ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №3

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT}{dx}\right)-\frac{2}{R}\alpha(x)T+\frac{2T_0}{R}\alpha(x)=0 \qquad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} x=0, \quad -k(0)\dfrac{dT}{dx}=F_0, \\ x=l, \quad -k(l)\dfrac{dT}{dx}=\alpha_N\,(T(l)-T_0) \end{cases}$$

2. Функции $k(x), \alpha(x)$ заданы своими константами

$$k(x)=\frac{a}{x-b},$$

$$\alpha(x)=\frac{c}{x-d}$$

Константы a, b следует найти из условий $k(0)=k_0,\ k(l)=k_N$, а константы c, d из условий $\alpha(0)=\alpha_0,\ \alpha(l)=\alpha_N$. Величины $k_0,\ k_N, \alpha_0, \alpha_N$ задает пользователь, их надо вынести в интерфейс.

3. Разностная схема с разностным краевым условием при $x=0$. Получено в Лекции №7 (7.14), (7.15), и может быть использовано в данной работе. Самостоятельно надо получить интегро -интерполяционным методом разностный аналог краевого условия при $x=l$, точно так же, как это было сделано применительно к краевому условию при $x=0$ в Лекции №7 (формула (7.15)). Для этого надо проинтегрировать на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] выписанное выше уравнение (1) с учетом (7.9) из Лекции №7 и учесть, что поток $F_N=\alpha_N\,(y_N-T_0)$, а $F_{N-1/2}=\chi_{N-1/2}\dfrac{y_{N-1}-y_N}{h}$.

4. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$k_0 = 0.4$ Вт/см К,

$k_N = 0.1$ Вт/см К,

$\alpha_0 = 0.05$ Вт/см^2 К,

$\alpha_N = 0.01$ Вт/см^2 К,

$l =$ 10 см,

$T_0 = 300$К,

$R = 0.5$ см,

$F_0 = 50$ Вт/см^2.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы)**.**

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l, причем $R << l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Ось x направлена вдоль оси цилиндра и начало координат совпадает с левым торцем стержня. Слева при $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком F_0. Стержень обдувается воздухом, температура которого равна T_0. В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и поверхности правого торца при $x = l$. Функции $k(x), \alpha(x)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве,.

Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро -интерполяционным методом.

2. График зависимости температуры $T(x)$ от координаты x при заданных выше параметрах.

3. График зависимости $T(x)$ при $F_0 =$ -10 Вт/см^2.

   Справка. При отрицательном тепловом потоке слева идет съем тепла, поэтому производная $T^{'}(x)$ должна быть положительной.

4. График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях $\alpha(x)$ (например, в 3 раза). Сравнить с п.2.

   Справка. При увеличении теплосъема и неизменном потоке F_0 уровень температур $T(x)$ должен снижаться, а градиент увеличиваться.

5. График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$.

Справка. В данных условиях тепловое нагружение отсутствует, причин для нагрева нет, температура стержня должна быть равна температуре окружающей среды T_0 (разумеется с некоторой погрешностью, определяемой приближенным характером вычислений).

Вопросы при защите лабораторной работы.

Ответы на вопросы дать письменно в Отчете о лабораторной работе.

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$

$$x = l, \quad -k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N\,(T(l) - T_0) + \varphi(T),$$

где $\varphi(T)$ - заданная функция.

Производную аппроксимируйте односторонней разностью.

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое условие линейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в п.2.

4. Опишите алгоритм определения **единственного** значения сеточной функции y_p в **одной** заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок (лекция №8). Краевые условия линейные.

Методика оценки работы.

Модуль 2, срок - 12-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 6 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на 3 вопроса, и эти ответы не являются копией ответов в ранее сданных работах - 10 баллов (максимум).

3. В дополнение к п.1 даны удовлетворительные ответы на отдельные вопросы - 8 баллов (средний балл).