

ЗАДАНИЕ на лабораторную работу №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x, t)$

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, & T(x, 0) = T_0, \\ x = 0, & -k(T(0)) \frac{\partial T}{\partial x} = F_0, \\ x = l, & -k(T(l)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N (T(l) - T_0) \end{cases}$$

В обозначениях уравнения (14.1) лекции №14

$$p(x) = \frac{2}{R} \alpha(x), \quad f(u) \equiv f(x) = \frac{2T_0}{R} \alpha(x).$$

2. Разностная схема с разностным краевым условием при $x = 0$ получена в Лекции №14 (14.6), (14.7) и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо получить интегро-интерполяционным методом разностный аналог краевого условия при $x = l$, точно так же, как это сделано при $x = 0$ (формула (14.7)). Для этого надо проинтегрировать на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ выписанное выше уравнение (1) и учесть, что

$$\text{поток } \hat{F}_N = \alpha_N (\bar{y}_N - T_0), \text{ а } \hat{F}_{N-1/2} = \hat{\chi}_{N-1/2} \frac{\bar{y}_{N-1} - \bar{y}_N}{h}.$$

3. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$$k(T) = a_1 (b_1 + c_1 T^{m_1}), \quad \text{Вт/см К},$$

$$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}, \quad \text{Дж/см}^3\text{К}.$$

$$a_1 = 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1,$$

$$a_2 = 2.049, \quad b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 0.528 \cdot 10^5, \quad m_2 = 1.$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d},$$

$$\alpha_0 = 0.05 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$\alpha_N = 0.01 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$l = 10 \text{ см},$$

$$T_0 = 300 \text{ К},$$

$$R = 0.5 \text{ см},$$

$$F(t) = 50 \text{ Вт/см}^2 \text{ (для отладки принять постоянным).}$$

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы).

Постановки задач в данной лабораторной работе и работе №3 во многом совпадают. Отличия заключаются в следующем:

1. Сформулированная в данной работе математическая модель описывает **нестационарное** температурное поле $T(x, t)$, зависящее от координаты x и меняющееся во времени.

2. Свойства материала стержня привязаны к температуре, т.е. теплоемкость и коэффициент теплопроводности $c(T), k(T)$ зависят от T , тогда как в работе №3 $k(x)$ зависит от координаты, а $c = 0$.

3. При $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком $F(t)$, в общем случае зависящим от времени, а в работе №3 поток был постоянный.

Если в настоящей работе задать поток постоянным, т.е. $F(t) = \text{const}$, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(x, t)$. Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет и должно совпасть с температурным распределением $T(x)$, получаемым в лаб. работе №3, если все параметры задач совпадают, в частности, вместо $k(T)$ надо использовать $k(x)$ из лаб. работы №3. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стержня положить поток $F(t) = 0$, то будет происходить остывание, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0 .

При произвольной зависимости потока $F(t)$ от времени температурное поле будет как-то сложным образом отслеживать поток.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует обращать внимание на то, что решения, в которых температура превышает примерно 2000К, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при $x=l$ и его краткий вывод интегро -интерполяционным методом.
2. График зависимости температуры $T(x, t_m)$ от координаты x при нескольких фиксированных значениях времени t_m (аналогично рисунку в лекции №14) при заданных выше параметрах. Обязательно представить распределение $T(x, t)$ в момент времени, соответствующий установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с некоторой точностью (например, $\left| \frac{T(t+\tau) - T(t)}{T(t+\tau)} \right| < 10^{-4}$), т.е. имеет место выход на стационарный режим. На этой стадии левая часть дифференциального уравнения близка к нулю, и на самом деле решается уравнение из лабораторной работы №3 (отличие только в том, что там было линейное уравнение).
3. График зависимости $T(x_n, t)$ при нескольких фиксированных значениях координаты x_n . Обязательно представить случай $n=0$, т.е. $x = x_0 = 0$.

Вопросы при защите лабораторной работы.

Ответы на вопросы дать письменно в Отчете о лабораторной работе.

1. Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения, качественный анализ). Учесть опыт выполнения лабораторной работы №3.
2. Выполните линеаризацию уравнения (14.8) по Ньютону, полагая для простоты, что все коэффициенты зависят только от одной переменной y_n . Приведите линеаризованный вариант уравнения и опишите алгоритм его решения. Воспользуйтесь процедурой вывода, описанной в лекции №8.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).
2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы, и эти ответы не являются копией ответов в ранее сданных работах - 15 баллов (максимум).
3. В дополнение к п.1 даны удовлетворительные ответы на отдельные вопросы - 10-14 баллов.