване

Създаваме локални променливи близо до мястото, където ги използваме за първи път.

```
for (int i = 0; i < 10; i++) {
    for (int j = 0; j < 10; j++) {
        int d = countDivisors(a[i][j]);
        br[d]++;
    }
}</pre>
```

В случая променливата d се използва във вътрешния цикъл. Няма нужда да я създаваме във външния цикъл или преди това.

1.3.5 Начални стойности

На локалните променливи даваме начални стойности в момента на създаването. Или ги четем от входа в близките няколко реда. При създаване на локални масиви използвайте къдрави скоби за начални стойности по подразбиране - int a[5] = {}.

1.3.6 Скриване

В обхвата на дадена променлива никога не декларираме друга променлива със същото име. Така например ако имаме глобална променлива никъде в кода не трябва да създаваме променлива с такова име.



1.4 Функции

Функциите са незаменими в няколко отношения:

- Разделят кода на отделни логически елементи.
- Позволяват да преизползваме код.
- Позволяват да тестваме кода на части.

1.4.1 Къдрави скоби

Важат правилата като за другите блокове - отварящата е в края на реда, където започва функцията. Затварящата скоба е сама на ред със същото отстояние като това на реда на отварящата скоба, като обикновено това отстояние е 0.

1.4.2 Връщана стойност

Всяка функция, която не e void трябва да връща резултат. Без значение кои редове на функцията ще се изпълнят, задължително накрая трябва да се стига до return. В противен случай може да се получат неочаквани резултати и това е проблем, които може да е труден за откриване.

1.4.3 Частни случай

Понякога за конкретни стойности на параметрите на функцията трябва да се върне конкретен резултат и това не е част от основната логика. В такъв случай е добре тези проверки да са в началото на функцията. Така основната логика няма да е вътре в условие и няма да е отместена излишно.

```
bool isPrime(int n) {
    if (n < 2) {
        return false;
    }
    ...
}</pre>
```

В примера при проверка за просто число, ако числото е по-малко от 2 това е частен случай, който не се покрива от нашата логика. За това още в началото го проверяваме и връщаме резултат. След това къществената част от кода не се налага да бъде отместена.



Глава 2

Груба сила

2.1 Дефиниция

Дефиниция 2.1 (Груба сила). Това е подход за решаване на задачи, при който се генерират всички възможни кандидати за решение и от тези които отговарят на изискванията се намира най-подходящия.

За решаването на една задача чрез груба сила трябва да преминем през няколко стъпки:

- 1. Да открием всички възможности например всички начини да поставим n топки в k кутии.
- 2. Да генерираме всички тези възможности.
- 3. Да проверим кои възможности отговарят на условието на задачата може да сме сложили в някоя кутия повече топки от позволеното.
- 4. Да проверим коя от отговарящите възможности дава най-доброто решение.

2.2 Груба сила с двойки и тройки

Задача 2.1. Изведете на екрана всички наредени двойки с числа в интервала от [0; n-1], без повторения на едно число. Понеже двойките са наредени, ако изведете (a,b), трябва отделно да извеждате (b,a).

Решение. Най-стандартния вариант да минем през всички двойки е с два вложени цикъла. В първия фиксираме първия елемент от двойката и за него във втория цикъл обхождаме всички възможни втори елементи. Така при фиксиран първи елемент обхождаме всички двойки - (i,0),(i,1),...,(i,n-1).

Решението е супер само, че в този вариант при j равно на i ще изведем двойка с повторение на число. Понякога това може да е целта, но не и сега. За да не го изведем ще направим една допълнителна проверка за това.

