ЛЕКЦИЯ №8

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

2. Квазилинейные уравнения. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

Квазилинейные разностные схемы появляются при разностной аппроксимации квазилинейных уравнений. Квазилинейный вариант уравнения (1) из лекции №7 выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dx}\left(k(x,u)\frac{du}{dx}\right)-p(x,u)u+f(x,u)=0\,, \tag{1}$$

с краевыми условиями достаточно общего вида, пусть по-прежнему слева - II рода, справа - III рода

$$x=0,\quad -k(0,u(0))\frac{du}{dx}=F_0,$$

$$x=l,\quad -k(l,u(l))\frac{du}{dx}=\alpha\,(u(l)-\beta)$$

,

где α,β - известные числа.

Краевые условия имеют тоже квазилинейный вид.

Видим, что появляется зависимость коэффициентов уравнения, т.е. функций $k(x,u),\, p(x,u),\ f(x,u)$ от искомой функции $u(x)$. Эта зависимость в таких уравнениях часто бывает только от $u(x)$, т.е. $k=k(u)$, причем от $u(x)$ могут зависеть все функции или только отдельные из них.

Разностный аналог уравнения (1) и краевых условий строится интегро- интерполяционным методом, в полном соответствии с процедурой, описанной в лекции №7 для линейного уравнения. В результате получается система уравнений, аналогичная (7) из лекции №7.

$$A_n\,y_{n+1}-B_n\,y_n+C_n\,y_{n-1}=-D_n\,,\quad 1\le n\le N-1\,, \tag{2}$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h .$$

С разностными краевыми условиями

$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0,$$
$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N . \qquad (3)$$

Однако теперь коэффициенты уравнений зависят от неизвестной сеточной функции y_n в узлах, и (2), (3) является системой уже нелинейных уравнений.

Для ее решения можно предложить два метода.

1. **Метод простых итераций** (последовательных приближений)

Обозначим текущую итерацию s, а предыдущую $(s-1)$, тогда итерационный процесс организуется по схеме

$$A_n^{s-1}\, y_{n+1}^s - B_n^{s-1}\, y_n^s + C_n^{s-1}\, y_{n-1}^s = -D_n^{s-1},$$
$$M_0^{s-1} y_0 + K_0^{s-1} y_1 = P_0^{s-1}, \qquad (4)$$
$$K_N^{s-1} y_{N-1} + M_N^{s-1} y_N = P_N^{s-1} .$$

Все коэффициенты берутся на $(s-1)$ -ой итерации, т.е. они известны. Получили обычную линейную схему, решение которой осуществляется методом прогонки. Начальное распределение y_n^0 задается произвольно. Разумеется, лучше это делать, соотносясь с характером ожидаемого решения. Здесь краевые условия естественным образом включены в общую итерационную процедуру. Итерации прекращаются при условии

$$\max\left|\frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s}\right| \le \varepsilon_1 \text{, для всех } n = 0,1,\ldots N .$$

Это условие означает, что те значения сеточной функции, которые использовались при расчете коэффициентов уравнения на предпоследней итерации, с определенной точностью совпали с найденной функцией на последней итерации.

Есть другой критерий окончания итераций. Назовем его выходом по балансу членов уравнения. Если проинтегрировать исходное уравнение (1) $\int_0^l (\cdot)\,dx$, то получим

$$-(F(l) - F_0) - \int_0^l [\,p(x,u)u - f(x,u)]\,dx = 0\,,$$

т.е.

$$F_0 - F(l) = \int_0^l [\,p(x,u)u - f(x,u)]\,dx\,,$$

или, используя граничное условие справа

$$F_0 - [\alpha\,(u(l) - \beta)] = \int_0^l [\,p(x,u)u - f(x,u)]\,dx\,.$$

Обозначая

$$f_1 = F_0 - [\alpha\,(u(l) - \beta)],\quad f_2 = \int_0^l [\,p(x,u)u - f(x,u)]\,dx\,,$$

получим условие окончания итераций

$$\left|\frac{f_1^s - f_2^s}{f_1^s}\right| \le \varepsilon_2\,, \tag{5}$$

Точность расчета ε_1 не совпадает с ε_2. Выход по балансу точнее отражает факт сходимости решения в процессе итераций.

Отметим одну тонкость, которую надо знать при использовании метода простых итераций.

При резкой зависимости коэффициентов уравнения от искомой функции прямое применение метода простой итерации, как это описано выше, может породить «разболтку» решения, т.е. итерации не сойдутся ни к какому решению. Итерационный процесс надо будет остановить принудительно или произойдет аварийный останов.

В данной ситуации итерационную процедуру следует несколько модернизировать. Расчет коэффициентов системы уравнений $A_n, B_n, C_n, D_n, M_0, K_0, \ldots$и т.д. на очередной итерации надо производить не по сеточной функции y_n^{s-1} с предыдущей итерации, т.е. не строго при найденной функции на ($s-1$)- ой итерации, а при несколько скорректированных значениях, при значениях $y_{\xi n}^{s}$, определяемых по формуле

$$y_{\xi n}^{s} = y_{\xi n}^{s-1} + \xi\,(y_n^{s-1} - y_{\xi n}^{s-1})\,. \tag{6}$$

Здесь ξ - так называемый, коэффициент релаксации. Его приходится подбирать в пределах от очень маленьких величин (порядка 0.05) до 1. При ξ=1 имеем те самые обычные простые итерации, о которых говорилось в самом начале.

