

**Цель работы:** Получение навыков проведения исследований компьютерной математической модели, построенной на квазилинейном уравнении параболического типа.

Исследование проводится с помощью программы, созданной в лабораторной работе №4.

## Исходные данные

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции  $T(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT}{dx}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) = c(T)\frac{dT}{dt}$$

2. Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, T(x, 0) = T_0 \\ x = 0, -k(0)\frac{dT}{dx} = F_0, \\ x = l, -k(T(l))\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases}$$

3. Функции  $k(T), \alpha(x), p(x), f(x)$  заданы своими константами

$$k(T) = a_1(b_1 + c_1 \cdot T^{m_1})$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d}$$

$$p(x) = \frac{2}{R} \cdot \alpha(x)$$

$$f(x) = \frac{2T_0}{R} \cdot \alpha(x)$$

4. Значения параметров (все размерности согласованы)

$$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2},$$

$$\alpha_1 = 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 2.049, \quad b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 0.528 \cdot 10^5, \quad m_2 = 1$$

$$\alpha_0 = 0.05$$

$$\alpha_N = 0.01$$

$$l = 10$$

$$T_0 = 300$$

$$R = 0.5$$

5. Поток тепла  $F(t)$  при  $x = 0$

$$F(t) = \frac{F_{max}}{t_{max}} t e^{-(t/t_{max}-1)},$$

где  $F_{max}$  – амплитуда импульса потока,  $t_{max}$  – время достижения амплитуды.

# Результаты работы

1. Провести исследование по выбору оптимальных шагов по времени и пространству. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Рассмотреть влияние на получаемые результаты амплитуды импульса  $F_{max}$  и времени  $t_{max}$  определяют крутизну фронтов и длительность импульса).

Примем  $F_{max} = 50$  и  $t_{max} = 10$ .

Для выбора оптимального шага по времени ( $\tau$ ) будем уменьшать шаги и анализировать сходимость, как это было сделано в лабораторной работе №1.

1	0.1	0.01	0.001
672.3977	425.7617	421.8308	423.7732
620.8252	393.5921	389.2378	390.7338
577.2762	369.8432	365.5170	366.6812
540.2724	352.1433	348.0722	348.9831
508.6609	338.8774	335.1692	335.8830
481.5307	328.9090	325.6067	326.1650
458.1537	321.4171	318.5271	318.9619
437.9420	315.7958	313.3043	313.6407
420.4164	311.5914	309.4725	309.7307
405.1828	308.4599	306.6814	306.8777
391.9144	306.1393	304.6657	304.8134
380.3385	304.4294	303.2239	303.3337
370.2256	303.1768	302.2034	302.2840
361.3814	302.2651	301.4890	301.5475

Рис. 1: Шаг по времени

Оптимальный шаг  $\tau = 0.01$ .

Аналогичным образом найдем оптимальный шаг по пространству ( $h$ ):

0.03	0.025	0.02	0.015	0.01	0.005
300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000	300.0000
300.0680	300.0789	300.0933	300.1119	300.1345	300.1545
300.1985	300.2282	300.2656	300.3109	300.3591	300.3930
300.3865	300.4405	300.5057	300.5798	300.6501	300.6922
300.6277	300.7095	300.8047	300.9065	300.9944	301.0411
300.9180	301.0298	301.1554	301.2824	301.3837	301.4335
301.2540	301.3968	301.5520	301.7013	301.8128	301.8648
301.6324	301.8066	301.9898	302.1585	302.2780	302.3317
302.0505	302.2556	302.4652	302.6506	302.7763	302.8316
302.5056	302.7409	302.9749	303.1747	303.3058	303.3625
302.9955	303.2601	303.5165	303.7288	303.8644	303.9226
303.5182	303.8108	304.0879	304.3111	304.4508	304.5104
304.0718	304.3912	304.6872	304.9202	305.0637	305.1248

Рис. 2: Шаг по пространству

Оптимальный шаг  $h = 0.01$ .

В дальнейшем в ходе работы будут использованы шаги  $\tau = 0.01$  и  $h = 0.01$ .

Рассмотрим влияние на получаемые результаты амплитуды импульса и времени достижения амплитуды.

