ЛЕКЦИИ №3,4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

ЗАДАЧА КОШИ

1. Общие замечания

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения с одной независимой переменной. Если независимых переменных больше, чем одна, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений строятся модели движения систем взаимодействующих частиц, электротехнических процессов в электрических цепях, кинетики химических реакций, процессов заселения уровней энергии в высокотемпературных средах и многих других объектов и процессов.

К задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений сводятся некоторые задачи для уравнений в частных производных, когда многомерное уравнение позволяет провести разделение переменных (например, при вычислении энергетического спектра частиц в полях определенной симметрии).

Обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка при помощи замены переменных может быть сведено к системе уравнений первого порядка. Рассмотрим в связи с последним пример.

Дифференциальное уравнение третьего порядка

$$a(x)\frac{d^3v}{dx^3} + b(x)\frac{d^2v}{dx^2} + c(x)\frac{dv}{dx} + d(x)v = f(x)$$

заменой переменных

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v_2, \ \frac{dv}{dx} = v_1,$$

приводится к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dx} = v_1,$$
$$\frac{dv_1}{dx} = v_2,$$
$$a(x)\frac{dv_2}{dx} = -b(x)v_2 - c(x)v_1 - d(x)v + f(x).$$

В общем виде преобразование выглядит следующим образом. Дифференциальное уравнение n - го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$v^{(n)}(x) = \varphi\left(x, v, v', v'', \dots, v^{(n-1)}\right),$$

заменой переменных

$$v^{(k)} \equiv v_k$$

сводятся к системе n уравнений первого порядка

$$v_k' = v_{k+1}, \quad 0 \le k \le n-2,$$
$$v_{n-1}'(x) = \varphi\left(x, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\right),$$

где обозначено $v_0 \equiv v.$

В соответствии с изложенным далее будут рассматриваться системы уравнений первого порядка с произвольной правой частью:

$$v_k'(x) = \varphi_k\left(x, v_1, v_2, \dots, v_n\right),\ 1 \le k \le n.$$

Решение системы n-го порядка зависит от n параметров $c_1, c_2, \dots, c_n$. .Для выделения единственного решения необходимо использование дополнительных условий для искомой функции. В зависимости от того, каким образом ставятся данные условия, различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задача Коши, краевая задача и задача на собственные значения.

В задаче Коши все дополнительные условия ставятся в одной точке:

$$v_k(x_0) = v_{k,0}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Решение отыскивается в некотором интервале $x_0 \le x \le x_l$.

Если правые части $\varphi_{\mathbf{k}}$ уравнений непрерывны в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, v_{1,0}, v_{2,0}, \ldots, v_{n,0})$ и удовлетворяют условию Липшица по переменным $\mathbf{v_k}$, то решение задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, т.е. задача является корректной. Условие Липшица формулируется следующим образом

$$\left|\varphi_k(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \ldots, v_{n,l}) - \varphi_k(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \ldots, v_{n,m})\right| \le$$
$$\le L\left\{\left|v_{1,l} - v_{1,m}\right| + \left|v_{2,l} - v_{2,m}\right| + \ldots + \left|v_{n,l} - v_{n,m}\right|\right\}$$

для любых точек $(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \ldots, v_{n,l}), (x, v_{1,m}, v_{2,m}, \ldots, v_{n,m})$.

2. Методы решения

Можно выделить три метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений: точные, аналитические приближенные и численные.

Точные методы предусматривают получение решения в виде комбинации элементарных функций или в виде квадратур от последних. Возможности точных методов ограничены.

Приближенные методы сводятся к построению последовательности функций $w_n(x)$, имеющих пределом искомую функцию $v(x)$. Обрывая эту последовательность на каком-то номере k, получают приближенное решение.

Наиболее универсальными методами решения являются численные. Их основной недостаток - возможность получения только частного решения.

