Задача 1

Пусть это правда и в сортирующей сети нет компаратора $(i, i+1)$.
Возьмём последовательность $0_1, \ldots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, 1_{i+2}, \ldots, 1_n$
Она не сортируется этой сетью, потому что никакой компаратор кроме $(i, i+1)$ не меняет последовательность, а нужного компаратора в сети нет.
Нашли противоречие $\Rightarrow$ в любой сортирующей сети есть компаратор $(i, i+1)$

Задача 2

Пусть мы сливаем нить номер 1 с нитями $2, 3, \ldots, n$
Посмотрим какими могут быть компараторы на первом слое сети.
Очевидно что компаратор будет один и он должен соединять нить 1 с какой-то нитью k
Докажем что нужно не менее $\log_2 n$ компараторов что-бы добавить элемент:

- *База индукции*:
  Для $n = 2$ нам нужен 1 компаратор и $1 \geq \log_2 2$
- *Переход*:
  Пусть $\forall n' < n$ условие выполнено.
  Единственный доступный нам первый компаратор сравнивает первый элемент с элементом номер k
  Теперь есть 2 случая:
  - Они поменялись, тогда мы знаем что первый больше чем k-й. Тогда задача свелась к 2 задачам.
    Нужно вставить (теперь уже) первый элемент в отрезок массива $[2, 3, \ldots, k-1]$ и (теперь уже) k-й элемент в отрезок $[k+1, \ldots, n]$
  - Они не поменялись, тогда мы знаем что первый не больше чем k-ый. Тогда, казалось бы, можно теперь вставлять первый в отрезок $[2, \ldots, k-1]$, но нет.
    Мы не может отличить этот случай от второго и обязаны вставить k-й в $[k+1, \ldots, n]$

  Помним что мы умеем втавлять элемент в множество размера $n-1$ не менее чем за $\log_2 n$
  Тогда глубина результата будет: $1 + \max(\log_2 k - 1, \log_2 n - k \geq \log_2 n$
  Пусть $k - 1 > n - k$ (абсолютно не влияет на решение, второй случай симметрично)
  $2k - 1 > n$ (из "Пусть")
  $\log_2(2(k-1)) \geq \log_2 n$ (из неравенства с максимумом)
  $\log_2(2k-2) \geq \log_2 n$
  Тут уже очевидно что это прада.

Задача 3

Пусть k элементов из верхнего массива должны оказаться во втором.
Тогда ровно k элементов из второго массива должны оказаться в первом.
Так как массивы отсорчены (пусть сортируем по возрастанию), то эти k элементов в первом массиве находятся строго в конце, а во втором массиве — строго в начале.
Теперь очевидно соединим соответствующие индексы компараторами. Если компараторы будут соединять лишние индексы, то хуже не будет, так как если первый элемент находится в своей части, и второй тоже, то поменяться они не могут.