Лабораторная работа №4 по курсу "Методы вычислений"

"Методы решения проблемы собственных значений"

Выполнили: студенты группы ФН2-52Б Пащенко Николай и Попов Артем.

Контрольные вопросы

1. Почему нельзя находить собственные числа матрицы A, прямо решая уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A - \lambda_i E)e_i = 0$?

   Для нахождения собственных чисел матрица, нам надо составить характеристический многочлен и найти его корни, что для многочленов высокой степени является трудоемким процессом. Общей формулы корней многочлена степени выше 4 не существует, значит, находить его корни нам придется численно и, следовательно, с некоторой погрешностью. Если исходить непосредственно из определения собственного вектора, то e_i следует искать как нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений

   $$(A - \lambda_i E)e_i = 0$$

   с вырожденной матрицей $(A-\lambda_i E)$. Но обычно λ_i известно лишь приближенно, и в действительности приходится решать систему

   $$(A - \lambda_i^* E)e_i = 0,$$

   где λ_i^* — достаточно точное приближение к собственному значению λ_i. Решение данной системы может быть только тривиальным, так как матрица $(A - \lambda_i^* E)$ невырождена. Поэтому непосредственное численное решение не дает возможности вычислить соответствующий собственный вектор.

   Кроме того, довольно часто определению подлежат не все собственные значения и собственные векторы, а лишь небольшая их часть. Например, существенный интерес во многих приложениях представляют максимальное или минимальное по модулю собственное значение.

2. Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.

Ортогональное преобразование подобия:

$$R = P^{-1} A\, P,$$

где $P^{-1} = P^T,\ A = A^T$. Тогда

$$R^T = \left(P^{-1} A\, P\right)^T = (A\, P)^T \left(P^{-1}\right)^T = P^T A^T \left(P^{-1}\right)^T = P^{-1} A\, P = R,$$
$$\Longrightarrow R^T = R.$$

3. Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?

Полученная в результате преобразования подобия матрица имеет тот же набор собственных чисел:

$$\det\left(P^{-1} A\, P - \lambda E\right) = \det\left(P^{-1} (A - \lambda E)\, P\right) =$$
$$= \det\left(P^{-1}\right) \det\left(A - \lambda E\right) \det\left(P\right) = \det\left(A - \lambda E\right).$$

Таким образом, характеристические многочлены и собственные числа матриц A и $P^{-1} A\, P$ совпадают. Соответствующие собственные векторы x и x' не совпадают, но, т.к $P^{-1} A\, P\, x' = \lambda\, x' \Rightarrow A\, P\, x' = \lambda\, P\, x'$, они связаны равенством $x = P\, x'$.

4. Почему на практике матрицу A подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?

Потому что преобразованиями вращения невозможно получить матрицу треугольного вида. Матрица вращения имеет вид

$$T_{kl} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & & \\
& & \dots & & & & & & \\
& & & \alpha & & \beta & & & \\
& & & & 1 & & & & \\
& & & & & \dots & & & \\
& & & -\beta & & & \alpha & & \\
& & & & & & & \dots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

Элементы α и β находятся в строках и столбцах с номерами k и l. Последовательность элементарных вращений, которая приведет матрицу A к форме Хессенберга строится следующим образом

$$A^* = T_{kl} A T_{kl}^{-1} = T_{kl} A T_{kl}^{\mathrm{T}}$$

Следовательно, матрица A^* отличается от матрицы A только двумя строками и двумя столбцами с номерами k, l, при этом в матрице A^* элемент $a^*_{l,k-1} = -\beta a_{k,k-1} + \alpha a_{l,k-1} = 0$, учитывая, что

$$\alpha = \frac{a_{k,k-1}}{\sqrt{a^2_{k,k-1} + a^2_{l,k-1}}}, \quad \beta = \frac{a_{l,k-1}}{\sqrt{a^2_{k,k-1} + a^2_{l,k-1}}}.$$

При этом первый элемент поддиагонали никогда не будет равен нулю, так как

$$a^*_{l-1,k-1} = \sqrt{a^2_{k,k-1} + a^2_{l,k-1}}.$$

Т.е. с помощью элементарных вращений не получится обнулить поддиагональ матрицы, следовательно, невозможно привести к треугольному виду.

5. Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы A к форме Хессенберга.