На рисунке 3 представлен график при значениях  $F_{max} = 50$  и  $t_{max} = 1$

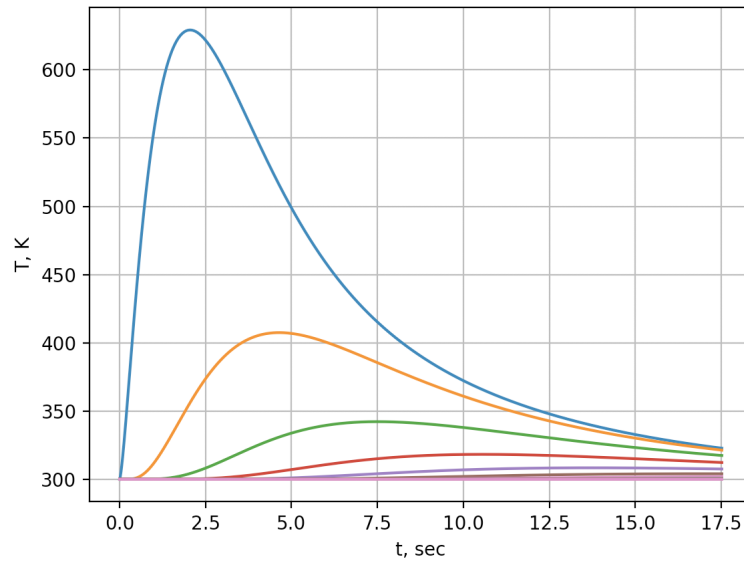


Рис. 3:  $F_{max} = 50, t_{max} = 1$

На рисунке 4 представлен график при значениях  $F_{max} = 50$  и  $t_{max} = 10$ .

При изменении  $t_{max}$  меняется время импульса и чем больше  $t_{max}$ , тем дольше стержень получает тепло и тем сильнее нагревается.

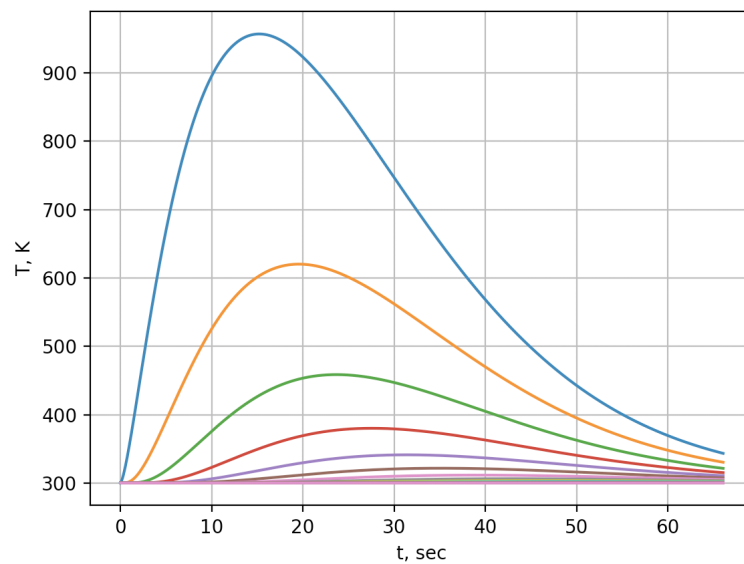


Рис. 4:  $F_{max} = 50, t_{max} = 10$

На рисунке 5 представлен график при значениях  $F_{max} = 100$  и  $t_{max} = 1$ .

При увеличении  $F_{max}$  увеличивается максимальная температура, на которую может нагреться стержень.

