ЛЕКЦИЯ №6

Численные способы решения краевых задач представлены на практике методами: стрельбы, разностным, проекционно-разностным. Рассмотрим разностный метод решения.

3. Разностный метод

Поставим краевую задачу вначале для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$v''(x) - g(x)v(x) = f(x), \qquad (1)$$

$$a \le x \le b\ ,$$

$$v(a) = c, \quad v(b) = d\ .$$

На отрезке $[a,b]$ строим сетку $\{x_i = x_0 + ih\}, i = 0,..,N$, где h- шаг сетки. Заменяя вторую производную ее разностным аналогом, получим

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - g_i y_i = f_i\ ,$$

где $g_i = g(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

После преобразований придем к разностному уравнению следующего вида

$$y_{i-1} - (2 + h^2 g_i)\ y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \qquad (2)$$

$$1 \le i \le N-1\ .$$

Получили систему из $(N-1)$-го алгебраического уравнения, в которой неизвестными являются приближенные значения искомой функции в узлах - y_i. Вместе с граничными условиями число уравнений равно числу неизвестных. Решая эту систему уравнений, найдем все y_i.

Рассмотрим вопросы существования и единственности решения и сходимости приближенного разностного решения к точному.

Пусть $g(x) > 0$. Система (2) является системой линейных алгебраических уравнений. Коэффициент $g_N > 0$, поэтому матрица этой системы обладает свойством диагонального преобладания. В этом случае, как известно, решение линейной системы существует и оно единственно.

В качестве способа нахождения решения системы (2) может быть использован вариант метода Гаусса - метод прогонки, учитывая, что в данном случае матрица системы трехдиагональная.

Докажем сходимость. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда разностное решение равномерно сходится к точному с погрешностью $O(h^2)$ при $h \to 0$.

Представим вторую производную от функции $v(x)$ в виде разностного аналога с учетом остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа

$$v''(x_i) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 v^{IV}(\xi_i),$$

где ξ_i удовлетворяет условию $x_{i-1} \le \xi_i \le x_{i+1}$.

Точное решение (6.12) будет удовлетворять следующему разностному уравнению

$$v_{i-1} - (2 + h^2 g_i)v_i + v_{i+1} = h^2 f_i + \frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i). \tag{3}$$

Вычтем последнее уравнение из (2), получим

$$z_{i-1} - (2 + h^2 g_i)z_i + z_{i+1} = -\frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i), \tag{4}$$

где $z_i = y_i - v_i$ - погрешность приближенного решения.

Перепишем (4) вместе с граничными условиями для погрешности в виде

$$(2 + h^2 g_i)z_i = z_{i-1} + z_{i+1} + \frac{h^4}{12} v^{IV}(\xi_i), \tag{5}$$

$$z_0 = 0,\ z_N = 0.$$

Возьмем точку x_m такую, в которой $|z_i|$ достигает максимума (граничная точка не может быть точкой x_m). Принимая во внимание сформулированное выше условие $g_i > 0$, можем в точке x_m записать неравенство, следующее из (5)

$$(2 + h^2 g_m)|z_m| \le |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \frac{h^4}{12}|v^{IV}(\xi_m)|$$

.

Заменяя $|z_{m\pm 1}|$ на $|z_m|$, можно только усилить неравенство, в итоге получается оценка

$$|z_m| \le \frac{h^2}{12}\left|\frac{v^{IV}(\xi_m)}{g_m}\right| \le \frac{h^2}{12}\max\left|\frac{v^{IV}(x)}{g(x)}\right| .$$

Отсюда вытекает утверждение, которое следовало доказать.

По поводу устойчивости задачи следует заметить следующее. При $g(x) > 0$ задача Коши плохо обусловлена, а разностная схема (2) нечувствительна к этой неустойчивости. В случае, когда $g(x) < 0$, не выполняется достаточное условие прогонки, однако в практических вычислениях данное обстоятельство, как правило, оказывается несущественным и не вызывает сложностей в получении решения.