   Для вычисления элементов матрицы T_{kl} требуется 5 мультипликативных операций. В матрице A Необходимо обнулить все элементы ниже диагонали, примыкающей к главной в столбцах с 1 по $n-2$. За одну итерацию внутреннего цикла происходит $8n+5$ итераций. Всего требуемое количество итераций:

$$\sum_{k=1}^{n-2} \cdot \sum_{l=k+2}^{n} (8n+5) = 4n^3 - \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{2}$$

6. Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?

   Для метода обратных итераций в качестве начального приближения можно брать любой нормированный вектор, поэтому, если взять собственный вектор, соответствующий другому собственному числу, предварительно отнормировав его, то это никак не повлияет на сходимость метода.

   Пусть $e_i,\ i = \overline{1,n}$ — ОНБ из собственных векторов матрицы A.

$$(A - \lambda^*_j E)y = x;$$
$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i;$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda^*_j)e_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i;$$

Приравнивая коэффициенты при e_i, получаем

$$\alpha_i = \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*};$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} e_i = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \left(c_j e_j + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j^*} c_i e_i \right).$$

Если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному числу:

$$y = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \left(c_j e_j + \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_k - \lambda_j^*} c_k e_k \right).$$

Если $|\lambda_j - \lambda_j^*| \ll |\lambda_k - \lambda_j^*|$, то второе слагаемое правой части мало по сравнению с первым. Следовательно алгоритм сойдется к e_j.

Если в методе обратных итераций использовать отношение Рэлея, а в качестве начального приближения $x^{(0)}$ выбрать собственный вектор e_k, соответствующий другому собственному значению, то метод сойдется к собственному числу, соответствующему собственному вектору e_k. Поскольку, как известно, нахождение приближения к собственному числу с помощью отношения Рэлея:

$$\lambda^{(k)} = \rho(x^{(k)}) = (Ax^{(k)}, x^{(k)}))$$

И, следовательно, если x – хорошее приближение к собственному вектору, то $\rho(x)$ – хорошее приблежение к собственному значению.

7. Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для QR-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.

   Критерием останова QR-алгоритма может служить сравнение суммы элементов обнуляемой строки с заданной точностью, т.е. если ε – точность, то итериции прекращаем по достижении условия

$$\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| < \varepsilon$$

8. Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.

   Если среди собственных чисел матрицы A есть близкие по величине, то есть для некоторых значений i и j $(i > j)$

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| \approx 1,$$

то сходимость будет очень медленной. Поэтому можно использовать алгоритм со сдвигами. В этом случае ищут собственные значения матрицы $\widetilde{A} = A -$

σE, которые равны $\widetilde{\lambda_i} = \lambda_i - \sigma$. При таком подходе скорость сходимости QR-алгоритма определяется величиной

$$\left|\frac{\widetilde{\lambda_i}}{\widetilde{\lambda_j}}\right| = \left|\frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_j - \sigma}\right|$$

Если σ является хорошим приближением для λ_i, то это соотношение будет много меньше единицы и алгоритм будет быстро сходиться.

В качестве величины сдвига σ можно взять $a_{n,n}^{(k)}$. Когда в последней строке матрицы $A^{(k)}$ внедиагональные элементы станут ближки к нулю, будем считать соответствующее собственное значение найденным с достоточной точностью и перейдем к задаче меньшей размерности для поиска остальных собственных значение: будем искать спектр матрицы размерности $(n-1) \times (n-1)$.

9. Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?

   Если $|\lambda| > 1$, то последовательность норм векторов стремится к бесконечности, если $|\lambda| < 1$, то последовательность норм векторов стремится к нулю и возможно исчезновение порядка. Для предупреждения этих ситуаций вектор x^k нормируют.

10. Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.

    (a) С помощью собственных чисел можно сделать вывод о числе обусловленности матрицы.

    (b) В алгоритме простой итерации решения СЛАУ с помощью собственных чисел можно оценить параметр τ, отвечающий за скорость сходимости.

    (c) В теории динамических систем и связанных с ними системах линейных дифференциальных уравнений, знание собственных чисел позволяет определить характер поведения системы во времени и решить вопрос об устойчивости такой системы.

    (d) Задача, которая дает геометрическую интерпретацию собственных векторов, есть приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Собственные вектора образуют главные направления кривых второго порядка.