Linguaggi

15: Deduzione naturale

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

10/11/2015

Outline

Deduzione

Wikipedia: "…"

Deduzione naturale: sintassi

Definiamo ora la sintassi degli alberi (di prova) per la deduzione naturale.

Note: in un albero di prova $\Gamma \Vdash F$

- la radice dell'albero è la conclusione F
- le foglie dell'albero sono ipotesi scaricate $[F]$ o meno F
  - un'ipotesi non scaricata (o globale) F deve appartenere a Γ
  - un'ipotesi scaricata $[F]$ è un'ipotesi locale e deve essere "scaricata" da un qualche passo di inferenza
- i nodi interni dell'albero debbono appartenere alla lista di passi di inferenza che stiamo per elencare

Deduzione naturale: passi di inferenza

Vi sono due tipi di passi di inferenza:

1. Regole di introduzione di un connettivo:
   ci dicono tutti i modi in cui concludere direttamente una formula con in testa un determinato connettivo
   come concludo ...?
2. Regole di eliminazione di un connettivo:
   ci dicono tutti i modi in cui utilizzare direttamente un'ipotesi con in testa un determinato connettivo
   cosa ricavo da ...?

Deduzione naturale: passi di inferenza

Usiamo la seguente sintassi per le regole di inferenza:

$$\frac{F_1 \ldots F_n}{F} \qquad (\textsc{Nome regola})$$

La formula F è la conclusione della regola.
Le formule $F_1, \ldots, F_n$ sono le premesse della regola.

La premessa F_i verrà indicata con $\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ F_i\end{matrix}$ per indicare che è possibile assumere localmente A per concludere F_i.

Una regola senza premesse ($n = 0$) si dice assioma.

Deduzione naturale: alberi di deduzione

Gli alberi di deduzione vengono indicati componendo ricorsivamente regole di inferenza. Esempio:

$$\dfrac{\dfrac{F_1 \ldots F_n}{H_1}\ (regola1) \quad \ldots \quad \dfrac{G_1 \ldots G_m}{H_l}\ (regola2)}{H}\ (regola3)$$

Nell'esempio $\dfrac{F_1 \ldots F_n}{H_1}\ (regola1)$ è un sottoalbero dell'intero albero di deduzione.

La struttura ricorsiva permette di definire funzioni per ricorsione strutturale su alberi di deduzione e di effettuare prove per induzione strutturale.

Deduzione naturale: passi di inferenza

Ogni passo di inferenza ammette sempre due letture:

1. Bottom-up (dalle premesse alla conclusione): date le premesse $F_1, \ldots, F_n$, posso concludere F
2. Top-down (dalla conclusione alle premesse): per concludere F posso ridurmi a dimostrare $F_1, \ldots, F_n$

Deduzione naturale: correttezza e invertibilità

Definizione: una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{F}$ è corretta per la logica classica/intuizionista quando $F_1, \ldots, F_n \Vdash F$ (nella rispettiva logica).

Noi saremo interessati solamente a regole corrette.

Definizione: una regola $\frac{F_1 \ldots F_n}{F}$ è invertibile nella logica classica/intuizionista quando per ogni i si ha $F \Vdash F_i$ (nella rispettiva logica).

L'invertibilità gioca un ruolo importante nella ricerca delle prove: se la regola è invertibile, può essere sempre applicata nella ricerca top-down della prova.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole di introduzione:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad (\wedge_i)$$

Lettura bottom-up: se A e B allora $A \wedge B$.

Lettura top-down: per dimostrare $A \wedge B$ debbo dimostrare sia A che B.

Scrittura informale:

...e quindi A
...e quindi B
[e quindi $A \wedge B$]

L'applicazione della regola viene spesso lasciata informalmente implicita.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole di introduzione:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad (\wedge_i)$$

Correttezza classica: $A, B \Vdash A \wedge B$ in quanto, per ogni mondo v, se $[\![A]\!]^v = [\![B]\!]^v = 1$ allora $[\![A \wedge B]\!]^v = \max\{[\![A]\!]^v, [\![B]\!]^v\} = 1$.

