ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
***
KHOA ĐIỆN – ĐIỆN TỬ

BỘ MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN

Giáo viên hướng dẫn: Lê Thị Quỳnh Hà

<u>Các thành viên trong nhóm:</u>

40901457:	Nguyễn Phước Lộc
40902767:	Võ Nhựt Tiến
40902741:	Cù Văn Tiến
40903057:	Huỳnh Trung Trực
40902907:	Nguyễn Kim Triển
40902935:	Phan Đức Trí

Đề tài: Viết chương trình giải phương trình bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4.
Vẽ đồ thị hàm nhận được.

CÔ SÔ LY THUYET

BAI TOAN CAUCHY

Một phương trình vi phân cấp 1 có thể viết dưới dạng giải được $y' = f(x,y)$ mà ta có thể tìm được hàm y từ đạo hàm của nó. Tồn tại vô số nghiệm thoả mãn phương trình trên. Mỗi nghiệm phụ thuộc vào một hằng số tuỳ ý. Khi cho trước giá trị ban đầu của y là y_o tại giá trị đầu x_o ta nhận được một nghiệm riêng của phương trình. Bài toán Cauchy (hay bài toán có điều kiện đầu) tóm lại như sau: cho x sao cho $b \geq x \geq a$, tìm y(x) thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

Người ta chứng minh rằng bài toán này có một nghiệm duy nhất nếu f thoả mãn điều kiện Lipschitz:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

với L là một hằng số dương.

Người ta cũng chứng minh rằng nếu f'_y (đạo hàm của f theo y) là liên tục và bị chặn thì f thoả mãn điều kiện Lipschitz.

Một cách tổng quát hơn, người ta định nghĩa hệ phương trình bậc 1:

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\ldots.$$

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Ta phải tìm nghiệm $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sao cho:

$$\begin{cases} Y'(x) = f(x,X) \\ Y(a) = \alpha \end{cases}$$

với:

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ .. \\ .. \\ y'_n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ .. \\ .. \\ f_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Nếu phương trình vi phân có bậc cao hơn (n), nghiệm sẽ phụ thuộc vào n hằng số tuỳ ý. Để nhận được một nghiệm riêng, ta phải cho n điều kiện đầu. Bài toán sẽ có giá trị đầu nếu với giá trị x_o đã cho ta cho $y(x_o)$, $y'(x_o)$, $y''(x_o)$,....

Một phương trình vi phân bậc n có thể đưa về thành một hệ phương trình vi phân cấp 1. Ví dụ nếu ta có phương trình vi phân cấp 2:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, y'(a) = \beta \end{cases}$$

Khi đặt u = y và v = y′ ta nhận được hệ phương trình vi phân cấp 1:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = g(x, u, v) \end{cases}$$

với điều kiện đầu: $u(a) = \alpha$ và $v(a) = \beta$

Các phương pháp giải phương trình vi phân được trình bày trong chương này là các phương pháp rời rạc: đoạn [a, b] được chia thành n đoạn nhỏ bằng nhau được gọi là các "bước" tích phân h = (b - a) / n.

PHÖÔNG PHAP RUNGE KUTTA

Xét bài toán Cauchy (1). Giả sử ta đã tìm được giá trị gần đúng y_i của $y(x_i)$ và muốn tính y_{i+1} của $y(x_{i+1})$. Trước hết ta viết công thức Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x_i) + \frac{h^{m+1}}{m!}y^{(m+1)}(c) \quad (11)$$

với $c \in (x_i, x_{i+1})$ và:

$$y'(x_i) = f[x_i, y(x_i)]$$

$$y^{(k)}(x_i) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f[x_i, y(x_i)]$$

Ta viết lại (11) dưới dạng:

$$y_{i+1} - y_i = hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x_i) + \frac{h^{m+1}}{m!}y^{(m+1)}(c) \qquad (12)$$

Ta đã kéo dài khai triển Taylor để kết quả chính xác hơn. Để tính y'_i, y''_i v.v. ta có thể dùng phương pháp Runge-Kutta bằng cách đặt:

$$y_{i+1} - y_i = r_1k_1^{(i)} + r_2k_2^{(i)} + r_3k_3^{(i)} + r_4k_4^{(i)} \qquad (13)$$

trong đó:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf(x_i + ah, y_i + \alpha k_1^{(i)}) \\ k_3^{(i)} = hf(x_i + bh, y_i + \beta k_1^{(i)} + \gamma k_2^{(i)}) \\ \ldots\ldots. \end{cases} \qquad (14)$$

và ta cần xác định các hệ số a, b,..; α, β, γ,...; r_1, r_2,.. sao cho vế phải của (13) khác với vế phải của (12) một vô cùng bé cấp cao nhất có thể có đối với h.

Khi dùng công thức Runge-Kutta bậc hai ta có:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf(x_i + ah, y_i + \alpha k_1^{(i)}) \end{cases} \qquad (15)$$

và $\quad y_{i+1} - y_i = r_1k_1^{(i)} + r_2k_2^{(i)} \qquad (16)$

Ta có:

$$y'(x) = f[x, y(x)]$$

$$y''(x) = f'_x[x, y(x)] + f'_y[x, y(x)]$$

....

