



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Изменение во времени однородного
температурного поля в сплошном теле*

Студент _____
ФН2-42Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. В. Попов

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

Г. Н. Кувыркин

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Оценка начальных параметров	4
3. Рассмотрение решений дифференциального уравнения	5
3.1. Рассмотрение точного решения	6
3.2. Рассмотрение приближенного решения	9
4. Заключение	10
Литература	12

Введение

С давних времен в науке и технике известна проблема определения температурного состояния различных тел. Наиболее достоверная информация о температурных характеристиках тех или иных предметов, материалов, отдельных частей каких-либо механизмов позволяет с большей точностью рассчитать, например, их надежность, прочность или эффективность. Сегодня, одним из важнейших составляющих решения задач о вычислении и описании процесса изменения температурных характеристик тела является построение математических моделей. Такие модели обычно представляют собой некие соотношения, которые могут наиболее приближенно исследовать и отразить температурные процессы, происходящие в теле. В свою очередь, данная работа и будет посвящена описанию одной из математических моделей изменения температурного поля во времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности в сплошном теле:

$$C_T \frac{dT}{dt} = \alpha(T^* - T) + A_r q_{\text{п}} - \varepsilon_r \sigma_0 T^4, \quad (1.1)$$

где C_T — полная теплоемкость тела, измеряемая в Дж/(м³·К); α — коэффициент теплообмена, измеряемый в Вт/(м²·К); T^* — температура среды, измеряемая в кельвинах; A_r — коэффициент поглощения падающего на тело потока излучения плотностью $q_{\text{п}}$, измеряемой в Вт/(м²); ε_r — коэффициент излучения наружной поверхности; $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана – Больцмана, измеряемая в Вт/(м²·К⁴). Значения коэффициентов A_r и ε_r могут изменяться в пределах от 0 до 1. В работе будет рассмотрен частный случай этого уравнения, а именно, когда все параметры кроме температуры будут являться постоянными. Температура T будет зависеть от времени t .

Для нахождения численного решения приведем (1.1) к безразмерному виду [1]. Правая часть дифференциального уравнения представляет собой

$$\alpha(T^* - T) + A_r q_{\text{п}} - \varepsilon_r \sigma_0 T^4 = \operatorname{div}(\lambda^{(T)} \operatorname{grad}(T(M, t))),$$

где $\lambda^{(T)}$ — измеряемая в Вт/(м·К) теплопроводность материала тела, а $\operatorname{grad}(T(M, t))$ — градиент температуры (вектор, направленный по нормали в сторону повышения температуры) [2]. Разделим обе части (1.1) на α и проинтегрируем по объему тела, вос-

пользовавшись при этом теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \frac{C_\rho}{\alpha} \frac{dT}{dt} dV = \int_S \left((T^* - T) + \frac{A_r q_\Pi}{\alpha} - \frac{\varepsilon_r \sigma_0 T^4}{\alpha} \right) dS.$$

Полагая, что зависимости от V и S нет, получаем:

$$\frac{C_T}{\alpha S} \frac{dT}{dt} = (T^* - T) + \frac{A_r q_\Pi}{\alpha} - \frac{\varepsilon_r \sigma_0 T^4}{\alpha}, \quad (1.2)$$

где V и S — объем и поверхностная площадь тела соответственно, а C_T — полная объемная теплоемкость тела.

Пусть C_T , α , \hat{T} , ε_r не зависят от времени. Так как единицей измерения величины $C_T/\alpha S$ является s (секунда), то можем ввести замену

$$\hat{t} = \frac{\alpha S t}{C_T},$$

которая будет являться безразмерной величиной. Единицей измерения $A_r q_\Pi/\alpha$ из (1.2) являются кельвины, поэтому можем сгруппировать это слагаемое с T^* и обозначить эту сумму за \hat{T} . После введенных замен (1.2) примет вид:

$$\frac{dT}{d\hat{t}} = \hat{T} - T - \frac{\varepsilon_r \sigma_0 T^4}{\alpha}.$$

Разделим обе части уравнения на отличную от нуля температуру \hat{T} и введем еще одну безразмерную величину в качестве замены переменного: $\theta = T/\hat{T}$. Таким образом получим безразмерное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\theta}{d\hat{t}} = 1 - \theta - \frac{\varepsilon_r \sigma_0 \hat{T}^3}{\alpha} \theta^4,$$

или

$$\frac{d\theta}{d\hat{t}} = 1 - \theta - N\theta^4, \quad (1.3)$$

где $N = \varepsilon_r \sigma_0 \hat{T}^3/\alpha$.