Invertibilità classica: se $\max\{[\![A]\!]^v, [\![B]\!]^v\} = 1$ allora $[\![A]\!]^v = [\![B]\!]^v = 1$ e quindi $A \wedge B \Vdash A$ e $A \wedge B \Vdash B$.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\dfrac{A \wedge B \qquad \begin{matrix}[A][B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\wedge_e)$$

Lettura bottom-up: se $A \wedge B$ e se ipotizzando A e B concludo C, allora C.

Lettura top-down: per dimostrare C data l'ipotesi $A \wedge B$ è sufficiente dimostrare C sotto le ipotesi A e B.

Scrittura informale:

…$A \wedge B$

[supponiamo A e anche B]

…e quindi C

[e quindi C]

L'applicazione della regola viene sempre lasciata implicita.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\frac{A \wedge B \qquad \begin{array}{c}[A][B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \quad (\wedge_e)$$

Nota: un albero di derivazione che termini applicando la regola $\wedge_e$ ha due sotto-alberi immediati. Il primo dimostra $A \wedge B$. Il secondo dimostra C usando, fra le altre, le ipotesi A e B NON ANCORA SCARICATE. È l'applicazione della regola che scarica le ipotesi dal sotto-albero.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regola di eliminazione:

$$\dfrac{A \wedge B \qquad \begin{array}{c}[A][B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \qquad (\wedge_e)$$

Correttezza classica: dimostriamo $A \wedge B, A \Rightarrow B \Rightarrow C \Vdash C$.
Basta costruire la tabella di verità.

La regola non è invertibile. Esempio: $C = \top$ e $A, B = \bot$.
La regola è intuizionisticamente (e quindi anche classicamente) invertibile se si assume $A \wedge B$: ovvio.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole alternative di eliminazione:

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \quad (\wedge_{e_2})$$

Lettura bottom-up: se $A \wedge B$ allora A (e B).
Lettura top-down: per dimostrare A (o B) basta dimostrare $A \wedge B$.
Scrittura informale:
... e quindi $A \wedge B$
[e quindi A]
Le due regole vengono quasi sempre omesse.

Deduzione naturale: $\wedge$

Regole alternative di eliminazione:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \qquad (\wedge_{e_2})$$

Correttezza classica e intuizionista: le due regole sono corrette.

Le due regole non sono invertibili: esempio $A = \top$ e $B = bot$.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Le prove si possono cercare in vari modi:

1. Bottom-up: partendo dalle ipotesi si applicano in avanti le regole fino a trovare la conclusione.
   - Pro: non si commettono mai errori
   - Cons: è molto difficile vedere le prove così perchè vi sono troppe strade che non portanto alla conclusione cercata
2. Top-down: partendo dalla conclusione si applicano indietro le regole fino a ridursi a un sottoinsieme delle ipotesi.
   - Pro: più facile trovare le dimostrazioni se si sta attenti a non sbagliarsi (= ridursi a dimostrare qualcosa di non vero)
   - Cons: è possibile sbagliarsi quando si applicano regole non invertibili
3. Strategia mista: si alternano le due strategie, tipicamente partendo con una top-down.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Come evitare errori?

1. Dopo l'applicazione top-down di una regola di inferenza non invertibile, accertarsi che la conclusione sia ancora conseguenza logica delle premesse.

   Esempio: per dimostrare $A \wedge B \vdash A$ si parte da A e lo si riduce a $A \wedge C$. Si ha $A \wedge B \not\Vdash A \wedge C$ (anche se $A \wedge B \Vdash A$).

2. Verificare di non essersi ridotti a dimostrare qualcosa che si sta già dimostrando con le stesse ipotesi (ragionamento circolare).