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
   for (int j = 0; j < n; j++) {
     if (i == j) continue;
     cout << "(" << i << "," << j << ")" << endl;</pre>
```



```
}
```

Задача 2.2. Изведете на екрана всички ненаредени двойки с числа в интервала [0; n-1], без повторения на едно число. Понеже двойките са ненаредени, ако изведете (a, b), не трябва отделно да извеждате (b, a).

Решение. Разликата с предната задача е, че тук не трябва за извеждаме повторенията.

Един стандартен подход е да въведем наредба в двойката. Да вземем например двойките (0,1) и (1,0). От тези две двойки се интересуваме само от едната. В единия случай първото число в двойката е по-малко, в другия е по-голямо. Така може да гледаме само двойките където първото число е по-малко от второто. Това ще ни гарантира, че няма да имаме повторения. Така пак ще обходим всички възможни двойки, но ще извеждаме само тези, които трябва.

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        if (i >= j) continue;
        cout << "(" << i << "," << j << ")" << endl;
    }
}</pre>
```

Има и втори вариант, в които може да спестим обхождането на двойки, които не ни интересуват. Като отново ще използваме идеята за наредба в двойката, но по-умно. В първия цикъл фиксираме първия елемент от двойката i и търсим всички двойки, където втория елемент е по-голям. Ние знаем кои са тези елементи - i+1, ..., n-1. Така ако j започва от i+1, а не от 0, всъщност ще обходим само това което искаме.

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i+1; j < n; j++) {
        cout << "(" << i << "," << j << ")" << endl;
    }
}</pre>
```

Задача 2.3. Изведете на екрана всички ненаредени тройки с числа в интервала от [0; n-1], като числата могат да се повтарят.

Решение. Това, че едно число може да се повтаря не променя много нещата. Отново ключово за решението е въвеждане на наредба в тройката. Ще извеждаме (a,b,c) само когато $a\leq b\leq c$.

Първият вариант е да обхождаме всички тройки и да пропускаме ненужните:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        for (int k = 0; k < n; k++) {
            if (i > j || j > k) continue;
            cout << "(" << i << "," << j << "," << k << ")" << endl;
        }
    }
}</pre>
```



П

Вторият вариант е да обхождаме само това което ни трябва:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i; j < n; j++) {
        for (int k = j; k < n; k++) {
            cout << "(" << i << "," << j << "," << k << ")" << endl;
        }
    }
}</pre>
```

Задача 2.4. Дадена е редица от числа - int a[n]. Проверете съществува ли последователност от 1 или повече съседни числа със сума s.

Решение. Грубият подход е да намерим сумите на всички последователности и да проверим дали някоя е равна на s. Една последователност се определя от позициите на първия и последния елемент в нея. Така една двойка (i,j), където $i \leq j$ определя последователността a[i], ..., a[j].

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i; j < n; j++) {
        // проверяваме дали сумата на числата a[i]+...+a[j] е равна на s
    }
}
```

Задача 2.5. Дадена е редица от числа - int a[n]. Проверете дали всички числа в редицата са различни.

Решение. За да проверим дали всички са различни, грубият подход е да сравним всеки две числа - за всяка ненаредена двойка (i, j), проверяваме дали $a[i] \neq a[j]$.

```
bool areElementsUnique() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = i+1; j < n; j++) {
            if (a[i] == a[j]) {
                return false;
            }
        }
    }
    return true;
}</pre>
```

Задача 2.6. Дадена е редица от числа - int a[n]. Проверете дали има три числа от редицата, така че едното да е сума на другите две.

Решение. Може да обходим всички ненаредени тройки числа. И да проверяваме дали едно от тях е равно на сумата на другите две.



```
bool isOneSumOfTwo() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = i+1; j < n; j++) {
            for (int k = j+1; k < n; k++) {
                if (a[i]+a[j] == a[k] || a[i]+a[k] == a[j] || a[j]+a[k] == a[i]) {
                 return true;
            }
        }
    }
    return false;
}</pre>
```

2.3 Груба сила с комбинации

Задача 2.7. Изведете на екрана всички редици с по 4 числа, съставени само от нули и единици.

