Цель работы: получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

1 Теоретическая часть

Задана математическая модель.
Уравнение для функции $T(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dT}{dx}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) = 0 \tag{1}$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} x = 0, \ -k(0)\frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, \ -k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases} \tag{2}$$

Функции $k(x), \alpha(x)$ заданы:

$$k(x) = \frac{a}{x - b} \tag{3}$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d} \tag{4}$$

Константы a, b следует найти из условий $k(0) = k_0, k(l) = k_N$, а константы c, d из условий $\alpha(0) = \alpha_0, \alpha(l) = \alpha_N$.

$$a = -k_0 b \tag{5}$$

$$b = \frac{k_N l}{k_N - k_0} \tag{6}$$

$$c = -\alpha_0 d \tag{7}$$

$$d = \frac{\alpha_0 l}{\alpha_N - \alpha_0} \tag{8}$$

Разностная схема

$$\begin{aligned} &A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, 1 \le n \le N-1 \\ &K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \\ &K_N y_N + M_N y_{N-1} = P_N \end{aligned} \tag{9}$$

, где

$$A_n = \frac{x_{n+\frac{1}{2}}}{h}, \tag{10}$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h, \tag{11}$$

$$C_n = \frac{x_{n-\frac{1}{2}}}{h}, \tag{12}$$

$$D_n = f_n h \tag{13}$$

Для вычисления используем метод средних:

$$x_{n\pm\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n\pm1}}{2} \tag{14}$$

Система решается в два прохода: прямой и обратный.
В прямом проходе вычисляем прогоночные коэффициенты ε и η. Начальные значения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{M_0}{K_0} \\ \eta_1 &= \frac{P_0}{K_0} \end{aligned} \tag{15}$$

Вычисляем массивы прогоночных коэффициентов ε, η:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \frac{C_n}{B_n - A_n\varepsilon_n} \\ \eta_{n+1} &= \frac{D_n + A_n\eta_n}{B_n - A_n\varepsilon_n} \end{aligned} \tag{16}$$

Обратный проход.
Определим y_N - значение функции в последней точке:

$$y_N = \frac{P_N - M_N\eta_N}{K_N + M_N\varepsilon_N} \tag{17}$$

По основной прогоночной формуле находятся все значения неизвестных y_n:

$$y_n = \varepsilon_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1} \tag{18}$$

Таким образом, массив, полученный после прогонки и есть искомый массив T(x).

Краевые условия

Обозначим:

$$\begin{aligned} &F = -k(x)\frac{dT}{dx} \\ &p(x) = \frac{2}{R}\alpha(x) \\ &f(x) = \frac{2T_0}{R}\alpha(x) \\ &p_n = p(x_n),\ f_n = f(x_n) \end{aligned} \tag{19}$$

Разностные аналоги краевых условий при $x = 0$ (из лекции № 7):

$$\left(x_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8}p_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{4}p_0\right)\cdot y_0 - \left(x_{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{8}p_{\frac{1}{2}}\right)\cdot y_1 = \left(hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{\frac{1}{2}} + f_0)\right) \tag{20}$$

Разностные аналоги краевых условий при $x = l$:

Примем простую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} p_{\frac{1}{2}} &= \frac{p_0 + p_1}{2} \\ f_{\frac{1}{2}} &= \frac{f_0 + f_1}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

Проинтегрируем уравнение (1) на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$ с учетом замен (19).

$$-\int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N}\frac{dF}{dx}dx - \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N}p(x)T\,dx + \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N}f(x)dx = 0$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$F_{N-\frac{1}{2}} - F_N - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-\frac{1}{2}} + p_Ny_N}{4}h + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h = 0$$

Учтем, что

$$F_{N-\frac{1}{2}} = x_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1} - y_N}{h}$$

$$F_N = \alpha_N(y_N - T_0)$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_N + y_{N-1}}{2}$$

После подстановки и приведения подобных получаем:

$$\left(-\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \alpha_N - \frac{2p_N - 1}{16}h\right)\cdot y_N + \left(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{2p_N - 1}{16}h\right)\cdot y_{N-1} = -\alpha_NT_0 - \frac{h}{4}\left(f_{N-\frac{1}{2}} + f_N\right) \tag{22}$$

Заданы начальные параметры:

$k_0 = 0.4$ Вт/см К,
$k_N = 0.1$ Вт/см К,
$\alpha_0 = 0.05$ Вт/см2 К,
$\alpha_N = 0.01$ Вт/см2 К,
$l = 10$ см,
$T_0 = 300$К,
$R = 0.5$ см,
$F_0 = 50$ Вт/см2.