   Esempio: per dimostrare A ci si riduce a dimostrare $A \wedge B$ che dimostriamo riducendoci a dimostrare sia A che B.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $A \wedge B \vdash B \wedge A$
- $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$
- $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \vdash A \wedge D \wedge A$

Cercare le dimostrazioni sia usando $\wedge_e$ che usando $\wedge_{e_1}$ e $\wedge_{e_2}$. L'ultimo esercizio evidenzia la difficoltà della ricerca bottom-up delle prove.

Deduzione naturale: derivabilità

Definizione: un insieme di regole $\mathcal{R}$ è derivabile a partire da un insieme di regole $\mathcal{S}$ quando per ogni regola in $\mathcal{R}$ le cui premesse sono $F_1, \ldots, F_n$ e la cui conclusione è F si ha $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ usando solamente le regole in $\mathcal{S}$.

Nota: è la stessa nozione chiamata in precedenza riducibilità.

Teorema: se $\mathcal{R}$ è derivabile a partire da $\mathcal{S}$ allora per ogni dimostrazione ottenuta usando solo regole in $\mathcal{R}$ esiste una dimostrazione con le stesse premesse e conclusione che usa solo regole in $\mathcal{S}$.
Dimostrazione: per induzione strutturale sull'albero di derivazione. In tutti i casi, per ipotesi induttiva esistono alberi di derivazione per ognuna delle premesse che usano solo regole in $\mathcal{S}$. Per ipotesi esiste un albero di derivazione per la regola sotto esame che usa solo regole in $\mathcal{S}$. Componendo gli alberi si ottiene la prova voluta.

Deduzione naturale: derivabilità

Teorema: l'insieme $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$ è derivabile a partire dall'insieme $\{\wedge_e\}$ e viceversa.
Dimostrazione:

Prima parte: $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$ è derivabile a partire da $\{\wedge_e\}$.

$$\frac{A \wedge B \quad [A]}{A}(\wedge_e) \qquad \frac{A \wedge B \quad [B]}{B}(\wedge_e)$$

Seconda parte: $\{\wedge_e\}$ è derivabile a partire da $\{\wedge_{e_1}, \wedge_{e_2}\}$.

$$\begin{array}{c} \frac{A \wedge B}{A}(\wedge_{e_1}) \quad \frac{A \wedge B}{B}(\wedge_{e_2}) \\ \vdots \\ C \end{array}$$

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di introduzione:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad (\wedge_{i_1})$$

$$\frac{B}{A \vee B} \qquad (\wedge_{i_2})$$

Lettura bottom-up: se A (B) vale, allora vale anche $A \vee B$

Lettura top-down: per dimostrare $A \vee B$ è sufficiente dimostrare A (B)

Scrittura informale:
. . . e quindi A
[e quindi $A \vee B$]

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di introduzione:

$$\frac{A}{A \vee B} \quad (\wedge_{i_1})$$

$$\frac{B}{A \vee B} \quad (\wedge_{i_2})$$

Correttezza classica: la regola è corretta
Le due regole non sono invertibili: per esempio quando $A = \bot$ e $B = \top$

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di eliminazione:

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \qquad (\vee_e)$$

Lettura bottom-up: se vale $A \vee B$ e C vale sia quando vale A che quando vale B, allora necessariamente C vale.

Lettura top-down: per dimostrare qualunque cosa sapendo $A \vee B$ è sufficiente procedere per casi, dimostrando la stessa cosa assumendo prima che A valga e poi che valga B

Scrittura informale:
…e quindi $A \vee B$
procediamo per casi per dimostrare C
  caso A: …e quindi C
  caso B: …e quindi C
[e quindi C]

Deduzione naturale: $\vee$

Regole di eliminazione:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \quad (\vee_e)$$

Correttezza classica: la regola è corretta.

Invertibilità: la regola non è invertibile (controesempio: $C = \top$ e $A = B = \bot$. Tuttavia, quando $A \vee B$ è dimostrabile, allora la regola è banalmente invertibile intuizionisticamente (e quindi anche classicamente).