Решение. Ще използваме четири вложени цикъла. Първият ще определя първото число, вторият - второто и т.н. Така управляващата променлива във всеки цикъл ще приема стойностите 0 и 1.

```
for (int i1 = 0; i1 < 2; i1++) {
    for (int i2 = 0; i2 < 2; i2++) {
        for (int i3 = 0; i3 < 2; i3++) {
            for (int i4 = 0; i4 < 2; i4++) {
                cout << i1 << " " << i2 << " " << i3 << " " << i4 << endl;
            }
        }
    }
}</pre>
```

Задача 2.8. Изведете на екрана всички редици с по 4 числа, съставени от числата от 0 до 3, които може да се повтарят.

Задача 2.9. Дадени са две големи раници. Трябва да сложим 4 предмета в тях, така че разликата в теглото на раниците да е минимална. Намерете тази разлика.

Решение. Първата стъпка е да открием всички възможности. За всеки предмет имаме два варианта - да отиде в първата или във втората раница.

Втората стъпка е да генерираме тези възможности. Ще номерираме двете раници с 1 и 2. Сега искаме на всеки предмет да съпоставим число 1 или 2 - съответстващо на раницата, в която ще отиде. Едно поставяне на предметите в раниците се определя от четири числа, които са 1 или 2. Например комбинацията [2, 1, 2, 1] означава че първият и третият предмет отиват в раница 2, докато вторият и четвъртият в раница 1. Всички възможни поставяния се определят от всички четирицифрени редици с



числата 1 и 2. Третата стъпка е да премахнем подредби, които не отговарят на условието, но тя не е приложима в тази задача - всяко разполагане на предметите в раниците е валидно. Последната стъпка е да определим, коя от тези подредби е най-добре балансирана.

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a, b, c ,d; // теглата на четирите предмета
// тази функция приема конкретно разпределение на предметите по раниците
// i0 - в коя раница е първия предмет
// i1 - в коя раница е втория предмет
// i2 - в коя раница е третия предмет
// і3 - в коя раница е четвъртия предмет
// и връща като резултат разликата в теглата на двете раници
int calcDiff(int i0, int i1, int i2, int i3) {
    int t1 = 0; // теглото на първата раница
    int t2 = 0; // теглото на втората раница
    if (i0 == 1) t1 += a; // ако първият предмет е в първата раница
    else t2 += b; // ако първият предмет е във втората раница
    if (i1 == 1) t1 += b;
    else t2 += b;
    if (i2 == 1) t1 += c;
    else t2 += c;
    if (i0 == 1) t1 += d;
    else t2 += d;
    return abs(t1-t2); // връщаме разликата в теглата на двете раници
}
int main() {
    cin >> a >> b >> c >> d;
    int ans = a+b+c+d;
    // генерираме всички възможни подредби на предметите в раниците
    for (int i0 = 1; i0 <= 2; i0++) {
        for (int i1 = 1; i1 <= 2; i1++) {
            for (int i2 = 1; i2 <= 2; i2++) {
                for (int i3 = 1; i3 <= 2; i3++) {
                    int diff = calcDiff(i0, i1, i2, i3);
                    ans = min(ans, diff);
                }
            }
        }
    cout << ans << endl;</pre>
    return 0:
```



}

Задача 2.10. Дадени са три предмета с тегла a, b и c и три раници с вместимост m, n и p. Колко най-много предмета може да поберем в раниците, ако в една раница може да се сложи повече от един предмет.

Решение. Първата стъпка е да открием всички възможности. Много е важно да забележим, че не е задължително всички предмети да влязат в раница. Така за всеки предмет имаме четири варианта - да отиде в една от трите раници или да остане извън раница.

Втората стъпка е да генерираме тези възможности. Ще номерираме трите раници с 1, 2 и 3, и ще използваме числото 0, ако предмета е останал извън раниците. Сега искаме на всеки предмет да съпоставим число 0,1,2 или 3. Едно поставяне на предметите в раниците се определя от три числа, които са 0,1,2 или 3. Например комбинацията [3,0,1] означава че първият предмет отиват в раница 3, третият в раница 1 и вторият остава извън раниците. Всички възможни поставяния се определят от всички трицифрени редици с числата 0,1,2 и 3. Третата стъпка е да премахнем подредби, които не отговарят на условието. Това са случаите, в които сме надвишили вместимостта на някоя от раниците. Последната стъпка е да определим, в коя от валидните подредби сме сложили най-много предмети по раниците. Ще напишем една функция, която проверява дали една подредба (i0,i1,i2), където това са раниците на трите предмета е валидна и една функция, която проверява броя предмети, които са вътре в раница.

