Методы Рунге-Кутта

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big)$$

$$u(\xi) = \eta$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{1!}u_n' + \frac{h^2}{2!}u_n''\bigg| + \frac{h^3}{3!}u_n''' + \cdots$$

Т.к. все отброшенные слагаемые являются h^2, то 2 порядок точности.

$$u_n \equiv u(x_n)$$

$$u_n' = u'(x_n) = f(x_n, u_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2!}u_n'' \tag{1}$$

(используется переменная y т.к. приближенное)

$$u_n'' = (u_n)' = \frac{df(x,u)}{dx}\bigg|_{x_n} = f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n) * f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n * f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2}[f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n) * f(x_n, y_n)] \tag{2}$$

$$u_n'' = \frac{df}{dx} = \frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta \mathrm{x}}$$

Подставим в (1)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2!}\left[\frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta \mathrm{x}}\right]$$

$$= y_n + h_n[\beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)] \tag{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n\{\beta f(x_n, y_n) + \alpha[f(x_n, y_n) + f'_x \gamma h_n + f'_y \delta h_n]\}$$
$$= y_n + h_n(\alpha + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha f'_x \gamma h_n^2 + \alpha f'_y \delta h_n^2 \tag{4}$$

Сравним (4) и (2). Видим

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\gamma = \dfrac{1}{2} \\ \alpha\delta = \dfrac{1}{2} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

α-параметр

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \dfrac{1}{2\alpha} \\ \delta = \dfrac{1}{2\alpha} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Окончательно подставим найденные β, γ, δ в (3).

Получим семейство однопарам. формул Рунге-Кутта 2-го порядка точности :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[(1 - \alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right)\right] \tag{5}$$

Порядок точности $O(\max h_n^2)$; $O(h^2)$.

При уменьшении шага в 2 раза, точность увеличивается в 4 раза.

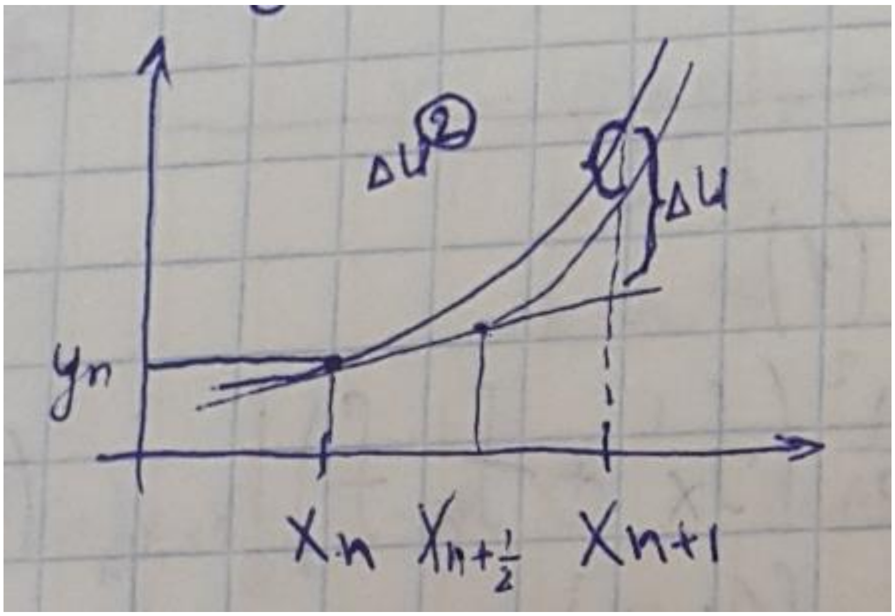
Из апроксимации и устойчивости следует сходимость.

На практике обычно $\alpha = 1$ или $\alpha = \frac{1}{2}$

При $\alpha = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

Можно использовать полусумму производных в x_n и x_{n+1}:



$\Delta u = u(x_{n+1}) - y_{n+1}$ - погрешность

1) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$
2) $y'_{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_n + \frac{1}{2}, y_n + \frac{1}{2}\right)$
3) $y_{n+1} = y_n + h_n y'_{n+\frac{1}{2}}$

При $\alpha = \frac{1}{2}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h_n, y_n + h_n f(x_n, y_n)\big)\right]$$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right)$

$k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right)$

$k_4 = f(x_n + h_n, y_n + hk_3)$

Погрешность $O(h^4)$

Оценим погрешность методов.

Рунге-Кутта 2 порядка

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}f(x_n, y_n)\right)\right]$$

$$u'(x) = f(x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

При $\alpha = 1$

$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$ – аналог метода средних

$R = \frac{x_N - x_0}{24} h^2 \max\limits_{x_0 \le x \le x_N} |f^{II}(x)|$ – 2 порядок точности

При $\alpha = \frac{1}{2}$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n) + f(x_n + h)]$ – метод трапеций

$R = \frac{x_N - x_0}{12} h^2 \max\limits_{x_0 \le x \le x_N} |f^{II}(x)|$ – 2 порядок точности

Мажоритарная оценка сильно завышена, больше нее не будет.

Рунге-Кутта 4 порядка

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(x_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + f(x_n + h)\right]$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 * \max_{x_0 \le x \le x_N} |f^{IV}(\alpha)| = \frac{x_N - x_0}{2880} h^4 \max|f^{IV}(\alpha)|$$

Метод достаточно точный т.к. h^4, а знаменатель большой.

Этот метод самый распространенный, но нужна производная 4 порядка.