1. Контрольные вопросы

1. **Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?**

   Для итерационного метода

   $$x = Cx + y, \tag{1.1}$$

   где x — решение соответствующей СЛАУ. На k-ом шаге:

   $$x^{k+1} = Cx^k + y \tag{1.2}$$

   Вычитая (1.2) из (1.1), получаем:

   $$x - x^{k+1} = C(x - x^k);$$
   $$\|x - x^{k+1}\| = \|C(x - x^k)\| \leqslant \|C\|\,\|x - x^k\| \leqslant \|C\|^2\|x - x^{k-1}\| \leqslant \ldots \leqslant$$
   $$\leqslant \|C\|^{k+1}\|x - x^0\|.$$

   Последнее выражение при $\|C\| < 1$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, $\|x - x^{k+1}\| \to 0$, т.е. итерационный метод сходится.

2. **Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?**

   Обычно для улучшения скорости сходимости исходную систему, прежде чем приводить к виду, исходному для итераций, умножают на итерационный параметр τ, который выбирают так чтобы выполнялась оценка $\|C\| < 1$ и норма матрицы C была как можно меньше. Однако мы не можем выбирать параметр слишком малым, поскольку тогда погрешность вычислений станет слишком большой.

   Начальное приближение стоит выбирать как можно близким к решению, если это возможно, однако, как правило, информации об этом нет, поэтому начальное приближение чаще всего выбирается экспериментально.

3. **На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.**

4. **При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?**

Метод простой итерации сходится при $\tau < \dfrac{2}{\lambda_{max}}$, где λ_{max} — максимальное собственное значение симметричной положительно определенной матрицы A.

Пусть A — симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием, т.е.

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда метод Якоби сходится.

Пусть A — симметричная положительно определенная матрица. Тогда метод верхней релаксации сходится при $0 < \omega < 2$. В частности, метод Зейделя ($\omega = 1$) сходится. Рассматривается действительный случай.

Матрица A является положительно определенной, если она удовлетворяет любому из следующих равнозначных критериев:

(a) Все собственные значения матрицы A положительны;

(b) Определители всех угловых миноров положительны (Критерий Сильвестра);

(c) $(Ax, x) > 0, \quad \forall x \neq 0.$

5. **Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.**

Каноническая форма метода релаксации задается в виде:

$$(D + \omega L)\tfrac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = b \Rightarrow$$
$$(D + \omega L)x^{k+1} - (D + \omega L)x^k + \omega Ax^k = \omega b \Rightarrow$$
$$(D + \omega L)x^{k+1} - (D + \omega L - \omega A)x^k = \omega b \Rightarrow$$
$$(D + \omega L)x^{k+1} - (D - \omega(A - L))x^k = \omega b \Rightarrow$$
$$(D + \omega L)x^{k+1} - (D - \omega D - \omega U))x^k = \omega b \Rightarrow$$
$$(D + \omega L)x^{k+1} = ((1 - \omega)D - \omega U))x^k + \omega b \Rightarrow$$
$$x^{k+1} = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U))x^k + \omega(D + \omega L)^{-1}b.$$

Для метода релаксации $C = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U))$.

Для метода Зейделя $C = -(D + L)^{-1}U$.

6. **Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$?**

Данный критерий не подходит в общем случае, так как он является нормой погрешности на k-ой итерации. Если метод сходится достаточно медленно, то данный критерий может достигнуть заданной точности и остановить вычисления далеко от настоящего решения.

7. **Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?**

Существует несколько видов критерия останова:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \varepsilon,$$

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \varepsilon\|x^k\| + \varepsilon_0,$$

$$\left\|\frac{x^{k+1} - x^k}{|x^k| + \varepsilon_0}\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Вышеперечисленные критерии основаны на изменении численного решения за одну итерацию, однако, как упоминалось в вопросе 6, в общем случае они не подходят.

Тогда может оказаться успешным применение другого критерия останова, связанного с нормой невязки :

$$\|Ax^{k+1} - f\| \leqslant \varepsilon.$$

Но в случае малости нормы оператора A данный критерий также может оказаться неприемлемым.

Также существуют следующие критерии останова:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \frac{1 - \|C\|}{\|C\|}\varepsilon,$$

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon.$$