Задачей работы будет вычисление как точного аналитического решения (1.3), так и приближенного решения, чьей точности вполне достаточно для инженерных приложений. Также будут рассмотрены изменения решения в зависимости от значений начальных параметров. Переход от безразмерных величин к размерным будет выполняться с помощью обратных замен[4].

2. Оценка начальных параметров

Как было показано выше, с помощью ряда введенных обозначений запись дифференциального уравнения была заметно сокращена. Непосредственно влиять на решение (1.3) будет параметр N , поэтому рассмотрим его составляющие.

Коэффициент излучения ε_r (степень черноты) может меняться в пределах от 0 до 1. Причем для абсолютно черного тела значения коэффициента излучения равно 1. Это означает то, что такое тело поглощает все падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах. Если степень черноты тела равна нулю, то такое тело полностью отражает электромагнитное излучение. Этот параметр зависит от материала, цвета и в некоторых случаях самой температуры поверхности тела.

Коэффициент поглощения тела A_r показывает, какая доля падающего излучения поглощается поверхностью тела. Он так же изменяется от 0 до 1 и зависит от свойств поверхности. В общем случае коэффициент поглощения связан с еще двумя параметрами – коэффициентом пропускания излучения D_r и коэффициентом отражения излучения R_r . Их связь устанавливается равенством $A_r + D_r + R_r = 1$. Для абсолютно черного тела $A_r = \varepsilon_r = 1$.

Коэффициент теплообмена α характеризует интенсивность теплообмена между телом и окружающей средой. Данная величина зависит от теплоемкости поверхности тела, разности температур тела и среды, с которой он контактирует. Так например в сопле ракетного двигателя $\alpha \approx 8700 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а в баке с жидким водородом $\alpha \approx 200000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. При интенсивном теплообмене можно полагать, что $\alpha \rightarrow \infty$.

Плотность потока излучения $q_{\text{п}}$ характеризует количество энергии, передаваемое в единицу времени через единицу площади поверхности. Эта величина зависит от характеристик источника излучения. Так, например, плотность потока излучения солнечного света около $1367 \text{ Вт}/(\text{м}^2)$, а в газовом руле ракетного двигателя ее значение приблизительно $20000 \text{ Вт}/(\text{м}^2)$.

Значения начальной температуры тела и температуры окружающей среды не являются специальными параметрами и полагаем, что они могут принимать любые допустимые значения.

3. Рассмотрение решений дифференциального уравнения

Перед тем как непосредственно начать поиск решения, сделаем некоторое замечание. Когда условия теплообмена постоянны во времени t ($\alpha = \text{const}$ и $T^* = \text{const}$), температура T тела при $t \rightarrow \infty$ стремиться к равновесной температуре \bar{T} , а следовательно θ будет стремиться к $\bar{\theta}$, определяемой из соотношения

$$\bar{\theta} + N\bar{\theta}^4 = 1, \quad (3.1)$$

где $\bar{\theta} = \bar{T}/\hat{T}$ [2]. И таким образом, если в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($\hat{t} = 0$), температура θ_0 отличается от значения равновесной температуры $\bar{\theta}$, то связь между \hat{t} и текущим значением безразмерной температуры можно получить из решения (1.3), предварительно разделив переменные:

$$\hat{t} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{1 - \theta - N\theta^4}, \quad (3.2)$$

где $\theta_0 = T_0/\hat{T}$.

3.1. Рассмотрение точного решения

Средствами компьютерной алгебры мы можем получить аналитическое решение либо в специальном виде, либо непосредственно в радикалах. Так, например, в пакете Wolfram Mathematica функция RootSum позволяет рассмотреть специальную форму аналитического решения, а функция ToRadicals позволяет увидеть более "привычный" вид решения – решение в радикалах. Но, к слову, решение (3.2), записанное в радикалах является многострочной формулой, не совсем удобной для использования.

Для начала нахождения конкретного решения (3.2), нам требуется определить значение параметра N . Сперва рассмотрим частный случай нагрева тела ($\theta_0 < \bar{\theta}$), а именно когда $N = 0$. Приблизительно такая ситуация может возникнуть в случае маленького коэффициента излучения ε_r (полированный металл), высоком коэффициенте теплообмена и небольшой температуре окружающей среды. В данной ситуации (3.2) примет вид

$$\hat{t} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{1 - \theta}. \quad (3.3)$$

Отсюда получаем, что

$$\hat{t} = -\ln \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0}.$$

Как было сказано ранее, с течением времени θ стремится к равновесной температуре $\bar{\theta}$. Эта температура должна являться корнем знаменателя (3.2), который при $N = 0$ имеет только один корень: $\theta = 1$.