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $A \wedge B \vdash C \vee A$
- $A \vee B \vdash B \vee A$
- $A \vee (B \vee C) \vdash (C \vee B) \vee A$

Deduzione naturale: $\perp$

Regole di introduzione: NESSUNA.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\perp}{C} \qquad (\perp_e)$$

Lettura bottom-up: dal falso segue qualunque cosa.

Lettura top-down: per dimostrare qualunque cosa posso ridurmi a dimostrare un assurod.

Scrittura informale:
. . . assurdo
e quindi C

Deduzione naturale: $\bot$

Regole di introduzione: NESSUNA.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\bot}{C} \qquad (\bot_e)$$

Correttezza classica: ovvia poichè in ogni mondo v si ha $[\![\bot]\!]^v = 0$ e quindi $\bot \Vdash C$.

Correttezza intuizionista: dobbiamo fornire un programma in $[\![C]\!]^v$ assumendo l'esistenza di un $x \in [\![\bot]\!]^v$. Poichè un tale x non esiste, siamo in presenza di codice morto.

La regola non è invertibile: per esempio quando $C = \top$ si ha $\Vdash \top$ ma $\nVdash \bot$

Deduzione naturale: $\top$

Regole di introduzione:

$$\frac{}{\top} \qquad (\top_i)$$

Regola di eliminazione (INUTILE):

$$\frac{\top \quad C}{C} \qquad (\top_e)$$

Lettura bottom-up: il $\top$ è vero.

Lettura top-down: per dimostrare $\top$ non debbo fare nulla.

Scrittura informale (sempre omessa)
[$\top$ vale]

Deduzione naturale: $\top$

Regole di introduzione:

$$\frac{}{\top} \qquad (\top_i)$$

Regola di eliminazione (INUTILE):

$$\frac{\top \quad C}{C} \qquad (\top_e)$$

Correttezza intuizionista (e quindi classica): ovvia ($\star \in [\![\top]\!]^v$) e se $c \in [\![C]\!]^v$ allora $c \in [\![C]\!]^v$.

Invertibilità classica: la regola è invertibile.

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di introduzione:

$$\frac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \quad (\Rightarrow_i)$$

Lettura bottom-up: se ipotizzando A dimostro B allora $A \Rightarrow B$.

Lettura top-down: per dimostrare $A \Rightarrow B$ basta assumere A e dimostrare B.

Scrittura informale:
supponiamo A
... e quindi B
quindi $A \Rightarrow B$

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di introduzione:

$$\frac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \quad (\Rightarrow_i)$$

Correttezza intuizionista (e quindi anche classica): è una direzione del teorema di deduzione semantica!

Invertibilità intuizionista (e quindi anche classica): è l'altra direzione del teorem di deduzione semantica!

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di eliminazione:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \quad (\Rightarrow_e \text{ O MODUS PONENS})$$

Lettura bottom-up: se A e $A \Rightarrow B$, allora necessariamente B.

Lettura top-down: per dimostrare B debbo trovare un A che valga e tale per cui $A \Rightarrow B$

Scrittura informale:
da A e $A \Rightarrow B$ si ha B

Deduzione naturale: $\Rightarrow$

Regole di eliminazione:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \quad (\Rightarrow_e \text{ O MODUS PONENS})$$

Correttezza intuizionista (e quindi classica): dati $a \in [\![A]\!]^v$ e $f \in [\![A \Rightarrow B]\!]^v$ si ha $f(a)[\![B]\!]^v$.

La regola non è invertibile per esempio quando $B = \top$ e $A = \bot$. Rimane non invertibile anche sapendo che $A \Rightarrow B$ valga.

Nota: durante la ricerca top-down della prova la regola di modus ponens è la più difficile da applicare in quanto A non è in genere noto e, anche in presenza di una prova per $A \Rightarrow B$, A può non essere dimostrabile.

