

A List of Tautologies

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg(P \wedge \neg P)$
3. $P \rightarrow P$
4. a) $P \leftrightarrow (P \vee P)$
b) $P \leftrightarrow (P \wedge P)$ idempotent laws
5. $\neg\neg P \leftrightarrow P$ double negation
6. a) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
b) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
c) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$ commutative laws
7. a) $(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$
b) $(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ associative laws
8. a) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
b) $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ distributive laws
9. a) $(P \vee \mathcal{C}) \leftrightarrow P$
b) $(P \wedge \mathcal{C}) \leftrightarrow \mathcal{C}$
c) $(P \vee \mathcal{T}) \leftrightarrow \mathcal{T}$
d) $(P \wedge \mathcal{T}) \leftrightarrow P$ identity laws
10. a) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
b) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ DeMorgan's laws
11. a) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
b) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
c) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$ equivalence
12. a) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
b) $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ implication
13. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ contrapositive
14. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathcal{C})$ reductio ad absurdum
15. a) $((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$
b) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$
c) $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$
16. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ exportation law
17. $P \rightarrow (P \vee Q)$ addition
18. $(P \wedge Q) \rightarrow P$ simplification
19. $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ modus ponens
20. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$ modus tollens
21. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ hypothetical syllogism
22. $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ disjunctive syllogism
23. $(P \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \neg P$ absurdity
24. $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$
25. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee R))$

Notes

1. \mathcal{T} refers to any statement which is a tautology.
2. \mathcal{C} refers to any statement which is a contradiction.
3. Item 21 is often called "transitivity".

$$26) P \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$$

$$27) P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$28) P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$29) \neg P \Leftrightarrow (P \rightarrow \perp)$$

$$30) \perp \Leftrightarrow P \wedge \neg P$$