

Задача 1

Нам дали кучу A

Переопределим операцию $extract_min$ для A (про остальные операции забудем, потому что не нужны)

При извлечении максимального элемента, если куча одна, то разделим её на две кучи и вернём значение в старом корне.

Пусть у нас есть i куч, оставшиеся от A после $i - 1$ операций $extract_min$.

Что-бы извлечь минимум, нужно найти кучу с минимальным элементом и проделывать операцию как в случае с одной кучей.

Нужно искать кучу с минимальным корнем за "быстро". Заведём ещё одну кучу, в которую будем добавлять новые корни и извлекать минимальный корень.

Что-бы найти k -й в исходной куче, нужно сделать k новых $extract_min$.

Итого на каждом $extract_min$ у нас во вспомогательной куче лежит не более k элементов \Rightarrow извлекаем минимум и добавляем вершины за $\mathcal{O}(\log_2 k)$

Так как у нас k операций $extract_min$, то алгоритм работает за $\mathcal{O}(k \log_2 k)$

Задача 2

Будем хранить в вершине новое поле — сколько нужно добавить к этому поддереву.

В нужный момент будем проталкивать эту информацию детям.

Когда нужно добавить в поддерево v число d — прибавляем d в поле `add` вершинки x

Пусть у нас для кучи будет храниться сколько нужно прибавить

Merge

Пусть прибавить левой — x , правой — y

Задача 3

Создадим структуру из двух куч одинакового размера (при нечетном суммарном количестве — в левой больше элементов).

Правая — минимальная, левая — максимальная.

Инвариант: в правой куче все элементы больше чем в первой.

Из инварианта и структуры следует что в корне левой кучи всегда будет находиться искомая медиана.

Добавляем

- При добавлении элемента x будем смотреть как он соотносится с корнем левой кучи l .

$x > l, \Rightarrow$ добавим x в правую кучу.

$x \leq l, \Rightarrow$ добавим x в левую кучу.

- Теперь нарушился инвариант на соотношение количеств элементов в ку-

чах. Ну давайте просто из той, в которой много извлечем $\max(\min)$ элемент из той кучи, в которой слишком много элементов и перекинем в ту, в которой их не хватает.

Так как баланс изменился не более чем на 1 (мы добавили всего один элемент), то и перекинем таким образом мы не более одного элемента.

Удаляем медиану

Сделаем *extract_min* из левой кучи и как при добавлении перекинем нужный элемент из большей кучи в меньшую.

Возвращаем медиану

Ну теперь совсем изи. По следствию у нас в корне левой кучи ровно медиана.