Физическое содержание задачи

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l , причем $R << l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Ось x направлена вдоль оси цилиндра и начало координат совпадает с левым торцем стержня. Слева при $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком . Стержень обдувается воздухом, температура которого равна T_0 . В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и поверхности правого торца при $x = l$. Функции $k(x), \alpha(x)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве,.

2 Практическая часть

В листинге 1 представлен код программы:

Листинг 1: Листинг программы

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи
def k(x):
    return a / (x - b)

def alpha(x):
    return c / (x - d)


def p(x):
    return 2 * alpha(x) / R

def f(x):
    return 2 * alpha(x) * T0 / R


# метод средних
def x_plus_half(x):
    return (k(x) + k(x + h)) / 2

def x_minus_half(x):
    return (k(x) + k(x - h)) / 2


# коэффициенты разностной схемы
def A(x):
    return x_plus_half(x) / h

def C(x):
    return x_minus_half(x) / h

```

```
def B(x):
    return A(x) + C(x) + p(x) * h

def D(x):
    return f(x) * h


# левое граничное условие
def left_boundary_condition():
    K0 = x_plus_half(0) + h * h * (p(0) + p(h)) / 16 + h * h * p(0) / 4
    M0 = -x_plus_half(0) + h * h * (p(0) + p(h)) / 16
    P0 = h * F0 + h * h / 4 * ((f(0) + f(h)) / 2 + f(0))
    return K0, M0, P0

# правое граничное условие
def right_boundary_condition():
    KN = -x_minus_half(l) / h - aN - p(l) * h / 4 - ((p(l) + p(l - h)) *
        h) / 16
    MN = x_minus_half(l) / h - ((p(l) + p(l - h)) * h) / 16
    PN = - aN * T0  -  h * (f(l) + f(l - h) + f(l)) / 8
    return KN, MN, PN


if __name__ == "__main__":
    K0 = 0.4
    KN = 0.1
    a0 = 0.05
    aN = 0.01
    l = 10
    T0 = 300
    R = 0.5
    F0 = 0
    h = 1e-3

    # параметры коэффициентов теплопроводности и теплоотдачи
    b = (KN * l) / (KN - K0)
    a = - K0 * b
    d = (aN * l) / (aN - a0)
    c = - a0 * d

    K0, M0, P0 = left_boundary_condition()
    KN, MN, PN = right_boundary_condition()

    # прямой ход
    # массивы прогоночных коэффициентов
    eps = [0]
    eta = [0]

    eps1 = -M0 / K0
    eta1 = P0 / K0

    eps.append(eps1)
    eta.append(eta1)

    x = h
    n = 1
    while x + h < l:
        eps.append(C(x) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
        eta.append((A(x) * eta[n] + D(x)) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
        n += 1
        x += h
```

```
    # обратный ход
    t = [0] * (n + 1)
    # значение функции в последней точке
    t[n] = (PN - MN * eta[n]) / (KN + MN * eps[n])

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        t[i] = eps[i + 1] * t[i + 1] + eta[i + 1]

    x = [i for i in np.arange(0, l, h)]