Deduzione naturale: ricerca delle prove

Esercizi (esempi alla lavagna):

- $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$
- $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D) \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow D \Rightarrow A$
- $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C \wedge D) \Rightarrow (B \Rightarrow D) \Rightarrow D \wedge (B \vee C)$

Deduzione naturale: $\neg$

Ricordiamoci che $\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$ per ottenere le regole per il $\neg$ come istanze delle regole per l'$\Rightarrow$.

Regole di introduzione:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A} \quad (\neg_i)$$

Lettura bottom-up: se ipotizzando A dimostro l'assurdo allora $\neg A$.

Lettura top-down: per dimostrare $\neg A$ basta assumere A e dimostrare l'assurdo.

Deduzione naturale: $\neg$

Ricordiamoci che $\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$ per ottenere le regole per il $\neg$ come istanze delle regole per l'$\Rightarrow$.

Regole di eliminazione:

$$\frac{\neg A \quad A}{\bot} \qquad (\neg_e)$$

Lettura bottom-up: è assurdo avere sia $\neg A$ che A

Lettura top-down: per dimostrare l'assurdo basta dimostrare qualcosa e il suo contrario.

Scrittura informale:
. . . e quindi $\neg A$
. . . e quindi A
assurdo!

Deduzione naturale: $\neg$

Correttezza intuizionista e classica: segue da quella delle regole per l'$\Rightarrow$.

Invertibilità intuizionista e classica per l'$\neg_i$: segue da quella della regola dell'$\Rightarrow_i$.

Invertibilità intuizionista e classica per l'$\neg_e$: ovvia in quanto $\bot \Vdash A$ e $\bot \Vdash \neg A$. La regola è comunque di difficile applicazione in quanto se non si sceglie l'A giusto, si è solo duplicato il lavoro inutilmente.

Deduzione naturale: $\neg$

ATTENZIONE: non confondere la regola $\neg_i$ con la regola di dimostrazione per assurdo (RAA) che dice qualcosa di diverso:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ (\neg_i) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\ (RAA)$$

Infatti la regola $\neg_i$ istanziata con $\neg A$ dice solo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}\ (\neg_i)$$

e $\neg\neg A \equiv A$ solamente classicamente ma non intuizionisticamente.

Deduzione naturale: $\neg$

Nota: la confusione fra $\neg_i$ e *RAA* è molto frequente presso i matematici e accentua in loro l'impressione che facendo logica intuizionista (ove la *RAA* non vale) non si riesca a dimostrare quasi nulla.

In verità la $\neg_i$ vale intuizionisticamente e, anzi, sulle proposizioni negate (non informative) sappiamo che le due logiche essenzialmente coincidono.

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista: se $\Gamma \vdash F$ allora $\Gamma \Vdash F$ in logica classica/intuizionista.

Dimostrazione: per induzione strutturale sull'albero di derivazione $\Gamma \vdash F$.

Caso A: poichè A è una foglia non cancellata, si ha $A \in \Gamma$. Pertanto $\Gamma \Vdash A$.

Caso $[A]$: impossibile in quanto un'ipotesi viene scaricata solamente da una regola.

Teorema di correttezza per la logica classica/intuizionista

Caso $\frac{T_1 \ldots T_n}{F}$ (r) dove $T_1, \ldots, T_n$ sono i sottoalberi immediati dell'albero di deduzione:
Sia T_i la derivazione $\Gamma_i \vdash F_i$. Si ha $\Gamma_i = \Gamma \cup \Delta_i$ dove Δ_i è l'insieme delle ipotesi cancellate in T_i dalla regola r. Per ipotesi induttiva, $\Gamma_i \Vdash F_i$ per ogni i. Per correttezza locale della regola r si ha $\Delta_1 \Rightarrow F_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow F_n \Vdash F$. Quindi, per il teorema di deduzione semantica e per la transitività della conseguenza semantica, si ottiene $\Gamma \Vdash F$.

NOTA: poichè l'unica assunzione sulle regole r è che siano localmente corrette, potremo in seguito aggiungere altre regole localmente corrette preservando la correttezza globale.