Do đó vế phải của (12) là:

$$hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)\right]y'(x) + \cdots \qquad (17)$$

Mặt khác theo (15) và theo công thức Taylor ta có:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = hy'_i$$
$$k_2^{(i)} = h[f(x_i, y_i) + ahf'_x(x_i, y_i) + \alpha k_1^{(i)} f'_y(x_i, y_i) + \cdots]$$

Do đó vế phải của (16) là:

$$h(r_1 + r_2)f(x_i, y_i) + h^2[ar_2 f'_x(x_i, y_i) + \alpha r_2 y'_i f'_y(x_i, y_i)] + \cdots \quad (18)$$

Bây giờ cho (17) và (18) khác nhau một vô cùng bé cấp $O(h^3)$ ta tìm được các hệ số chưa biết khi cân bằng các số hạng chứa h và chứa h^2:

$r_1 + r_2 = 1$

$a.r_1 = 1/2$

$\alpha.r_2 = 1$

Như vậy: $\alpha = a$, $r_1 = (2a - 1)/2a$, $r_2 = 1/2a$ với a được chọn bất kì.

Nếu $a = 1/2$ thì $r_1 = 0$ và $r_2 = 1$. Lúc này ta nhận được công thức Euler. Nếu $a=1$ thì $r_1 = 1/2$ và $r_2 = 1/2$. Lúc này ta nhận được công thức Euler cải tiến.

Một cách tương tự chúng ta nhận được công thức Runge - Kutta bậc 4. Công thức này hay được dùng trong tính toán thực tế :

$k_1 = h.f(x_i, y_i)$

$k_2 = h.f(x_i+h/2, y_i + k_1/2)$

$k_3 = h.f(x_i+h/2, y_i + k_2/2)$

$k_4 = h.f(x_i+h, y_i + k_3)$

$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$

Ví dụ : Dùng công thức Runge-Kutta tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy

$y' = y - x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 1$

$y(0) = 0.5$

với $n = 5$

Tính sai số biết nghiệm chính xác là :

$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$

- ***Giải:***

Ta có $h = 0.2$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$

Công thức Runge-Kutta bậc 4

$$y_{k+1} = y_k + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$$

$$K_1 = 0.2(y_k - x_k^2 + 1)$$

$$K_2 = 0.2\,[y_k + 0.1(y_k - x_k^2 + 1) - (x_k + 0.1)^2 + 1\,]$$
$$= 0.2(1.1\,y_k - 1.1x_k^2 - 0.2x_k + 1.09)$$

$$K_3 = 0.2[\,y_k + 0.1(1.1y_k - 1.1x_k^2 - 0.2x_k + 1.09) - (x_k + 0.1)^2 + 1\,]$$
$$= 0.2(1.11y_k - 1.11x_k^2 - 0.22x_k + 1.099)$$

$$K_4 = 0.2[\,y_k + 0.2(1.11y_k - 1.11x_k^2 - 0.22x_k + 1.099) - (x_k + 0.2)^2 + 1\,]$$
$$= 0.2(1.222y_k - 1.222x_k^2 - 0.444x_k + 1.1798)$$

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ y_{k+1} = y_k + 0.2(6.642y_k - 6.642x_k^2 - 1.284x_k + 6.5578)/6 \end{cases}$$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
2	0.4	1.2140762	1.2140877	0.0000115
3	0.6	1.6489220	1.6489406	0.0000186
4	0.8	2.1272027	2.1272295	0.0000269
5	1	2.6408227	2.6408591	0.0000364

Xây dựng hàm rk4 trong matlab để giải phương trình vi phân theo phương pháp trên.

```
function[x,y]=rk4(f,x0,x1,y0,h)
if nargin<4, error('Vui long nhap du doi so !! '), end;
if nargin<5, m = input('Nhap so doan chia n = ');,h=(x1-x0)/m; end;
x=[]; x(1)=[x0]; n=(x1-x0)/h;
for i=1:n, x(i+1)=x(i)+h; end;
y=[]; y(1)=[y0];
for i=1:n
K1=h*f(x(i),y(i));
K2=h*f(x(i)+h/2,y(i)+K1/2);
K3=h*f(x(i)+h/2,y(i)+K2/2);
K4=h*f(x(i)+h,y(i)+K3);
y(i+1)=y(i)+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
end;
```

Hàm rk4 sẽ nhận vào 4 đến 5 đối số.
Nếu ta nhập số đối số bé hơn 4 thì chương trình sẽ báo lỗi để nhắc nhỡ.
Nếu ta nhập số đối số bằng 4 thì chương trình sẽ yêu cầu ta nhập số đoạn chia n.
Để giải phương trình vi phân dùng hàm trên trước hết ta phải định nghĩa hàm f.

Ví dụ: Ta giải lại phương trình: $y' = y - x^2 + 1$, $0 \le x \le 1$, $y(0) = 0.5$, *với* $n = 5$

- Định nghĩa trực tiếp hàm f từ của sổ Command Windows:

```
>> [X,Y]=rk4(inline('y-x^2+1','x','y'),0,1,0.5)
```

- Định nghĩa hàm f trong của sổ Script rồi lưu thành file f.m

```
function [dy] = f(a,b)
dy = b-a^2 +1;
end
```

```
>> [X,Y]=rk4(@f,0,1,0.5)
```

- Vẽ đồ thị từ các giá trị x_k,y_k (giá trị trả về của hàm rk4):

```
plot(X,Y,'rd-', 'LineWidth',3)
xlabel('Truc X')
ylabel('Truc Y')
title('DO THI CUA HAM DA CHO')
grid on
```

Kết quả cửa sổ Command Windows:

```
>> [X,Y]=rk4(inline('y-x^2+1','x','y'),0,1,0.5)

Nhap so doan chia n = 5

n =

    5

X =

        0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000

Y =

    0.5000    0.8293    1.2141    1.6489    2.1272    2.6408

>> ve

>>
```