Рис. 1. Интегральная кривая зависимости роста температуры от времени при $N = 0$

Исходя из полученного решения, можно сделать вывод о том, что если поверхность совсем не будет поглощать излучение или теплообмен будет очень интенсивен, то рано или поздно температура T примет значение температуры \hat{T} (рис. 1).

Следующим шагом оценим параметр N сверху. Коэффициенты ε_r и A_r примем равными единице. Коэффициент теплообмена α положим равным $1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а плотность потока излучения – $10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2)$. Допустим, что температура окружающей среды будет равна 3000К , а начальная температура тела равна 300К . При заданных таким образом параметрах получаем, что $N \approx 1.6$, но мы, с некоторыми допущениям положим, что $N \approx 2$. Тогда (3.2) примет вид

$$\hat{t} = \int_{0.1}^{\theta} \frac{d\theta}{1 - \theta - 2\theta^4}. \quad (3.4)$$

Для нахождения точного аналитического решения (3.4) необходимо воспользоваться правилами интегрирования рациональных функций[3]. Разложив знаменатель на множители (предварительно найдя корни полинома четвертой степени) имеем

$$\hat{t} = - \int_{0.1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta - 0.64779)(\theta + 1)(\theta^2 - 0.3522\theta + 0.7718)}$$

Тогда вычисляя интеграл, имеем

$$\begin{aligned} \hat{t} = & 0.6299 \ln(\theta - 0.6477) + 0.2857 \ln(\theta + 1) + \\ & + 0.1721 \ln(\theta^2 - 0.3522\theta + 0.7718) + 0.7356 \arctan 0.58(-0.3522 + 2\theta) - 0.2912. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрев графическую интерпретацию решения (3.5) на рис. 2, можно заключить, что, действительно, с течением времени будет достигаться равновесная температура, которая равна одному из корней знаменателя и которая соответствует равновесию конвективного и лучистого тепловых потоков на поверхности тела.

Поведение решения при средних значениях параметров ($\varepsilon_r = A_r = 0.5$, остальные параметры без изменений) будет примерно таким же, как и для вышерассмотренного случая. Разница будет лишь в значении равновесной температуре, которая установится на поверхности тела (рис. 3). Само же решение выглядит аналогично (3.5), с точностью до коэффициентов. Структура корней полинома остается без изменений – все также два действительных корня (один из которых отрицательный) и пара комплексно-сопряженных корней.

Таким образом, рассмотрев точное решение (3.2) можем заключить, что температура тела асимптотически стремиться к равновесной. Она же, в свою очередь зависит от начальных параметров, в особенности от температуры среды, коэффициента излучения и коэффициента теплообмена тела. Данные параметры – составляющие коэффициента N , находящегося в знаменателе подынтегральной функции в (3.2). Чем ниже N , тем ближе $\bar{\theta}$ к 1, а следовательно \bar{T} ближе к T .

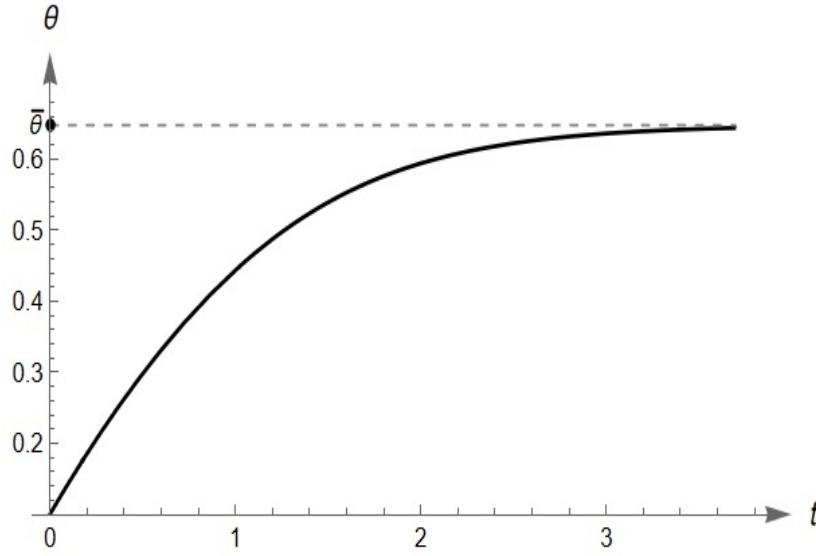


Рис. 2. Интегральная кривая зависимости роста температуры от времени при наибольшем значении N