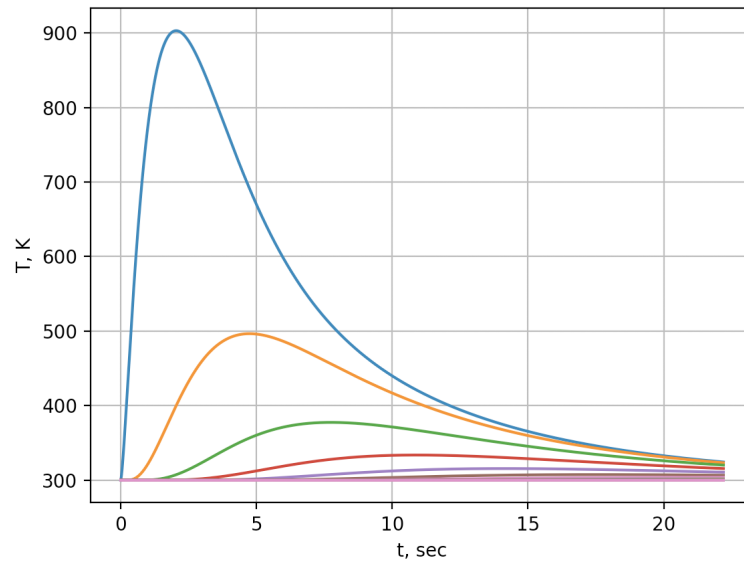


Рис. 5:  $F_{max} = 100, t_{max} = 1$

2. График зависимости температуры  $T(0, t)$  при 3-4 значениях параметров  $a_2$  и/или  $b_2$  теплоемкости.

*Справка.* С ростом теплоемкости темп нарастания температуры снижается (так как стержню необходимо больше тепла, чтобы нагреться до той же температуры, что и при меньшей теплоемкости).

На рисунке 6 представлен график, полученный при значениях  $F_{max} = 40$  и  $t_{max} = 1$ .

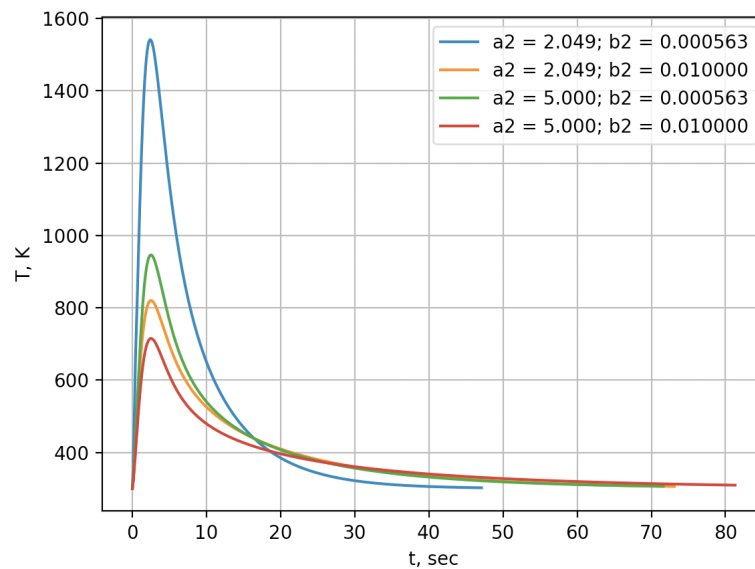


Рис. 6: График зависимости  $T(0, t)$  при различных значениях  $a_2$  и  $b_2$

3. График зависимости температуры  $T(0, t)$  (т.е. при  $x = 0$ ) в частотном режиме теплового нагружения. Импульсы следуют один за другим с заданной частотой  $\nu$  (частота определяется количеством импульсов в 1 секунду).

Показать, что при большом количестве импульсов температурное поле начинает в точности воспроизводиться от импульса к импульсу.

Продemonстрировать, как по мере роста частоты импульсов размах колебаний температуры уменьшается (вплоть до нуля), т.е. реализуется квазистационарный режим, при котором в торец поступает постоянный поток  $F_c = \nu \int_0^{t_u} F(t) dt$ . Здесь  $t_u$  – длительность импульса, определяемая как момент времени, когда  $\frac{F(t_u)}{F_{max}} \approx 0.05$ . Если взять прямоугольные импульсы длительностью  $t_u$ , т.е.  $F(t) = const = F_0$ , то  $F_c = \nu F_0 t_u$ .

*Справка.* Полученное температурное поле должно совпасть с результатом расчета  $T(x)$  по программе лаб. работы №3 при  $F_0 = F_c$ , разумеется, при всех одинаковых параметрах модели, в частности, вместо  $k(T)$  надо использовать  $k(x)$  из лаб. работы №3.