Приведенная выше разностная схема (2) в случае нелинейной задачи усложняется. Если имеется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} &v''(x) = f(x, v(x)) , \\ &v(a) = c, \;\; v(b) = d , \end{aligned} \tag{6}$$

то разностная схема в результате тех же действий, что и при построении схемы (2), примет вид

$$\begin{aligned} &y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i) \;,\; 1 \le i \le N-1 , \\ &y_0 = c, \;\; y_N = d . \end{aligned} \tag{7}$$

Решение (7) можно найти разными способами, например, проводя линеаризацию системы по Ньютону либо организуя простые итерации. При выполнении процедуры линеаризации надо учитывать, что в каждом уравнении (7) содержится три неизвестных y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. В результате получается система уравнений относительно приращений

$$(y_{i-1}^{(s-1)} + \Delta_{i-1}^{(s)}) - 2(y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}) + (y_{i+1}^{(s-1)} + \Delta_{i+1}^{(s)}) =$$
$$= h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)})\Delta_i^{(s)}$$

Здесь s - номер итерации.

Окончательно уравнение для дальнейшей алгоритмизации записывается в виде

$$\Delta_{i-1}^{(s)} - [2 + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)})]\Delta_i^{(s)} + \Delta_i^{(s)} =$$
$$= h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) - y_{i-1}^{(s-1)} + 2y_i^{(s-1)} - y_{i+1}^{(s-1)}, \; 1 \le i \le N-1, \qquad (8)$$
$$\Delta_0^{(s)} = 0, \Delta_N^{(s)} = 0 \; .$$

Полученная система решается прогонкой с применением итерационного процесса. На очередной итерации новые значения сеточной функции находятся согласно формуле

$$y_i^{(s)} = y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)} .$$

Итерации сходятся квадратично.

Если линеаризацию не использовать, то можно ограничиться простыми итерациями, тогда итерационная процедура организуется согласно схеме

$$y_{i-1}^{(s)} - 2y_i^{(s)} + y_{i+1}^{(s)} = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}), \; 1 \le i \le N-1, \qquad (9)$$
$$y_0^{(s)} = c, y_N^{(s)} = d \; .$$

Здесь итерации сходятся, если $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_1 < 1$, где $M_1 = \max\left| f'_v \right|$.

Метод линеаризации выглядит несколько более громоздким, особенно при сложной правой части уравнения, но он быстрее приводит к результату, чем метод простых итераций (9).

Выше рассматривалось уравнение 2-го порядка (1) с краевыми условиями первого рода

$$v(a)=c, \quad v(b)=d,$$

где c и d - заданные числа.

Существуют другие более сложные краевые условия, например, краевые условия III рода

$$\lambda v'(a)+\alpha v(a)=\beta, \text{ где } \lambda, \alpha, \beta \text{ - известные числа.} \tag{10}$$

При разностной аппроксимации данных краевых условий необходимо заменить производную ее разностным аналогом. Самое простое решение- это применить одностороннюю разностную формулу. Однако она имеет только первый порядок точности, что огрубляет всю разностную схему задачи до такого же порядка точности. Можно применить следующий прием повышения порядка разностной аппроксимации краевого условия.

В узле x_0 выполняем разложение функции v в ряд Тейлора

$$v_1=v_0+hv'(a)+\frac{h^2}{2}v''(a)+\ldots \tag{11}$$

Выражая в (11) первую производную $v'(a)$ из (10), а вторую производную из (1), получим, заменив как обычно переменную v на y

$$y_1=y_0+h\frac{\beta-\alpha y_0}{\lambda}+\frac{h^2}{2}\left(f(a)-g(a)y_0\right).$$

Или

$$\lambda\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha y_0=\beta+\frac{h}{2}\lambda\left(f(a)-g(a)y_0\right)$$

Полученное выражение очевидно отличается от варианта аппроксимации производной в (10) односторонней правой производной на величину второго слагаемого справа.