```
bool isValid(int i0, int i1, int i2) {
    int t1 = 0; // теглото на първата раница
    int t2 = 0; // теглото на втората раница
    int t3 = 0; // теглото на третата раница
    if (i0 == 1) t1 += a; // ако първият предмет е в първата раница
    if (i0 == 2) t2 += a; // ако първият предмет е във втората раница
    if (i0 == 3) t3 += a; // ако първият предмет е в третата раница
    if (i1 == 1) t1 += b;
    if (i1 == 2) t2 += b;
    if (i1 == 3) t3 += b;
    if (i2 == 1) t1 += c;
    if (i2 == 2) t2 += c;
    if (i2 == 3) t3 += c;
   return t1 <= m && t2 <= n && t3 <= p;
}
int itemsInside(int i0, int i1, int i2) {
    int ans = 0; // брой предмети вътре в раница
    if (i0 != 0) ans++; // ако първият предмет е в раница
    if (i1 != 0) ans++;
    if (i2 != 0) ans++;
   return ans;
}
```



Задача 2.11. Дадени са десет предмета с тегла a, b и c и три раници с вместимост m, n и p. Колко най-много предмета може да поберем в раниците, ако в една раница може да се сложи повече от един предмет.

Решение. Задачата като идея и решение е същата като предишната. Трябва да направим 10 цикъла, с които да определим мястото на всеки от десетте предмета, да проверим дали конфигурацията е валидна и да преброим предметите вътре в раниците. Това което ще отбележим е, че може да използваме масиви. Ще сложим теглата на предметите в един масив int a[10] и техните позиции в друг масив int p[10], като p[i] ще показва в коя раница се намира *i*-ия предмет. Така няма да спестим многото вложени цикли, но функциите isValid и itemsInside ще станат доста по-приятни.

Задача 2.12. Шест човека трябва да прекосят реката с лодка. Колко най-малко килограма трябва да побира лодката, за да могат да преминат с най-много три возения.

Решение. Първата стъпка е да открием всички възможности. За всеки човек трябва да определим на кое возене ще премине - първо, втори или трето.

Втората стъпка е да генерираме тези възможности. Ясно е, че ще стане със шест вложени цикъла.

Третата стъпка е да премахнем подредби, които не отговарят на условието - тук такива няма.

Накрая трябва да намерим най-оптималното решение. За всяка подредба трябва да намерим най-тежкото от трите возения. От всички подредби търсим минималното.



Задача 2.13. n човека, между един и десет, трябва да прекосят реката с лодка. Колко най-малко килограма трябва да побира лодката, за да могат да преминат с най-много три возения.

Решение. Тук проблема идва от факта, че не знаем точния брой хора. Един вариант е да напишем отделни решения за всеки възможен брой, но това няма да е много приятно. Основният трик е, че може да генерираме всички възможности за най-лошия случай - десен човека. При самите проверки ще използваме първите n от генерираните числа. Понеже сме генерирали за десет, ще имаме повторения на някои от вариантите, но в случая това не е проблем.

2.4 Груба сила с пермутации

Дефиниция 2.2 (Пермутация). Пермутация на числа наричаме всяка една тяхна подредба в редица. Всички възможни подредби дават всички пермутации на числата.

Задача 2.14. Кои са всички пермутации на числата 0, 1 и 2.

Решение. Пермутациите са [0, 1, 2], [0, 2, 1], [1, 0, 2], [1, 2, 0], [2, 0, 1], [2, 1, 0].

Задача 2.15. Колко са различните пермутации с n числа.

Решение. Фиксираме числата в редицата едно по едно. За да изберем първото число имаме на разположение всичките n. След това за второто вече не може да използваме едно от тях - имаме n-1 варианта. И т.н. за всяко следващо имаме по 1 възможност по-малко. Общия брой е n!=1.2.3...n.

Задача 2.16. Напишете програма, която извежда на екрана всички пермутации на числата от 0 до 3.

Решение. Имаме 4! = 24 варианта. Все пак ще видим как може да ги генерираме с код. Логично е да фиксираме елементите един по един. Първо ще сложим този на първо място, после този на второ и т.н. Основния проблем е как да следим за повторенията.

Един вариант е когато слагаме числата да не проверяваме нищо и накрая като получим редица от 4 числа да проверим дали отговаря на условието. За да направим проверката трябва да сравним всяко с всяко и да види дали няма повтарящи се.

Много добра оптимизация на този вариант е в момента, в който сложим дадено число да проверим дали вече не е използвано:



```
for (int i1 = 0; i1 < 4; i1++) {
    for (int i2 = 0; i2 < 4; i2++) {
        if (i2 == i1) continue;
        for (int i3 = 0; i3 < 4; i3++) {
            if (i3 == i1 || i3 == i2) continue;
            for (int i4 = 0; i4 < 4; i4++) {
                if (i4 == i1 || i4 == i2 || i4 == i3) continue;
                cout << i1 << " " << i2 << " " << i3 << " " << i4 << endl;
        }
    }
}</pre>
```

Задача 2.17. Дадени са четири двуцифрени числа. По колко начина може да ги наредим в редица, така че числото което се образува като ги долепим да е кратно на 7.

Решение. Стъпките са ясни - гледаме всички пермутации на числата и за всяка проверяваме дали след долепването числото е кратно на 7.

Как да генерираме всички пермутации на произволни числа? Тук има добре познат трик, които ще припомним. Най-лесно е числата да са номерирани, за което помага ползването на масив - a[0], a[1], a[2], a[3]. По този начин е достатъчно да направим пермутациите на техните индекси. Така пермутацията [3,1,0,2] ще съответства на числата a[3], a[1], a[0], a[2]. Ако пермутациите ги пазим в друг масив - int p[4], то p[i] ще е позицията на числото a[i]. Сега остава като имаме числата и позициите им да ги доленим. Всъщност има още нещо - ние знаем позицията всяко число a[i], но трябва да разберем кое число е на първа, втора, трета и четвърта позиция. Най-лесно е да използваме трети масив където да запазим числата в реда на пермутацията определена от масива p. Нека този масив е int b[4], b[i] ще бъде числото, което стои на i-та позиция. Да видим в масива b е мястото на числото a[i]. Позицията на a[i] е p[i]. Значи b[p[i]] = a[i]. Ето как изглежда сливането ако имаме масивите a и конкретна пермутация p.



2.5 Задачи

Задача 2.18 (Есенен Турнир 2017, Е група, Карти).

Задача 2.19 (Есенен Турнир 2017, Е група, Израз).

Задача 2.20 (Есенен Турнир 2018, Е група, Дини).

Задача 2.21 (Есенен Турнир 2015, Е група, Асансьор).

Задача 2.22. Намерете колко най-малко цифри трябва да изтрием от числото n, така че числото образувано от останалите цифри да е просто. Изведете -1 ако задачата няма решение.

Ограничения: $1 \le n < 10^{10}$.

Задача 2.23. Дадени са n предмета, като всеки има тегло w_i и стойност v_i . Дадена е раница с вместимост w. Каква е най-голямата обща стойност на предмети, която може да съберем в раницата.

Ограничения: $1 \le n \le 10, 1 \le n \le 1000, 1 \le w_i, v_i \le 100$.

Задача 2.24 (Зимен Турнир 2017, D група, Кратно на 3).

Задача 2.25 (Есенен Турнир 2018, D група, Промени числото).

Задача 2.26 (НОИ - Национален кръг 2020, D група, Фалшивата монета).