Teorema di deduzione sintattica

Teorema di deduzione sintattica: $A \vdash B$ sse $\vdash A \Rightarrow B$.

Dimostrazione:

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \dfrac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\ (\Rightarrow_e)$$

Deduzione naturale per la logica classica

Le regole viste fino ad ora NON sono complete per la logica classica (in quanto lo sono per la logica intuizionista).

Esempio: $\nvdash A \vee \neg A$ (principio del terzo escluso)
Esempio: $\nvdash \neg\neg A \Rightarrow A$ (base del ragionamento per assurdo)

Provare a dimostrare le formule qua sopra per convincersi dell'impossibilità di costruire una derivazione.

Deduzione naturale per la logica classica: RAA

Per essere completi rispetto alla semantica classica, basta introdurre la regola di Riduzione ad Assurdo (RAA):

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\ (RAA)$$

Note:

- La regola non è ne di introduzione, ne di eliminazione di un connettivo.
- Non avendo una regola duale (introduzione/eliminazione), un teorema classico (= dimostrato con la RAA) non si semplifica/normalizza. Meglio evitarla se possibile.
- La regola è invertibile (in quanto $A \Vdash \neg A \Rightarrow \bot$) e sempre applicabile (MALE!)

Deduzione naturale per la logica classica: RAA

Un uso frequente della RAA è il seguente schema

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{array} \qquad [\neg A]}{\bot}\,(\neg_e)}{A}\,(RAA)$$

Ovvero, per trovare una prova di A ci si riduce a cercare ancora una prova di A, ma dopo aver assunto $\neg A$.

Esercizio: dimostrare $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Deduzione naturale per la logica classica: EM

Il principio del terzo escluso (EM) è dimostrabile a partire dalla RAA:

Esercizio: $\vdash A \vee \neg A$

In generale le dimostrazioni classiche effettuate con il solo ausilio della RAA possono essere laboriose e/o anti-intuitive.

Tuttavia il principio del terzo escluso combinato con l'eliminazione dell'or fornisce uno schema di prova molto potente (analisi per casi su una variabile).

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \vdots \\ A \vee \neg A \end{matrix} \quad \begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [\neg A] \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\;(\vee_e)$$

Deduzione naturale per la logica classica: EM

Metodo generalizzato:
Sia F una formula da dimostrarsi. Ripetendo per ognuna delle variabili in $Var(F) = \{A_1, \ldots, A_n\}$ l'analisi per casi (come per il calcolo della forma normale di Shannon) ci si riduce a dimostrare F sotto a n ipotesi aggiuntive $[F_1], \ldots, [F_n]$ tali che per ogni i si ha $F_i \in \{A_i, \neg A_i\}$.

Esempio: dimostrare $A \wedge B, B \Rightarrow C \vdash A \vee C$ usando il metodo generalizzato su A e su B.

Nota: usando il metodo generalizzato in genere NON si trovano le dimostrazioni più semplici/naturali.
Tuttavia il metodo può essere usato meccanicamente per decidere se $\vdash F$ (vedi teorema di completezza nei prossimi lucidi). L'albero di deduzione ottenuto è ancora una volta esponenziale nel numero delle variabili.

Teorema di completezza per la logica classica

Teorema di COMPLETEZZA DEBOLE per la logica classica: per ogni Γ, F, con Γ finito, se $\Gamma \Vdash F$ in logica proposizionale classica allora $\Gamma \vdash F$ (potendo usare anche la RAA).

Nota: il teorema si dice di completezza debole per via della limitazione a contesti Γ finiti. Per i teoremi di deduzione sintattia/semantica, il teorema di completezza debole si può riformulare come: se $\Vdash F$ allora $\vdash F$.

