ЛЕКЦИЯ №5.

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

1. Постановка задачи

Стандартная постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений выглядит следующим образом

$$v_k'(x) = \varphi_k(x, v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad 1 \le k \le n \quad ,$$

а дополнительные условия ставятся более, чем в одной точке отрезка интегрирования уравнений. (Понятно, что в этом случае порядок системы не может быть меньше второго):

$$\psi_k(v_1(\xi_k), v_2(\xi_k), \ldots, v_n(\xi_k)) = \eta_k \; , \quad 1 \le k \le n \; ,$$
$$x_0 \le \xi_k \le x_l \quad .$$

Общая классификация методов решения краевых задач та же, что и в случае задачи Коши: существуют точные, приближенные аналитические и численные методы. О точных методах сказано ранее. Среди приближенных методов можно указать методы Ритца, Галеркина, метод рядов Фурье.

2. Приближенные аналитические методы

Пусть сформулирована краевая задача с граничными условиями достаточно общего вида (III - рода)

$$u''(x) + p(x)u' + g(x)u = f(x),$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = A, \qquad (1)$$

$$\eta u(b) + \lambda u'(b) = B,$$

$$a \le x \le b.$$

Для удобства изложения введем дифференциальные операторы

$$Lu = u''(x) + p(x)u' + g(x)u,$$

$$l_a = \alpha u(a) + \beta u'(a),$$

$$l_b = \eta u(b) + \lambda u'(b)$$

Тогда исходная система уравнений (1) запишется в виде

$$Lu = f(x),$$

$$l_a = A, \qquad (2)$$

$$l_b = B$$

2.1. Метод коллокаций

Суть метода заключается в следующем. Ищем решение в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x), \qquad (3)$$

причем функцию $u_0(x)$ подбираем исходя из того, чтобы она удовлетворяла поставленным (неоднородным) краевым условиям, а функции $u_i(x)$ выбираем так, чтобы они удовлетворяли однородным краевым условиям, т.е. $l_a = 0,\ l_b = 0$. Подставляя (3) в (2), получим невязку

$$R(x, C_1, \ldots C_n) = L\,y - f(x) \equiv L u_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i\, L u_i\ - f(x).$$

Далее потребуем, чтобы невязка $R(x, C_1, \ldots C_n)$ обращалась в нуль на системе точек $x_1, x_2, \ldots x_n$ из $[a, b]$ (точки коллокации). Затем из полученной системы уравнений находим постоянные $C_1, \ldots C_n$.

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом коллокаций.

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0,$$

$$u(-1) = 0,\ u(1) = 0,$$

$$-1 \le x \le 1$$

Выберем

$$u_i(x) = x^{2i-2}\ (1 - x^2), \quad i = 1, 2 \ldots n.$$

Для данной задачи $u_0(x) = 0$. Ограничимся для простоты значением $n = 2$. Обратим внимание на то, что решение симметрично относительно начала координат. За точки коллокации возьмем $x_1 = 0,\ x_2 = 0.5$. Искомая функция

$$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Подставляя $y(x)$ в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, C_2) = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6).$$

Теперь приравняем невязку нулю в двух указанных выше точках коллокации, получим систему уравнений для определения двух констант

$$\begin{cases} 1.0625\, C_1 + \ 0.765625\ C_2 = 1, \\ \qquad\quad C_1 - \qquad 2C_2 = 1 \end{cases},$$

из которой следует, что

$$C_1 = 0.9568,\ C_2 = -0.0216\ .$$

Окончательно, искомое решение запишется в виде

$$y \approx 0.9568(1 - x^2) - 0.0216(x^2 - x^4)\,.$$

2.2. Метод Галеркина

Постановка задачи идентична (1).

Зададим решение в виде, аналогичном (3)

$$y = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, u_k(x)\,,$$

где функции $u_0(x)$ и $u_k(x)$ подбираются из тех же соображений, что и в методе коллокаций.

Согласно методу Галеркина константы определяются из системы уравнений

$$\int_a^b R(x, C_1, \ldots C_n)\, u_m(x)\, dx = 0,\ m = 1, \ldots n\ ,$$

где

$$R(x, C_1, \ldots. C_n) = L\,y - f(x) \equiv L\,u_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k\, L\,u_k\ - f(x)\,,$$

т.е. имеем

$$\int_a^b u_m(x)\,L u_0\,dx + \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b u_m(x)\;L u_k\,dx - \int_a^b u_m(x)\;f(x)\,dx = 0, \quad m = 1,...n\ . \qquad (4)$$

Из полученной системы уравнений находим постоянные $C_1,....C_n$.

Пример. Поставлена краевая задача с однородными краевыми условиями. Найти приближенное решение методом Галеркина

$$u'' + x u' + u = 2x,$$

$$u(0) = 1,\ u(1) = 0,$$

$$0 \le x \le 1$$

Выберем

$$u_0(x) = 1 - x,$$

$$u_k(x) = x^k (1 - x), k = 1, 2....n$$

Ограничимся для простоты значением $n = 3$. Тогда

$$y(x) = (1 - x) + C_1\,x(1 - x) + C_2\,x^2\,(1 - x) + C_3\,x^3\,(1 - x)\,.$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, найдем невязку

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 - 4x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2\,(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) +$$

$$+ C_3\,(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

Записывая интегралы (4), придем к системе трех уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3

$$\int_0^1 R(x, C_1,\ C_2\ , C_3)\,(x - x^2)\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1,\ C_2\ , C_3)\,(x^2 - x^3)\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x, C_1,\ C_2\ , C_3)\,(x^3 - x^4)\,dx = 0.$$

Подставляя выражение для невязки $R(x, C_1,\ C_2\ , C_3)$ и вычисляя интегралы, получим окончательно систему уравнений

$$\begin{cases} 133\,C_1 + 63\,C_2 + 36\,C_3 = -70, \\ 140\,C_1 + 108\,C_2 + 79\,C_3 = -98, \\ 264\,C_1 + 252\,C_2 + 211\,C_3 = -210 \end{cases}$$

Из данной системы найдем значения констант

$$C_1 = -0.209,\ C_2 = -0.789,\ C_3 = 0.209.$$

Окончательно, искомое решение дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями запишется в виде

$$y \approx (1 - x)\,(1 - 0.209\,x - 0.789\,x^2 + 0.209\,x^3).$$