Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Тема Приближенный аналитический метод Пикара

Студент Оберган Т.М.

Группа ИУ7-65Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2020 г.

Целью данной лабораторной работы является анализ и сравнение численных методов и приближенного аналитического метода Пикара.

Существует задача Коши

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(\varepsilon) = n \end{cases}$$

Аналитического решения нет. Эту задачу можно решить методом Пикара:

$$y^{(1)}(x) = n + \int_0^x f(t, y^{(i-1)}(t))dt$$

$$y^{(0)} = n$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2]dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2]dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

$$y^{(4)}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}\right)^2]dt$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + \frac{2x^{15}}{93555} + \frac{2x^{19}}{3393495} + \frac{2x^{19}}{2488563} + \frac{2x^{23}}{86266215} + \frac{x^{23}}{99411543} + \frac{2x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}$$

Также эту задачу можно решить, используя численные методы:

Явная схема: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Неявная схема: $y_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Рассмотрим неявную схему на примере:

$$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2)$$

$$hy_{n+1}^2 - y_{n+1} + (y_n + hx_{n+1}^2) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 * h * (y_n + h(x_n + h)^2)$$

$$y_{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2h}$$

Ниже приведен листинг реализованных методов.

Листинг 1.1: явная схема Эйлера
```
def euler(n, h, x, y):
    y_out = []
    for i in range(n):
        try:
            y += h * func(x, y)
            y_out.append(y)
            x += h
        except OverflowError:
            y_out.append('overflow')
            for j in range(i, n-1):
                y_out.append('-----')
            break
    return y_out
```

Листинг 1.2: неявная схема Эйлера
```
def implicit_euler(n, h, x, y):
    y_out = [y]
    for i in range(n):
        D = 1 - 4*h*(y + h*((x + h)**2))
        if D < 0:
            y_out.append('D < 0')
            for j in range(i, n-2):
                y_out.append('-----')
            break
        y = (1 - sqrt(D)) / (2*h)
        x += h
        y_out.append(y)
    return y_out
```

Листинг 1.3: метод Пикара

```
def picar(n, h, x):
    def f1(a):
        return a ** 3 / 3
    def f2(a):
        return f1(a) + a ** 7 / 63
    def f3(a):
        return f2(a) +  (a ** 11) * (2 / 2079) + (a ** 15) / 59535
    def f4(a, f3):
        return f3 + (a ** 15)*(2 / 93555) + (a ** 19)*(2 / 3393495) +

(a ** 19)*(2 / 2488563) + (a ** 23)*(2 / 86266215) + (a ** 23)*(1 / 99411543) +
(a ** 27)*(2 / 3341878155) + (a ** 31)*(1 / 109876902975)

    y_out = [[0, 0]]
    for i in range(n-1):
        x += h
        y_f3 = f3(x)
        y_out.append([y_f3, f4(x, y_f3)])
    return y_out
```