Следует иметь в виду следующее обстоятельство. Успех от применения численного метода сильно зависит от обусловленности задачи, т.е. задача должна быть хорошо обусловлена, а именно, малые изменения начальных условий должны приводить к малому изменению решения. В противном случае (слабой устойчивости) малые погрешности в начальных данных или погрешности численного метода могут приводить к большим погрешностям в решении.

Далее будут рассматриваться алгоритмы решения задачи Коши на примере одного уравнения первого порядка $v'(x)=\varphi(x,v)$. Обобщение на случай системы n уравнений осуществляется заменой $v(x)$ на $\bar{v}(x)$ и $\varphi(x,v)$ на $\bar{\varphi}(x,\bar{v})$, где

$$\bar{v}(x)=\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{vmatrix}, \qquad \bar{\varphi}(x,\bar{v})=\begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \varphi_n \end{vmatrix}.$$

2.1. Метод Пикара

Данный метод является представителем приближенных методов решения рассматриваемого класса задач. Идея метода чрезвычайно проста и сводится к процедуре последовательных приближений для решения интегрального уравнения, к которому приводится исходное дифференциальное уравнение. Пусть поставлена задача Коши

$$\begin{aligned} &v'(x)=\varphi(x,v(x)), \\ &x_0 \le x \le x_l ., \\ &v(x_0)=v_0 . \end{aligned} \qquad (1)$$

Проинтегрируем выписанное уравнение

$$v(x)=v_0+\int_{x_0}^{x}\varphi(t,v(t))dt . \qquad (2)$$

Процедура последовательных приближений метода Пикара реализуется согласно следующей схеме

$$y_s(x)=v_0+\int_{x_0}^{x}\varphi(t,y_{s-1}(t))dt , \qquad (3)$$

причем $y_0(t)=v_0$, (i – номер итерации).

Пример. Решить методом Пикара уравнение

$$v'(x) = x^3 + v^3 \ ,$$
$$v(0) = 0 \ .$$

Решение этого уравнения не выражается через элементарные функции:

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} \ ,$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [t^3 + (\frac{t^4}{4})^3]dt = \frac{x^4}{4}(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13}x^9) \ ,$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \{t^3 + [\frac{t^4}{4}(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13}t^9)]^3\}dt =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^{13}}{4^3 \cdot 13}(1 + \frac{3}{4^2 \cdot 22}x^9 + \frac{3}{4^4 \cdot 13 \cdot 31}x^{18} + \frac{1}{4^6 \cdot 13^2 \cdot 40}x^{27})$$

и т.д.

Видно, что при $x \le 1$ ряд быстро сходится. Метод удобен, если интегралы можно взять аналитически.

Можно доказать, что метода Пикара сходится, если в некоторой ограниченной области $g(x,v)$ правая часть $\varphi(x,v)$ непрерывна и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по переменной v т.е.

$$|\varphi(x,v_1) - \varphi(x,v_2)| \le L|v_1 - v_2| \qquad ,$$

где L - некоторая константа.

2.2. Методы Рунге-Кутта

Данные методы являются численными. На практике применяются методы Рунге-Кутта, обеспечивающие построение разностных схем (методов) различного порядка точности. Наиболее употребительны схемы (методы) второго и четвертого порядков. Их мы и рассмотрим ниже.

Предварительно введем некоторые понятия и определения. Сеткой на отрезке $[a,b]$ называется фиксированное множество точек этого отрезка ω_N. Функция, определенная в данных точках, называется сеточной функцией. Координаты точек x_i удовлетворяют условиям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b \ .$$

Точки $x_i \in \omega_N$ являются узлами сетки. Равномерной сеткой на $[a,b]$ называется множество точек

$$\omega_h = \{ x_i = a + ih \} , \qquad i = 0,1,2,\ldots,N \ ,$$

где $h = \dfrac{b-a}{N}$ - шаг сетки.

