

Boolean Algebra

Lecture 2

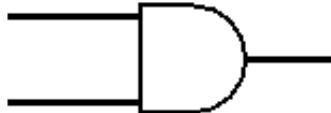

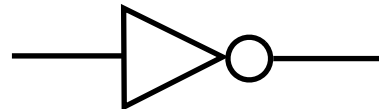
Outline

- Logic gates and Boolean expressions
- Boolean algebra

Boolean Expressions

- เราใช้ประโยคสัญลักษณ์บูลีนในการบรรยายฟังก์ชันตรรก (Logic Functions)
- ฟังก์ชันตรรกใด ๆ ก็ตาม สามารถเขียนและสร้างโดยใช้เกต AND, OR, และ NOT
- Basic Boolean Operations:
 - AND $A \cdot B$ AB
 - OR $A + B$
 - NOT \overline{A}

Basic Gates

	AND	OR	NOT																																				
Boolean	$A \bullet B$	$A + B$	\overline{A}																																				
Logic gate																																							
Truth Table	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	<table><tr><th>A</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	Y	0	1	1	0
A	B	Y																																					
0	0	0																																					
0	1	0																																					
1	0	0																																					
1	1	1																																					
A	B	Y																																					
0	0	0																																					
0	1	1																																					
1	0	1																																					
1	1	1																																					
A	Y																																						
0	1																																						
1	0																																						

Other Logic Gates

NAND

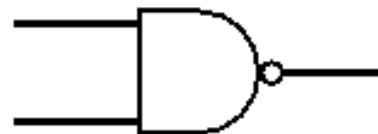
NOR

Boolean

$$\overline{A \bullet B}$$

$$\overline{A + B}$$

Logic gate



Truth Table

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Other Logic Gates

Boolean

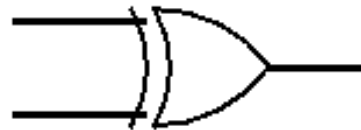
XOR

$$A \oplus B$$

XNOR

$$\overline{A \oplus B}$$

Logic gate



Truth Table

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Boolean to others: Ex 1

$$Y = (A \cdot B) + C$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Boolean to others: Ex 2

$$Y = AB + A\bar{B}C$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Boolean to others: Ex 3

$$Y = (A + B)(\bar{B} + \bar{C})$$

A	B	C	\bar{B}	\bar{C}	Y
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

Equivalent Equations

- พิจารณาสมการบูลีน 2 สมการนี้
 - $Z_1 = \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B C + A \bar{B} C + A B \bar{C}$
 - $Z_2 = A B \bar{C} + \overline{(A B)} C$
- เขียน Schematic Diagram และตารางค่าความจริงของสมการบูลีนทั้งสอง

Equivalent Equations

$$Z_1 = \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B C + A \bar{B} C + A B \bar{C}$$

A	B	C	$\bar{A} \bar{B} C$	$\bar{A} B C$	$A \bar{B} C$	$A B \bar{C}$	Z_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$$Z_2 = A B \bar{C} + (\bar{A} \bar{B}) C$$

A	B	C	$A B \bar{C}$	$(\bar{A} \bar{B}) C$	Z_2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

Boolean Minimization

- ฟังก์ชันตรรกเดียวกันสามารถเขียนได้หลายรูปแบบของสมการบูลีน
- การลดรูปสมการมีข้อดีคือ
 - ช่วยลดจำนวนเกทที่ใช้
 - ประหยัดพื้นที่ของวงจร
 - ประหยัดต้นทุน

Boolean Algebra

- ในการจัดการสมการบูลีน เราจำเป็นต้องมีกฎ
- กฎเหล่านี้เกี่ยวข้องกับข้อกำหนดต่างๆ ของตัวแปรตรรก (Logic Variables) ซึ่งจะกำหนดว่าเราสามารถทำอะไรกับตัวแปรตรรกได้บ้าง
- ทฤษฎีพีชคณิตบูลีนนี้ถูกคิดค้นโดย George Boole ในปี ค.ศ. 1854

Boolean Algebra

- พีชคณิตบูลีนประกอบไปด้วย
 - เซตของตัวแปรตรรก S
 - Binary operators 2 ตัวคือ AND และ OR
 - Unary operator 1 ตัวคือ NOT

Laws and Properties

1. สมบัติปิด (Closure): For every A, B in S

(i) $A + B \in S$

(ii) $AB \in S$

2. กฎการสลับที่ (Commutative):

(i) $A + B = B + A$

(ii) $AB = BA$

Laws and Properties

3. กฎการจัดหมู่ (Associative):

$$(i) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$(ii) \quad A(BC) = (AB)C$$

4. กฎการกระจาย (Distributive):

$$(i) \quad A + BC = (A + B)(A + C)$$

$$(ii) \quad A(B + C) = AB + AC$$

Laws and Properties

5. เอกลักษณ์ (Identities):

$$(i) \quad A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$(ii) \quad A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

6. ส่วนกลับ (Complements):

$$(i) \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$(ii) \quad A + \overline{A} = 1$$

$$(iii) \quad A\overline{A} = 0$$

Laws and Properties

7. Self Operation:

$$(i) \quad A + A = A$$

$$(ii) \quad A \cdot A = A$$

8. กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's Laws):

$$(i) \quad \overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$$

$$(ii) \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Useful Laws

9. $AB + A\bar{B} = A$

10. $A + AB = A$

11. $A + \bar{A}B = A + B$

$$AB + A\bar{B} = A(\overset{1}{\cancel{B + \bar{B}}}) = A$$

$$A + AB = A \cdot 1 + AB = A(\overset{1}{\cancel{1 + B}}) = A$$

$$A + \bar{A}B = (\overset{1}{\cancel{A + \bar{A}}})(A + B) = A + B$$

Minimization: Ex 1

$$Y = (A + \bar{B})B$$

$$= (BA) + (\cancel{B\bar{B}}) \quad 0$$

$$= AB$$

Minimization: Ex 2

$$Y = B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$$

$$= B\bar{C} + (\bar{A} + A)BC$$

$$= B\bar{C} + BC = B(\bar{C} + C)$$

$$= B$$

Minimization: Ex 3

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$$

$$= (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D)$$

$$= \bar{A}\bar{C}\bar{D}(\bar{B} + B) + \bar{A}\bar{C}D(\bar{B} + B)$$

$$= \bar{A}\bar{C}(\bar{D} + D)$$

$$= \bar{A}\bar{C}$$

Minimization: Ex 4

$$Y = (\bar{A} + BC + D)(\bar{A} + BC + \bar{D})$$

$$= (\bar{A} + BC) + \cancel{D\bar{D}}^0$$

$$= \bar{A} + BC$$