Лабораторная работа №5 по курсу "Методы вычислений"

"Методы решения нелинейных уравнений"

Выполнили: студенты группы ФН2-52Б Пащенко Николай и Попов Артем.

Контрольные вопросы

1. Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т.е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.

   Метод бисекции можно использовать только в случае нечетной кратности корня, т.к. в этом случае выполняется условие $f(a) \cdot f(b) < 0$, где a, b – границы отрезка для поиска корня.
   Метод Ньютона сходится при любой кратности корня. Классический метод является следующим итерационным процессом

$$x_{s+1} = x_s - \frac{f(x_s)}{f'(x_s)}.$$

   Он сходится, если существует непрерывная $f''(x)$, а начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности корня. Пусть существует непрерывная $f^{p+1}(x)$, а x_* – p-кратный корень. Тогда в малой окрестности корня получаем

$$f(x) \approx a\Delta^p + b\Delta^{p+1}, \quad \Delta = x - x_*.$$

   Тогда

$$f(x) = a\Delta^p + b\Delta^{p+1}$$
$$f'(x) = pa\Delta^p + (p+1)b\Delta^{p+1}$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{a\Delta^p + b\Delta^{p+1}}{pa\Delta^p + (p+1)b\Delta^{p+1}} = \frac{\Delta^{p+1}(\frac{a}{\Delta} + b)}{\Delta^{p-1}(ap + pb\Delta + b\Delta)} =$$
$$= \Delta^2 \frac{a + b\Delta}{\Delta(p(a+b\Delta) + b\Delta)} = \Delta^2 \frac{p(a+b\Delta) + b\Delta - b\Delta}{(p(a+b\Delta) + b\Delta)p\Delta} =$$
$$= \Delta^2 (\frac{1}{p\Delta} - \frac{b\Delta}{(p(a+b\Delta) + b\Delta)p\Delta}) = \frac{\Delta}{p} - \Delta^2 \frac{b}{(p(a+b\Delta) + b\Delta)p}$$
$$\Rightarrow \Delta_{s+1} = \frac{p-1}{p}\Delta_s - O(\Delta^2).$$

Т.е. метод Ньютона сходится, и в случае кратных корней имеет линейную скорость сходимости. А в случае $p = 1$ квадратичную скорость сходимости.

2. При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?

   Функция $f(x)$ должна быть непрерывна-дифференцируема, т.е. $f(x) \in C^1$.

   Метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимостью, если $f(x)$ дважды дифференцируема и искомый корень x_* не является кратным (см п.1).

   Основная теорема о сходимости метода Ньютона:

   Пусть в некоторой окрестности решения $\overline{x}$ системы нелинейных уравнений функции $f_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ дважды дифференцируемы и матрица $f'(\overline{x})$ невырождена. Тогда найдется такая малая δ-окрестность решения $\vec{x}$, что при произвольном выборе начального приблжения $x^{(0)}$ из этой окрестности итерационная последовательность метода Ньютона не выходит за пределы окрестности и справедлива оценка:

$$\|\overline{x}^{(n+1)} - \overline{x}\| \leqslant \delta^{-1} \|\overline{x}^{(n)} - \overline{x}\|^2, \quad n \geqslant 0.$$

3. Каким образом можно найти начальное приближение?

   Если известен отрезок $[a, b]$ локализации корня, то для получения начального приближения $x^{(0)}$ можно использовать метод хорд

$$x^{(0)} = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{f(a) - f(b)},$$

   т.е. $x^{(0)}$ — абсцисса точки пересечения с осью Ox отрезка, соединяющего точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

   Также в качестве начального приближения $x^{(0)}$ можно взять (аналогично методу бисекции)

$$x^{(0)} = \frac{a+b}{2}.$$

4. Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?

   СЛАУ имеет вид $Ax = b$. Обозначим $F(x) = Ax - b$, тогда $F'(x) = F' = A$. Тогда согласно итерационной формуле метода Ньютона

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - (F'(X^{(k)})^{-1} F(X^{(k)})) = X^{(k)} - A^{-1}(AX^{(k)} - b) = A^{-1}b.$$

   Таким образом, метод Ньютона можно использовать для решения СЛАУ в том случае, если квадратная матрица A невырождена.

5. Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возможность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.

   Перед тем, как смотреть знак произведения функции в крайних точках отрезка, можно сравнивать выбранное приближение с 0.

6. *Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.*

   (a) Упрощенный метод Ньютона (метод фиксированной касательной). Вычисляем производную функции или, в случае системы, матрицу Якоби только для первого приближения, т.е. итерационная формула метода Ньютона выглядит так

   $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})}, \qquad X^{(k+1)} = X^{(k)} - (F'(X^{(0)}))^{-1}F(X^{(k)}).$$

   Данный метод по сравнению с классическим (квадратичная скорость) будет медленнее сходиться (линейная скорость), но все же он снижает вычислительные затраты (достаточно посчитать производную в точке $x^{(0)}$).

   (b) Метод секущих. Замена производной в формуле Ньютона

   $$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)})}{x^{(k-1)} - x^{(k)}}$$

   приводит к расчетной формуле

   $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k-1)} - x^{(k)}}{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k)})}.$$

   Метод является двухшаговым. Функция не обязана быть дифференцируемой, поэтому данный метод можно применять на широкий класс функций.

   (c) Метод "замораживание через один". Итерационная формула одношагового метода имеет вид

   $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - \frac{f\left(x^{(k)} - f(x^{(k)})(f'(x^{(k)}))^{-1}\right)}{f'(x^{(k)})} \tag{0.1}$$

   Данный метод имеет кубическую скорость сходимости.

7. Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?

   Во избежание выхода очередного приближения за пределы отрезка можно использовать комбинацию алгоритмов Ньютона и метода хорд (в пределах — метод Ньютона, за пределами — метод хорд).

   Во избежании зацикливания через определенное количество итераций используем другой метод, например, метод бисекции.