При решении дифференциальных уравнений приближенным методом основным является вопрос о сходимости. Применительно к разностным методам традиционно более употребительно понятие сходимости при $h \to 0$. Обозначим значения сеточной функции y_i, значения точного решения дифференциального уравнения (5.1) в узле i - $v(x_i)$ (y_i являются приближенными значениями $v(x_i)$). Сходимость при $h \to 0$ означает следующее. Фиксируем точку x и строим совокупность сеток ω_h таким образом, что $h \to 0$ и $x_i = a + ih = x$ (при этом $i \to \infty$). Тогда считают, что численный метод сходится в точке x, если $|y_i - v(x_i)| \to 0$ при $h \to 0$, $x_i = x$. Метод сходится на отрезке $[a,b]$, если он сходится в каждой точке $x \in [a,b]$. Говорят, что метод имеет p-й порядок точности, если можно найти такое число $p > 0$, что $|y_i - v(x_i)| = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Введем далее понятие невязки или погрешности аппроксимции разностного уравнения, заменяющего заданное дифференциальное уравнение, на решении исходного уравнения, т.е. невязка ψ_i представляет собой результат подстановки точного решения уравнения (1) $v(x)$ в разностное уравнение. Например, (1) можно заменить следующим простейшим разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\varphi(x_i,y_i)=0\,,\qquad i=0,1,2,\ldots,y_0=v_0\,.$$

Тогда невязка определится следующим выражением

$$\psi_i=-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+\varphi(x_i,u_i)\,.$$

Приближенное решение не совпадает вообще говоря с u_i, поэтому невязка ψ_i в i-ой точке не равна нулю. Вводят следующее определение: численный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если невязка $\psi_i\to 0$ при $h\to 0$, и имеет p-й порядок аппроксимации, если $\psi_i=O(h^p)$. Доказывается, что порядок точности численного метода решения дифференциального уравнения совпадает с порядком аппроксимации при достаточно общих предположениях.

Теперь перейдем к анализу схем Рунге-Кутта. Сначала обратимся к схемам второго порядка точности. Используя формулу Тейлора, решение дифференциального уравнения (1) можно представить в виде

$$v_{n+1}=v_n+h_n v_n'+\frac{1}{2}h_n^2 v_n''+\ldots,\tag{6}$$

где обозначено $v_n=v(x_n)$, $v_n'=v'(x_n)$, $h_n=x_{n+1}-x_n$.

Согласно (1) $v_n'=\varphi(x_n,v_n)$, $v_n''=\varphi_x'(x_n,v_n)+\varphi_v'(x_n,v_n)\varphi(x_n,v_n)$. Далее удерживаем только выписанные члены ряда. Представим вторую производную следующим образом

$$v_n''=(v_n')'=\frac{\varphi(\tilde{x},\tilde{v})-\varphi(x_n,v_n)}{\Delta x}\,,$$

где $\tilde{x},\tilde{v}$ - пока неизвестные величины. Пусть

$$\tilde{x} = x_n + \gamma h, \ \tilde{v} = v_n + \delta h.$$

Обозначим приближенное значение решения в узле с номером n через y_n (именно это решение будет получаться после того, как мы ограничим ряд членами с порядком не выше второго).

Имеем

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h_n^2 \left[\frac{\varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - \varphi(x_n, y_n)}{\Delta x} \right] =$$
$$= y_n + h_n [\beta \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)] \ .$$

Введенные здесь параметры α, β, γ и δ подлежат определению. Разлагая правую часть в ряд Тейлора до линейных членов и приводя подобные члены, получим последовательно

$$y_{n+1} = y_n + h_n \{ \beta \cdot \varphi(x_n, y_n) + \alpha \cdot [\varphi(x_n, y_n) +$$
$$+ \varphi'_x(x_n, y_n) \gamma h_n + \varphi'_y(x_n, y_n) \delta h_n] \} =$$
$$= y_n + (\alpha + \beta) h_n \varphi(x_n, y_n) + \alpha h_n^2 [\gamma \varphi'_x(x_n, y_n) + \delta \varphi'_y(x_n, y_n)] \ . \qquad (7)$$