Corollario (teorema di COMPLETEZZA FORTE per la logica classica): per ogni Γ, F, se $\Gamma \Vdash F$ allora $\Gamma \vdash F$.
Dimostrazione del corollario: sia $\Gamma \Vdash F$. Per il teorema di compattezza esiste $\Delta \subset \Gamma$, Δ finito tale che $\Delta \Vdash F$. Per il teorema di completezza debole si ha $\Delta \vdash F$ e quindi $\Gamma \vdash F$.

Teorema di completezza per la logica classica

Osservazioni:

- Dal teorema di completezza debole e da quello di compattezza deduciamo il teorema di completezza forte. Poichè la prova di quello di compattezza non è costruttiva (= la meta-logica è classica), NON OTTENIAMO ALCUN ALGORITMO CHE DATO Γ E F RESTITUISCA UN ALBERO DI PROVA $\Gamma \vdash F$.
- Viceversa, forniremo ora una prova costruttiva del teorema di completezza debole (= la meta-logica è intuizionista), OTTENENDO UN ALGORITMO CHE DATO Γ FINITO E F RESTITUISCE UN ALBERO DI PROVA $\Gamma \vdash F$.
- La complessità dell'algoritmo sarà, ancora una volta, esponenziale nel numero di atomi che occorrono nelle formule.

Teorema di completezza per la logica classica

Dimostrazione del teorema di completezza debole per la logica classica.

Dimostriamo il teorema nella sua forma equivalente se $\Vdash F$ allora $\vdash F$.

La prima fase della dimostrazione consiste nell'applicare il metodo generalizzato (slide 55) per ridursi, tramite il principio di EM (e quindi tramite la RAA), a costruire 2^n alberi di prova $\Delta_i \vdash F$ ove $n = |Var(F)| = |\{A_1, \ldots, A_n\}|$ e l'i-esimo contesto Δ_i è in relazione come segue con l'i-esima riga v_i della tabella di verità per $\Vdash F$: $\Delta_i = A_1^*, \ldots, A_n^*$ dove per ogni j si ha $A_j^* = A_j$ se $v_i(A_j) = 1$ e $A_j^* = \neg A_j$ se $v_i(A_j) = 0$.

Poichè per ipotesi $\Vdash F$ si ha che, per ogni i, $v_i \Vdash F$. Dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash F$ per ogni i.

Teorema di completezza per la logica classica

Lemma: per ogni F, per ogni i e per ogni v_i e Δ_i definiti come sopra, si ha

1. se $v_i \Vdash F$ allora $\Delta_i \vdash F$
2. se $v_i \nVdash F$ allora $\Delta_i \vdash \neg F$

Nota: la dimostrazione del lemma è costruttiva.

Dimostrazione: per induzione strutturale su F.

Caso A_j:

1. se $v_i \Vdash A_j$ allora $v_i(A_j) = 1$ e quindi $A_j \in \Delta_i$ e $\Delta_i \vdash A_j$
2. se $v_i \nVdash A_j$ allora $v_i(A_j) = 0$ e quindi $\neg A_j \in \Delta_i$ e $\Delta_i \vdash \neg A_j$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $F_1 \wedge F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1, 2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \nVdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \wedge F_2$ o $v_i \nVdash F_1 \wedge F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \wedge F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash F_2$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ F_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ F_2\end{array}}{F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_i)$$

2. Caso $v_i \nVdash F_1 \wedge F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = 0$ e quindi vi è un F_h con $h \in \{1, 2\}$ t.c. $[\![F_h]\!]^v = 0$.

Teorema di completezza per la logica classica

Per ipotesi induttiva $\Delta_i \vdash \neg F_h$ e quindi

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_h\end{array} \qquad \dfrac{[F_1 \wedge F_2]}{F_h}\ (\wedge_{e_h})}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg(F_1 \wedge F_2)}\ (\neg_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $F_1 \vee F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1,2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \nVdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \vee F_2$ o $v_i \nVdash F_1 \vee F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \vee F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \vee F_2]\!]^v = \max\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi vi è un $h \in \{1,2\}$ t.c. $[\![F_h]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_h$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ F_h\end{matrix}}{F_1 \vee F_2}\ (\vee_{i_h})$$

2. Caso $v_i \nVdash F_1 \vee F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \vee F_2]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 0$.

