Syntaks og semaktik - kursusgang 01 af Peter Viggo Printz Madsen

Mængdeoperationen $A \times B$ - kartesisk produkt/krydsprodukt

Lad A og B være mængder. Da kan vi definere

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$ betegner altså de par hvor 1.komponent er i A og 2.komponent er i B. Det kaldes det kartesiske produkt eller krydsproduktet.

Definition af sprog

Definition: Givet et alfabet Σ, er et sprog L over Σ en mængde af strenge over Σ.

Definition: Et alfabet Σ er en endelig mængde tegn.

Definition: Givet et alfabet Σ, er en streng over Σ en endelig følge af tegn fra Σ.

Transitionsfunktionen $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

δ betegner transitions-funktionen der tager som input det kartesiske produkt, hvor 1.komponent er i Q, hvor Q er tilstandsmængden for en DFA(Deterministic finite automaton/deterministisk endelig automat), og hvor 2.komponent er i Σ, der er alfabetet given en DFA. Transitions-funktionen kan ses som f(x) = y, hvor x er parret(det kartesiske produkt) og y er tilstanden Q der er i tilstandsmængden.

Definition af et regulært sprog

Sproget L er et regulært sprog hvis $\exists$ DFA $A : L = L(A)$. Med andre ord er et sprog L, regulært hvis og kun hvis der findes mindst én endelig automat A der kan genkende sproget($L = L(A)$).

De regulære operationer

De regulære operationer bruges til at bygge nye regulære sprog med. Ved hjælp af de regulære operationer er det muligt at bygge ALLE regulære sprog.

Lad A og B være sprog. Vi definere de regulære operationer: forenings $(L_1 \cup L_2)$, konkatenering $(L_1 \circ L_2)$, og kleene stjerne (L^*) ved:

Forening: $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

Konkaterning: $L_1 \circ L_2 = \{w \mid \exists\, u \in L_1, \exists\, v \in L_2 \,:\, w = uv\}$

Kleene stjerne: $L^* = \{w_1 w_2 w_3 ... w_k \mid w_i \in L \;\; for \;\; 0 \leq i \leq k\}$

Da k kan være 0, er den tomme streng ALTID en del af L^*. L^* giver altid et regulært sprog med en uendelig mængde af strenge, **hvis** at $L \neq \emptyset$.

De regulære sprog er lukket under foreningsmængden $\cup$

Hvis L_1 og L_2 er regulære sprog, så er foreningsmængden $L_1 \cup L_2$ **også** et regulært sprog. Dvs. Da L_1 er et regulært sprog, så findes der en DFA A_1, så $L(A_1) = L_1$. Da L_2 er et regulært sprog, så findes der en DFA A_2, så $L(A_2) = L_2$. Så findes der en DFA A_{12}, så at A_{12} genkender $L_1 \cup L_2$, altså $L(A_{12}) = L_1 \cup L_2$. Denne DFA A_{12} kan konstrureres ved hjælp af produkt konstruktion: Vi kører de to DFA'er parallelt, det kan vises sådan her:

$DFA_{12} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$: $Q = Q_1 \times Q_2$

$q_0 = (q_{0_1}, q_{0_2})$

$\delta((q_1, q_2), a) = (r_1, r_2) \rightarrow$r$_1 = \delta_1(q_1, a)$ og $r_2 = \delta_2(q_2, a)$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$F = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1 \vee q_2 \in F_2\}$