Примем  $F_{max} = 50, t_{max} = 1$  и будем постепенно увеличивать частоту  $\nu$ .

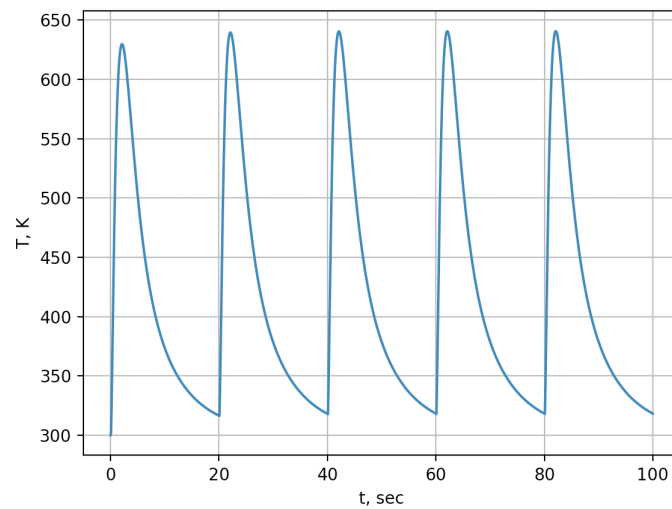


Рис. 7:  $\nu = 0.05$

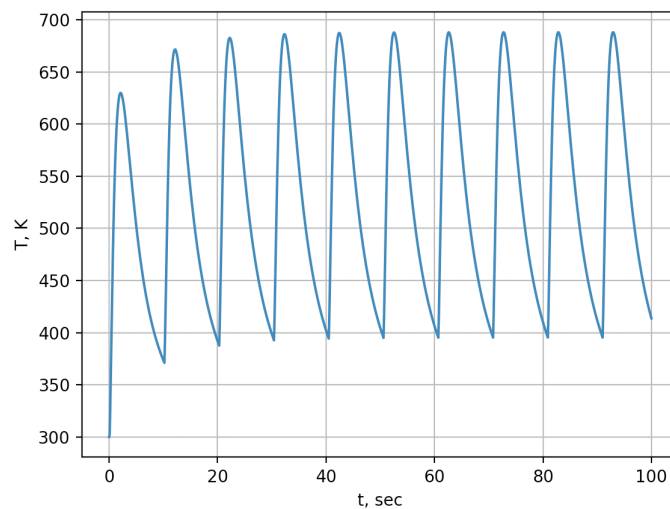


Рис. 8:  $\nu = 0.1$

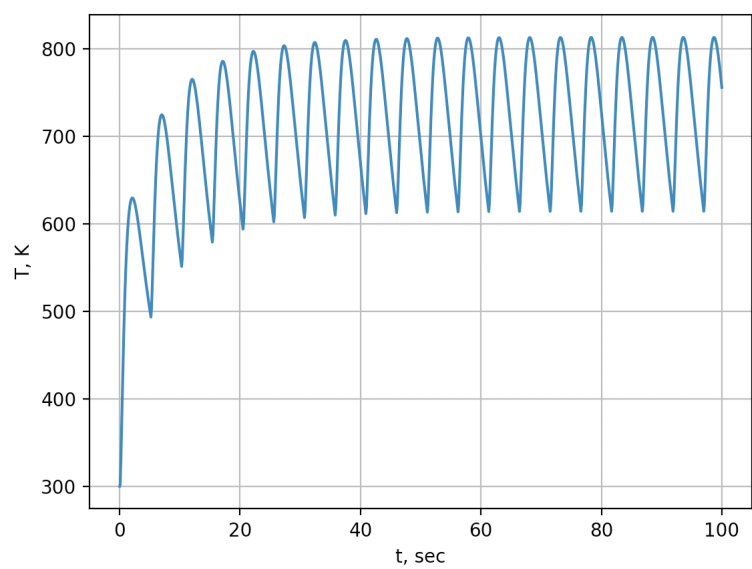


Рис. 9:  $\nu = 0.2$

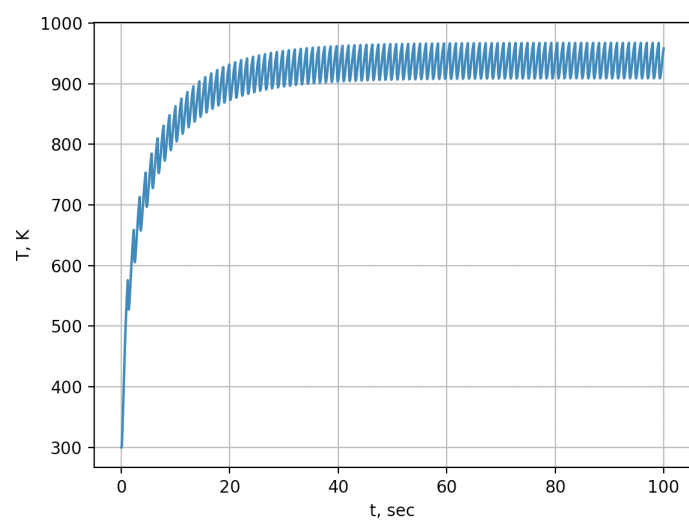


Рис. 10:  $\nu = 1$

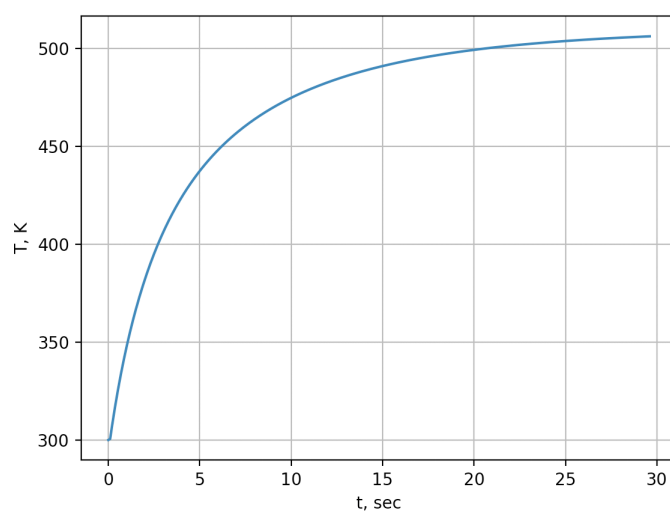


Рис. 11:  $\nu = 50$

На рисунках 7-11 можно наблюдать, что по мере увеличения числа импульсов размах колебаний уменьшается вплоть до нуля.