    plt.plot(x, t[:-1])
    plt.xlabel("X, cm")
    plt.ylabel("T, K")
    plt.grid()
    plt.show()
```

Результат работы программы

1. График зависимости температуры $T(x)$ от координаты x при заданных выше параметрах.

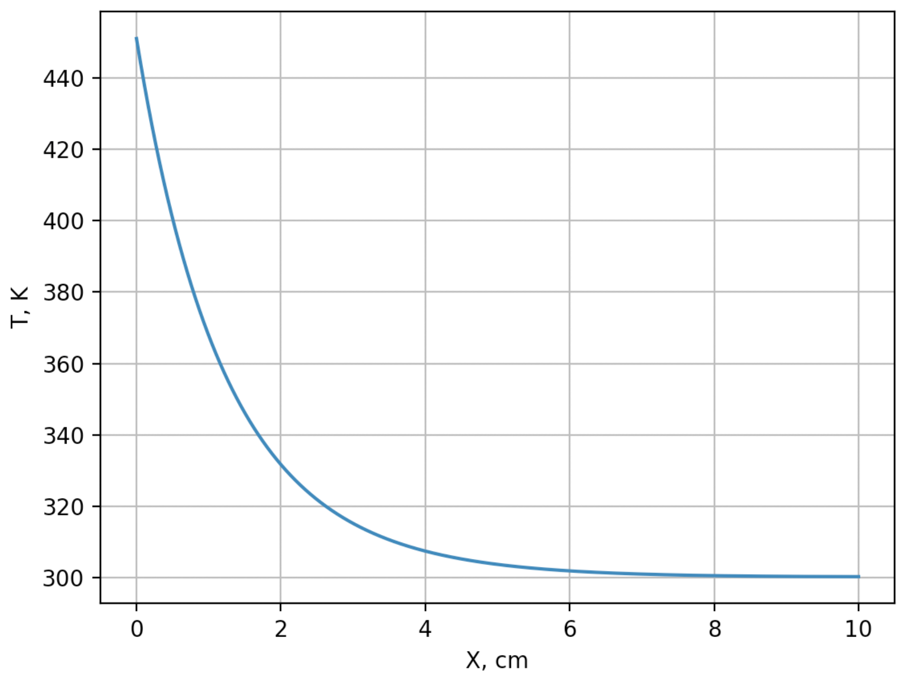

Рис. 1: График зависимости температуры $T(x)$ от координаты x при заданных выше параметрах

2. График зависимости $T(x)$ при F_0 = -10 Вт/см2.

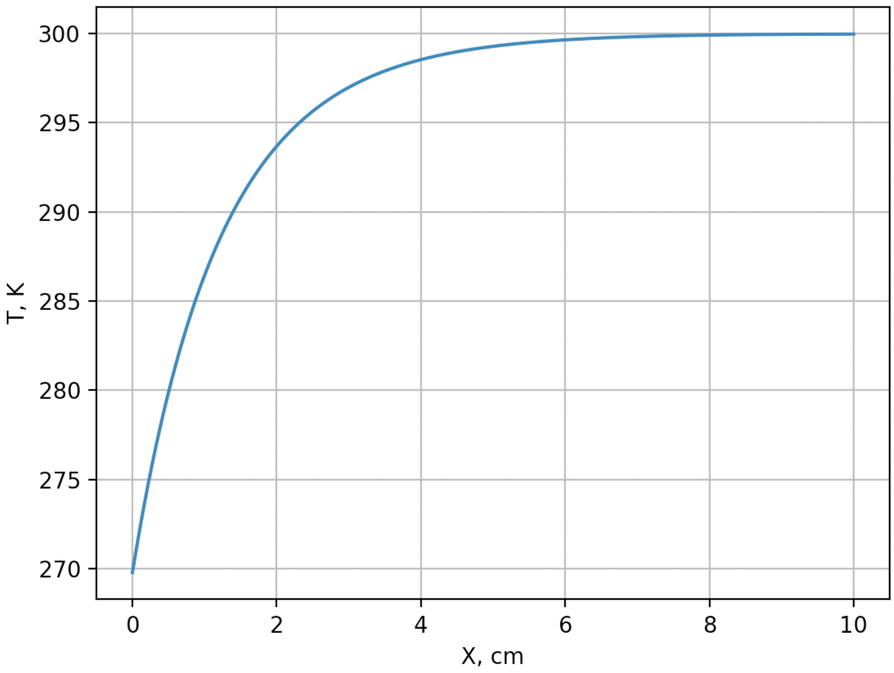

Рис. 2: График зависимости $T(x)$ при F_0 = -10 Вт/см2

3. График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях $\alpha(x)$ (например, в 3 раза).

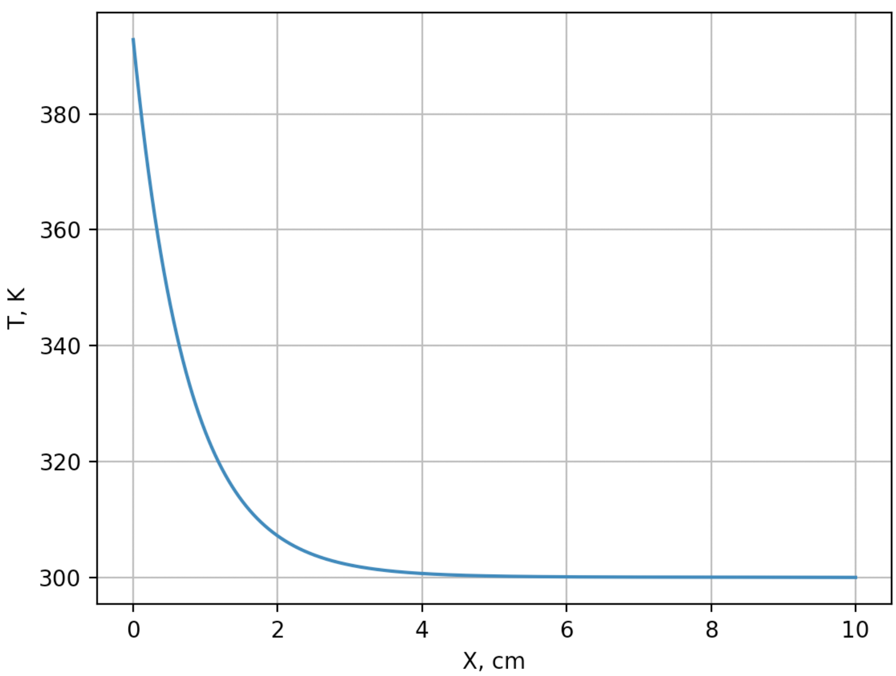

Рис. 3: График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях $\alpha(x)$ (например, в 3 раза)

4. График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$.

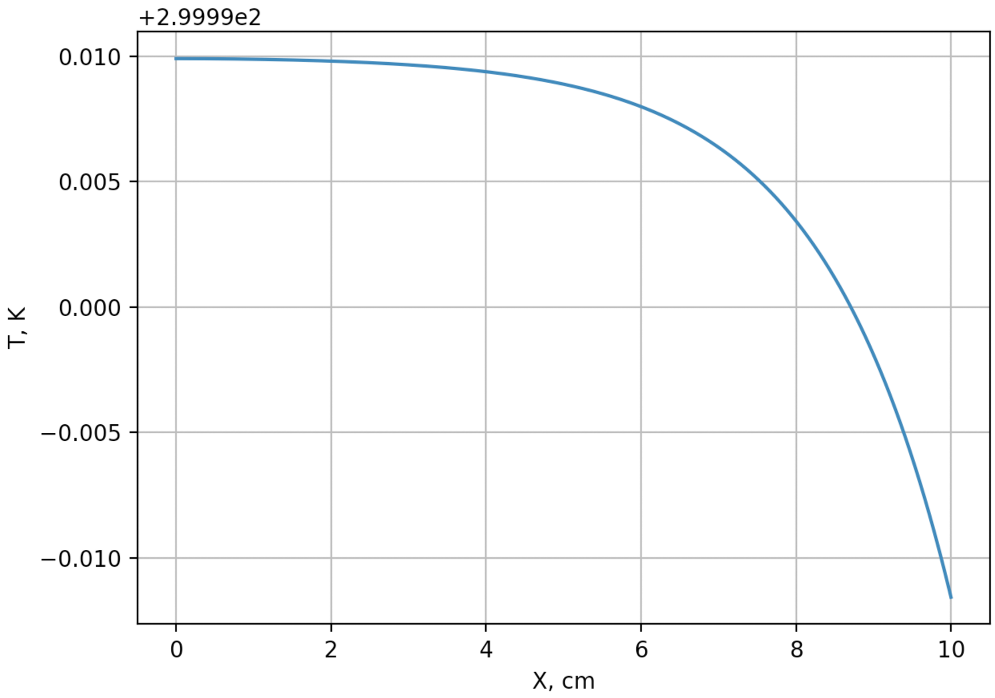

Рис. 4: График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$

3 Ответы на вопросы

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?
   Увеличить коэффициент теплоотдачи (α_0, α_N). Стержень будет отдавать больше тепла, увеличится скорость понижения температуры.

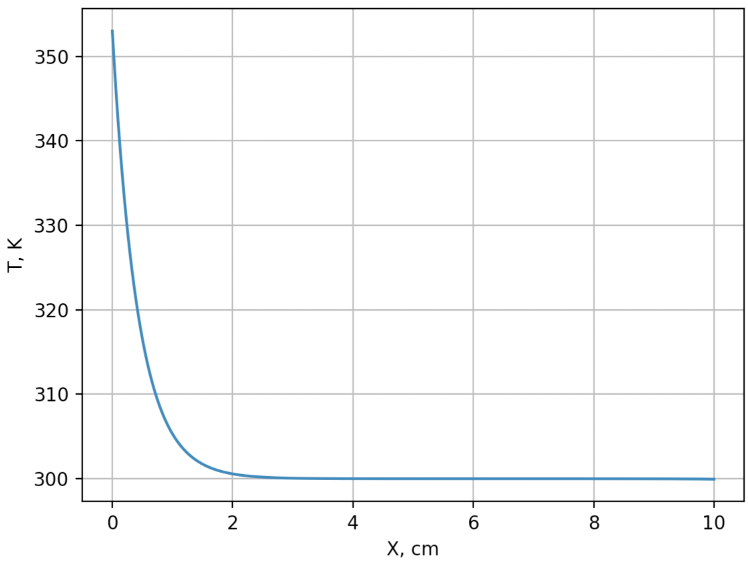

Рис. 5: График зависимости $T(x)$ при $\alpha_0 = 0.5, \alpha_N = 0.1$