Условием выбора параметров α, β, γ и δ поставим близость выражения (7) ряду (6), тогда

$$\alpha + \beta = 1 \ , \quad \alpha \gamma = \frac{1}{2} \ , \quad \alpha \delta = \frac{1}{2} \varphi(x_n, y_n) \ .$$

Один параметр остается свободным. Пусть это будет α, тогда

$$\beta = 1 - \alpha \ , \ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \ , \ \delta = \frac{1}{2\alpha} \varphi(x_n, y_n)$$

и окончательно из (7) с учетом найденных отношений для β, γ и δ получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n \{ (1 - \alpha) \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi(x_n + \frac{1}{2\alpha} h_n, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} \varphi'(x_n, y_n)] \} \qquad (8)$$

Соотношение (8) описывает однопараметрическое семейство двучленных формул Рунге-Кутта.

В специальной литературе доказывается, что если $\varphi(x,v)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то приближенное решение схемы (8) равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(max\, h_n^2)$, т.е. схема (.8) обладает вторым порядком точности.

В практике расчетов используют формулы (8) при значениях параметра $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$.Рассмотрим эти варианты.

Случай $\alpha = \frac{1}{2}$.

Из (5.8) выводим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_n, y_n) + \varphi(x_n + h_n, y_n + h_n\varphi(x_n, y_n))\right], \qquad (9)$$

Применение формулы (9) сводится к следующей последовательности шагов:

1. Вычисляется грубо значение функции $\bar{y}_{n+1}$ (по схеме ломаных)

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h_n\varphi(x_n, y_n).$$

2. Определяется наклон интегральной кривой в точке (x_{n+1}, y_{n+1})

$$\bar{y}'_{n+1} = \varphi(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}).$$

3. Находится среднее значение производной функции на шаге h_n

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_n, y_n) + \bar{y}'_{n+1}\right],$$

4. Рассчитывается, наконец, значение функции в ($n+1$)-м узле

$$y_{n+1} = y_n + hy'_{n+\frac{1}{2}}.$$

Данная схема имеет специальное название "предиктор - корректор".

Случай $\alpha = 1$.

Согласно (8) получаем

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi[x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}\varphi(x_n, y_n)] .$$

Задача решается посредством следующих шагов:

1. Вычисляется значение функции в половинном узле

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2}\varphi(x_n, y_n).$$

2. Определяется значение производной в узле $n+\frac{1}{2}$

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \varphi(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) .$$

3. Находится значение функции в ($n+1$)-м узле

$$y_{n+1} = y_n + h_n y'_{n+\frac{1}{2}}.$$

Помимо рассмотренных выше двучленных схем широкое распространение в практике расчетов имеют схемы Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Ниже даются без вывода соответствующие формулы

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$

$$k_1 = h_n\varphi(x_n, y_n), \quad k_2 = h_n\varphi(x_n + h_n/2, y_n + k_1/2), \qquad (10)$$

$$k_3 = h_n\varphi(x_n + h_n/2, y_n + k_2/2), \quad k_4 = h_n\varphi(x_n + h_n, y_n + k_3).$$

Схемы с большим числом членов практически не применяются. Пятичленные формулы обеспечивают четвертый порядок точности, шестичленные формулы имеют шестой порядок, но их вид весьма сложен.

Погрешности приведенных схем Рунге-Кутта определяются максимальными значениями соответствующих производных. Оценку погрешностей легко получить для частного случая вида правой части дифференциального уравнения

$$\varphi(x,v) \equiv \varphi(x) .$$

В этом варианте решение уравнения может быть сведено к квадратуре и все схемы разностного решения переходят в формулы численного интегрирования. Например, схема (9) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[\varphi(x_n) + \varphi(x_{n+1})] ,$$

то есть имеет форму метода трапеций, а схема (10) переходит в схему

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[\varphi(x_n) + 4\varphi(x_n + h_n / 2) + \varphi(x_n + h_n)] ,$$

представляющую собой формулу Симпсона с шагом $\frac{h_n}{2}$.

