Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z)) \vdash ((\neg X\vee\neg Y) \vee Z)$$

Решение:

Преобразуем правую формулу, используя определение и коммутативность дизъюнкции :

$$((\neg X\vee\neg Y) \vee Z) = (\neg Z \rightarrow(\neg\neg X \rightarrow \neg Y)$$

Следовательно, необходимо доказать:

$$(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z)) \vdash (\neg Z \rightarrow(\neg\neg X \rightarrow \neg Y))$$

Согласно теореме дедукции, достаточно доказать, что:

$$(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z), \neg Z, \neg\neg X \vdash \neg Y$$

а затем дважды применить теорему дедукции.

Следовательно, будем доказывать, что из гипотез $(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z)$, $\neg Z$, $\neg\neg X$, выводимо $\neg Y$

1. $(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z)$	*Гипотеза*
2. $\neg Z$	*Гипотеза*
3. $\neg\neg X$	*Гипотеза*
4. $\neg\neg X\&\neg Z = \neg(\neg X\vee Z)$	*свойства конъюнкции (2), (3),* закон Де Моргана
5. $\neg(Y\&\neg Z) = \neg Y \vee \neg\neg Z = \neg\neg Z \vee\neg Y$	*MP (1)(4),* закон Де Моргана
6. $\neg\neg\neg Z\rightarrow\neg Y$	*свойства конъюнкции (5)*
7. $\neg\neg\neg Z$	*R3 (2)*
8. $\neg Y$	*MP (6)(7)*

$$(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z), \neg Z, \neg\neg X \vdash \neg Y$$

Дважды применив теорему дедукции, то есть устраняя вторую и третью гипотезы, получим требуемую секвенцию

$$(\neg(\neg X\vee Z) \rightarrow \neg(Y\&\neg Z) \vdash Z\vee(\neg X\vee\neg Y)$$