Рассмотрим график, полученный при параметрах модели как в лабораторной работе №3, в частности, при замене  $k(T)$  на  $k(x)$ .

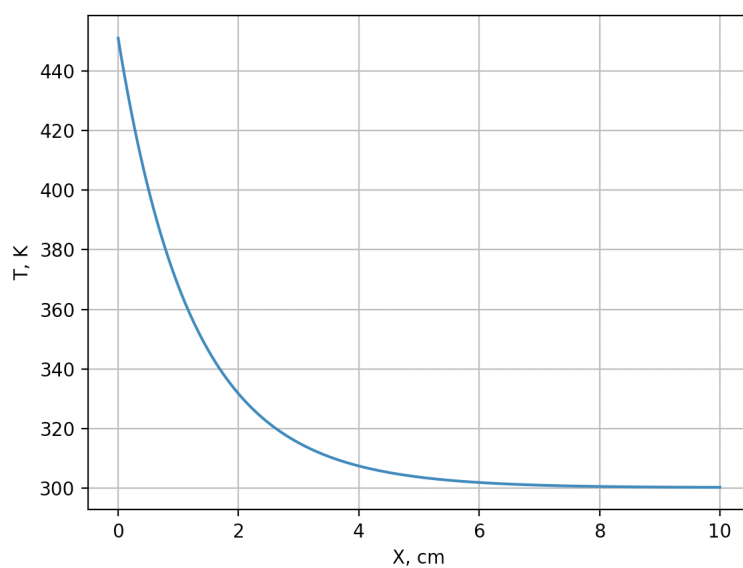


Рис. 12: Температурное поле

Полученное температурное поле совпадает с результатом расчетов в лабораторной работе №3.

## Вывод

В ходе лабораторной работы были получены навыки проведения исследований компьютерной математической модели, построенной на квазилинейном уравнении параболического типа.