Teorema di completezza per la logica classica

Per ipotesi induttiva $\Delta_i \vdash \neg F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$ e quindi

$$\dfrac{\dfrac{[F_1 \vee F_2] \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg F_1\end{matrix} \qquad [F_1]}{\bot} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg F_2\end{matrix} \qquad [F_2]}{\bot}}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg(F_1 \vee F_2)}\;(\neg_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $\neg F$:
Per ipotesi induttiva si ha

1. se $v_i \Vdash F$ allora $\Delta_i \vdash F$
2. se $v_i \not\Vdash F$ allora $\Delta_i \vdash \neg F$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash \neg F$ o $v_i \not\Vdash \neg F$.

1. Caso $v_i \Vdash \neg F$ o, equivalentemente $[\![\neg F]\!]^v = 1$ e quindi $[\![F]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash \neg F$.
2. Caso $v_i \not\Vdash \neg F$ o, equivalentemente $[\![\neg F]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F$:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg F] \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ F\end{array}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg F}\,(\neg_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $F_1 \Rightarrow F_2$:
Per ipotesi induttiva, per ogni $h \in \{1, 2\}$ si ha

1. se $v_i \Vdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash F_h$
2. se $v_i \nVdash F_h$ allora $\Delta_i \vdash \neg F_h$

Procediamo per casi su $v_i \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ o $v_i \nVdash F_1 \Rightarrow F_2$.

1. Caso $v_i \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v = \max\{1 - [\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$ e quindi o $[\![F_1]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash \neg F_1$, oppure $[\![F_2]\!]^v = 1$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_2$.
   Vedi slide successiva per ambedue i casi.
2. Caso $v_i \nVdash F_1 \Rightarrow F_2$ o, equivalentemente $[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v = 0$ e quindi $[\![F_1]\!]^v = 1$ e $[\![F_2]\!]^v = 0$ e, per ipotesi induttiva, $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$. Vedi slide dopo la prossima.

Teorema di completezza per la logica classica

Casi $\Delta_i \vdash \neg F_1$ e $\Delta_i \vdash F_2$, dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash F_1 \Rightarrow F_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg F_1\end{array} \quad [F_1]}{\bot}\ (\neg_e)}{F_2}\ (\bot_e)}{F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow_i) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ F_2\end{array}}{F_1 \Rightarrow F_2}\ (\Rightarrow_i)$$

Teorema di completezza per la logica classica

Caso $\Delta_i \vdash F_1$ e $\Delta_i \vdash \neg F_2$, dobbiamo dimostrare $\Delta_i \vdash \neg(F_1 \Rightarrow F_2)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg F_2\end{matrix} \qquad \dfrac{[F_1 \Rightarrow F_2] \qquad \begin{matrix}\vdots\\ F_1\end{matrix}}{F_2}\,(\Rightarrow_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(F_1 \Rightarrow F_2)}\,(\neg_i)
$$

Qed.

Correttezza, completezza, compattezza.

Abbiamo già visto: completezza debole $\wedge$ compattezza $\Rightarrow$ completezza forte.

Vale anche:

Teorema: completezza forte $\wedge$ correttezza $\Rightarrow$ compattezza.
Dimostrazione: siano Γ ed F tale che $\Gamma \Vdash F$. Per il teorema di completezza forte si ha $\Gamma \vdash F$, ovvero esiste un albero di derivazione la cui radice è F e le cui foglie sono un insieme finito $\Delta \subseteq \Gamma$. Per correttezza si ha $\Delta \Vdash F$. Qed.

Osservazione: il precedente teorema ci dice che ogni prova costruttiva del teorema di completezza forte ci darebbe una prova costruttiva (un algoritmo) per il teorema di compattezza. Non esistono prove del genere perchè si dimostra la non esistenza degli algoritmi relativi.