3.2. Рассмотрение приближенного решения

Недостаток точного решения (3.2) заключается в том, что оно громоздкое и, вдобавок, его вычисление относительно дорогостоящее с точки зрения производительности. Компенсировать эти недостатки можно пожертвовав точностью, а именно, мы можем рассмотреть приближенное решение дифференциального уравнения.

Воспользовавшись равенством (3.1) можем представить (3.2) как

$$\hat{t} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\bar{\theta} - \theta - N\bar{\theta}^4 \cdot \left(1 - \frac{\theta^4}{\bar{\theta}^4}\right)} \quad (3.6)$$

и сделать две замены для $1 - \theta^4/\bar{\theta}^4$ на двух последовательных участках. Для этого рассмотрим график функции $f(\theta/\bar{\theta}) = 1 - \theta^4/\bar{\theta}^4$ и две касательные к нему в точках с абсциссами $\theta/\bar{\theta} = 0$ и $\theta/\bar{\theta} = 1$. Эти касательные будут иметь уравнения $f_1(\theta/\bar{\theta}) = 1$ и $f_2(\theta/\bar{\theta}) = 4 - 4\theta/\bar{\theta}$ и пересекаться в точке с абсциссой $\theta/\bar{\theta} = 3/4$ (рис. 4). Соответственно решение на участке $\theta_0 \leq \theta < 3/4\bar{\theta}$ будет совпадать с решением (3.3), а решение на участке $3/4\bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ будет иметь вид

$$4(1 - \theta/\bar{\theta}) = e^{-(1+4N\bar{\theta}^3)(\hat{t}-\hat{t}_1)},$$

где $\hat{t}_1 = \ln(1 - \theta)/(1 - \theta_0)$ – значение решения в точке перехода от одного решения к другому.

Из рис.5 видно, что приближенное решение (его начало обозначено пунктирной линией, а продолжение точечной пунктирной линией) соответствует более высокому

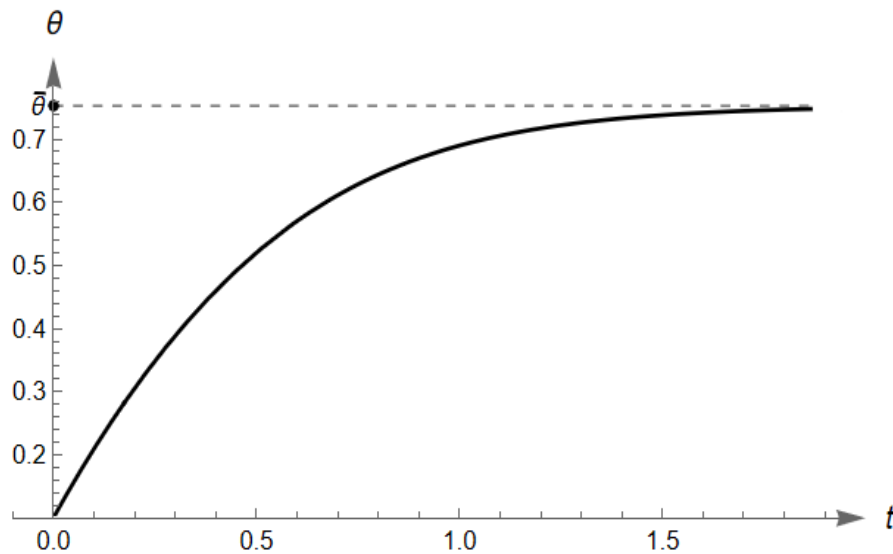


Рис. 3. Интегральная кривая зависимости роста температуры от времени при среднем значении N

темпу нагрева тела, причем погрешность составляет всего несколько процентов (из геометрических соображений - отклонение одного графика от другого).

4. Заключение

Таким образом, в ходе выполнения курсовой работы было проанализировано дифференциальное уравнение теплопроводности в твердом теле. Перед непосредственным поиском решения необходимо было привести это уравнение к безразмерному виду. Также был рассмотрен диапазон изменения начальных значений всех входящих в уравнение параметров, так как именно они влияют на структуру решения.