Оценки погрешности формул трапеций и Симпсона известны. Например, мажорантные оценки погрешности указанных формул даются следующими выражениями

$$R_{ТРАП} \le \frac{x_l - x_0}{12} max(h_n^2) max(\varphi''),$$

$$R_{СИМП} \le \frac{x_l - x_0}{2880} max(h_n^4) max(\varphi^{IV})$$

Из приведенных формул видно, что точность схем Рунге-Кутта достаточно высока.

Выбор той или иной из приведенных схем для решения конкретной задачи определяется следующими соображениями. Если функция $\varphi(x,v)$ в правой части уравнения непрерывна и ограничена, а также непрерывны и ограничены ее четвертые производные, то наилучший результат достигается при использовании схемы (10). В том случае, когда функция $\varphi(x,v)$ не имеет названных выше производных, предельный (четвертый) порядок схемы (10) не может быть достигнут, и целесообразным оказывается применение более простых схем .

Помимо схем Рунге-Кутта практический интерес представляют многошаговые методы, которые можно описать следующей системой уравнений

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + ... + a_m y_{n-m}}{h} = b_0\varphi_n + b_1\varphi_{n-1} + ... + b_m\varphi_{n-m}\ , \qquad (11)$$

где $n = m, m+1, ...$, а a_k, b_k - числовые коэффициенты, $k = 0,1,2,...,m$, $a_0 \ne 0$.

Согласно данному уравнению расчет начинается со значения $n = m$. В этом случае получается соотношение вида

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + ... + a_m y_0}{h} = b_0\varphi_m + b_1\varphi_{m-1} + ... + b_m\varphi_0,$$

т.е. для начала счета надо иметь m начальных значений y_i, $i = 0,1,2,...,m-1$. Эти значения y_i приходится вычислять каким-либо другим методом, например, методом Рунге-Кутта. В необходимости использовать разные методы счета состоит неудобство многошаговых методов.

Среди многошаговых методов наиболее распространен метод Адамса, схема реализации которого следует из (11) при $a_0 = -a_1 = 1$ и $a_k = 0$ для $k = 2,3,\ldots,m$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^{m} b_k \varphi_{n-k} .$$

При $b_0 = 0$ метод Адамса оказывается явным, а при $b_0 \neq 0$ - неявным.

2.3. Неявные методы

Рассмотрим неявную схему Эйлера для уравнения (1).. Она имеет первый порядок точности

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}). \tag{12}$$

Для определения неизвестного значения y_{n+1} придется решать нелинейное уравнение. Необходимость решать уравнение – типичная ситуация для неявных методов. И в этом состоит сложность и трудоемкость их применения, учитывая, что в большинстве случаев уравнения получаются нелинейными, и возникает проблема отыскания корня, который может быть не единственный, а может и вообще не существовать при выбранном шаге. Однако неявные методы обладают свойством устойчивости, и несмотря на все трудности их применяют очень широко, т.к. они позволяют вести расчет с увеличенными шагами по сравнению с явными методами.

Среди других неявных методов можно назвать метод трапеций. При решении жестких систем дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовал себя метод Гира, который относится к чисто неявным многошаговым разностным методам, общая формула которых выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k y_{n-k} = h\varphi(x_n , y_n) ,$$

При $m = 1$ и $a_0 = 1, a_1 = -1$ имеем $y_n - y_{n-1} = h\varphi(x_n , y_n)$, т.е. неявный метод Эйлера. При $m = 2$ и $m = 3$ методы выглядят следующим образом

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = h\varphi(x_n, y_n), \tag{13}$$

$$\frac{11}{6}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = h\varphi(x_n, y_n). \tag{14}$$

Разностное уравнение (13) имеет второй порядок точности, а (14) - третий.