Чтобы начать процесс, т.е. сделать первую итерацию ($s=1$), надо задать $y_{\xi n}^{0} = y_n^{0} = Y_n, n = 0,1,\ldots N$, где Y_n - начальное распределение искомой функции, которое принимается, вообще говоря, произвольным (в разумных пределах). При этом $y_{\xi n}^{1} = y_{\xi n}^{0} = Y_n, n = 0,1,\ldots N$. Вычислив коэффициенты уравнений по $y_{\xi n}^{1}$ и выполнив прогонку, получим y_n^{1} На второй итерации согласно (6) имеем

$$y_{\xi n}^{2} = y_{\xi n}^{1} + \xi\,(y_n^{1} - y_{\xi n}^{1})\,.$$

Теперь коэффициенты разностных уравнений пересчитываются по $y_{\xi n}^{2}$ Выполняя прогонку, найдем y_n^{2} , и т.д.

Условие окончания итераций записывается так

$$\max\left|\frac{y_n^s - y_{\xi n}^s}{y_n^s}\right| \le \varepsilon_1\text{, для всех } n = 0,1,\ldots N\,,$$

или используется условие (5).

2. **Линеаризация по Ньютону**

Выполняется обычным образом в соответствии с методом Ньютона. При этом надо знать, от каких значений искомой сеточной функции (в каких узлах) зависят коэффициенты разностной схемы. Применительно к разностному аналогу уравнения в нашем случае имеем

$$A_n = A_n(y_n, y_{n+1}), B_n = B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}), C_n = C_n(y_{n-1}, y_n), D_n = D_n(y_n).$$

Выполняя линеаризацию по Ньютону последовательно по неизвестным y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, получим

$$\begin{aligned}
&\left(A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} + D_n\right)\Big|_{s-1} + \left(\frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + C_n\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_{n-1}^s + \\
&\left(\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n+1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - B_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} y_{n-1} + \frac{\partial D_n}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_n^s + \\
&\left(\frac{\partial A_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + A_n - \frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n\right)\Bigg|_{s-1} \Delta y_{n+1}^s = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (7) решается методом прогонки, в результате находятся все Δy_n^s, после чего определяются значения искомой функции в узлах на s - итерации $y_n^s = y_n^{s-1} + \Delta y_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\max\left|\frac{\Delta y_n^s}{y_n^s}\right| \le \varepsilon, \text{ для всех } n = 0,1,\ldots N$$

3. Краевая задача с нелинейными граничными условиями

Во многих случаях даже при линейном дифференциальном уравнении одно или оба краевых условий в задаче (1) могут быть сформулированы как нелинейные. Например, пусть слева при $x = 0$ краевое условие ставится как нелинейное, а справа при $x = l$ сохраняется прежним, т.е. линейным

$$x = 0, \quad -k(0)\frac{du}{dx} = F_0 - \sigma u^4(0)$$

,

$$x = l, \quad -k(l)\frac{du}{dx} = \alpha\,(u(l) - \beta)$$

где σ - известное число.

Здесь по сравнению с (1) из лекции №7 в правой части условия при $x = 0$ появилось слагаемое $\sigma u^4(0)$.

Теперь в разностном аналоге левого краевого условия появится σy_0^4, и определить начальные значения прогоночных коэффициентов невозможно, т.к. для их нахождения используется линейная формула $y_9 = \xi_0\, y_1 + \eta_1$. В этой ситуации можно применить два разных подхода.

Первый способ - организовать итерационный процесс решения разностных уравнений, беря нелинейный член с предыдущей итерации, т.е. $\sigma\, y_0^4\big|_{s-1}$.

Второй способ - изменить направление прогонки, т.е. прогоночные коэффициенты определять справа налево, а функцию - слева направо. Такая прогонка называется *левой*. В этом случае основная прогоночная формула записывается в виде

$$y_n = \xi_{n-1}\, y_{n-1} + \eta_{n-1},$$

а рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов *левой* прогонки

$$\xi_{n-1} = \frac{C_n}{B_n - A_n\,\xi_n}, \qquad \eta_{n-1} = \frac{A_n\,\eta_n + D_n}{B_n - A_n\,\xi_n}\ . \tag{8}$$

Принимая простейшую (первого порядка точности) аппроксимацию краевого условия при $x = l$, получим его разностный аналог

$$-k_N\,\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \alpha\,(y_N - \beta)\,.$$

Откуда, учитывая, что $y_N = \xi_{N-1} y_{N-1} + \eta_{N-1}$, найдем начальные значения прогоночных коэффициентов

$$\xi_{N-1} = \frac{k_N}{k_N + h\alpha}, \qquad \eta_{N-1} = \frac{h\alpha\beta}{k_N + h\alpha} ,$$

а по (8) все остальные прогоночные коэффициенты вплоть до $\xi_0,\ \eta_0$

Аналогичная разностная аппроксимация левого краевого условия дает

$$-k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0 - \sigma y_0^4 .$$

Откуда получаем уравнение для определения y_0

$$\frac{h\sigma}{k_0} y_0^4 + (1 - \xi_0)\, y_0 - \left(\frac{hF_0}{k_0} + \eta_0 \right) = 0 .$$

Решение данного уравнения удобно искать, например, методом половинного деления. К этому моменту прогоночные коэффициенты ξ_0, η_0 уже определены