При поиске аналитических решений мы рассмотрели как граничные состояния тела, так и состояние при средних начальных значениях. Результат показал похожее поведение решений с разницей лишь в принимаемых ими значениях. Это говорит о том, что изменение температурного поля твердого тела подчиняется одним и тем же правилам и законам.

Немаловажную роль играет приближенное решение уравнения. Его погрешность относительно невелика (ее можно сравнить с погрешностью измерительных приборов или с неточными начальными данными), поэтому оно может браться за основное для решения некоторых инженерных задач, что в свою очередь не требует лишней работы с весьма громоздким аналитическим решением.

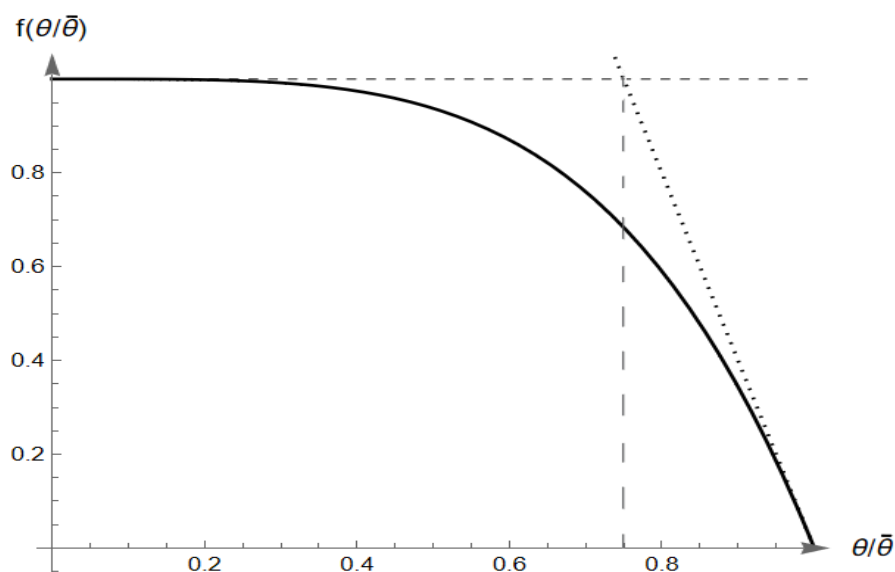


Рис. 4. Визуальное представление принимаемых замен

Литература

1. Dimensionless quantity. //Wikipedia. [2022]. Дата обновления: 20.03.2022. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionlessquantity> (дата обращения: 20.03.2022).
2. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели процессов теплопроводности. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 127 с.
3. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 527 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

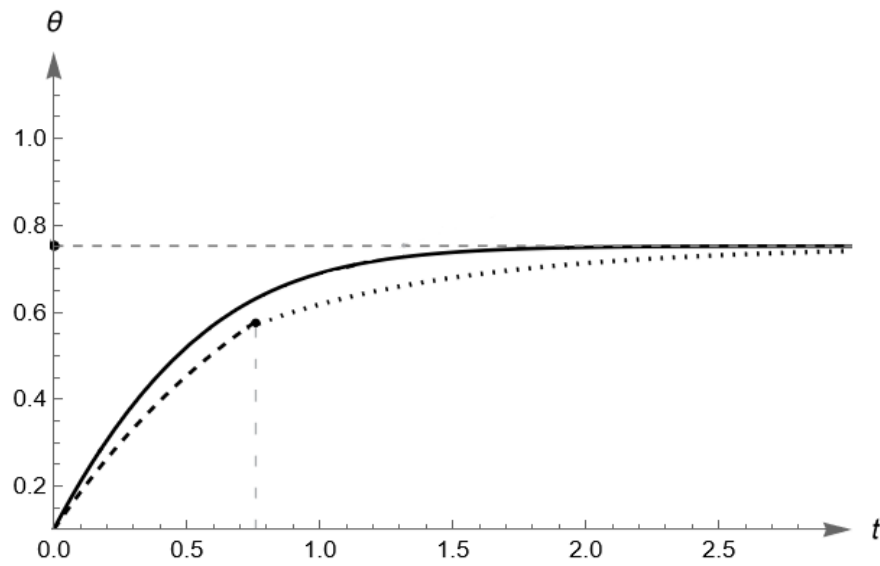


Рис. 5. Точное и приближенное решения для среднего значения N