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$

$$-k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T),$$

где $\varphi(T)$ заданная функция.

Построим разностную схему методом разностной апроксимации на равномерной сетке с шагом h.

Аппроксимируем производную:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(x) - T(x-h)}{h}$$

При $x = l$:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_l - T_{l-1}}{h}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-k_l\frac{T_l - T_{l-1}}{h} = \alpha_N(T_l - T_0) + \varphi(T_l)$$

$$-k_lT_l + k_lT_{l-1} = \alpha_N hT_l - \alpha_N hT_0 + \varphi(T_l)h$$

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_lT_{l-1} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0 \tag{23}$$

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое условие линейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в п.2.

Для прямого хода при $x = 0$ начальные прогоночные коэффициенты ε, η равны:

$$\varepsilon_1 = -\frac{M_0}{K_0}$$
$$\eta_1 = \frac{P_0}{K_0}$$

Вычислим все прогоночные коэффициенты:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}$$
$$\eta_{n+1} = \frac{D_n + A_n\eta_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}$$

Находим y_N путем решения уравнения (23), полученного в п. 2, методом дихотомии. Обратным ходом найдем все коэффициенты до y_0.

Все значения неизвестных y_n находятся по основной прогоночной формуле:

$$y_n = \varepsilon_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1}$$

4. Опишите алгоритм определения единственного значения сеточной функции y_p в одной заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок (лекция №8). Краевые условия линейные.

Обозначим $i = p$, $0 < p < N$.

Правая прогонка.
Область: $0 \leq i \leq p + 1$
Прогоночные коэффициенты α_i, β_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{C_i}{B_i - \alpha_i A_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + D_i}{C_i - \alpha_i A_i}$$

Левая прогонка.
Область: $p \le i \le N$
Прогоночные коэффициенты ε_i, η_i:

$$\varepsilon_i = \frac{C_i}{B_i - \varepsilon_{i+1}A_i}$$

$$\eta_i = \frac{A_i\eta_{i+1} + D_i}{B_i - \varepsilon_{i+1}A_i}$$

Тогда при $i = p$:

$$y_p = \alpha_{p+1}y_{p+1} + \beta_{p+1},$$

$$y_{p+1} = \varepsilon_{p+1}y_p + \eta_{p+1},$$

$$y_p = \frac{\beta_{p+1} + \alpha_{p+1}\eta_{p+1}}{1 - \alpha_{p+1}\varepsilon_{p+1}}$$

Вывод

В ходе лабораторной работы были получены навыки разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.