Анализ численных методов решения стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений

Докладчик: Попов А.В.

Научный руководитель: д.т.н., профессор кафедры ФН2
Деревич И.В.

группа ФН2-52Б

27 декабря 2022 г.

Постановка задачи

Задача Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = A(X(t),t) + B(X(t),t) \cdot \xi(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

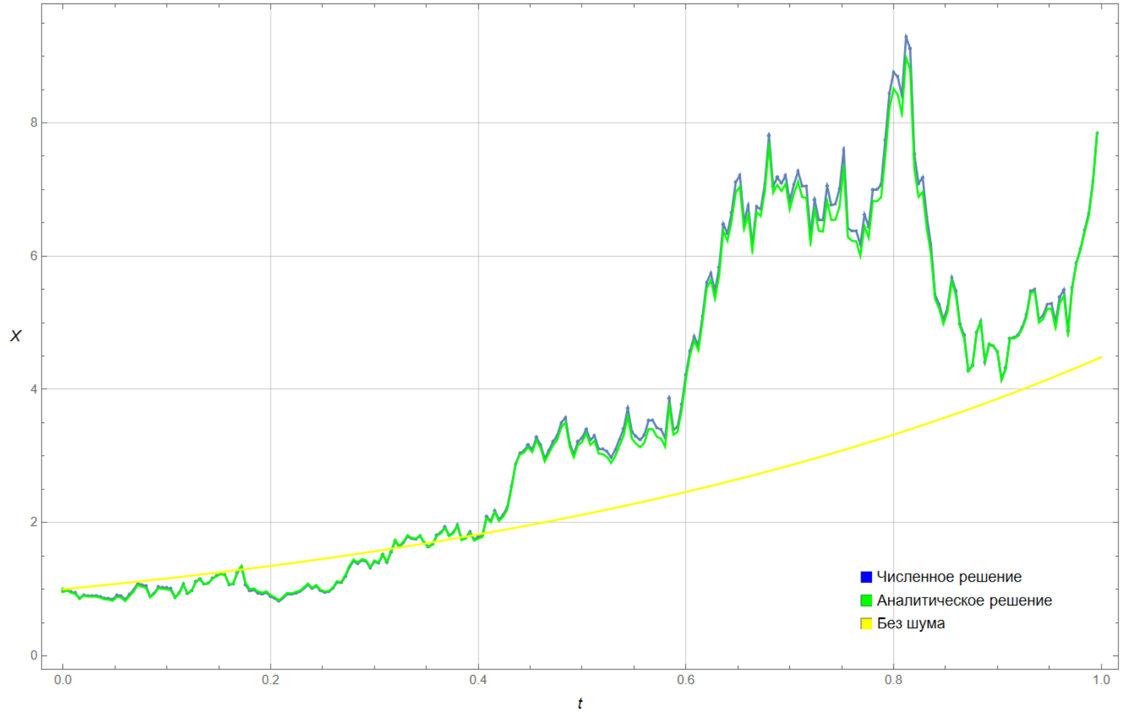
Здесь $A(X(t),t), B(X(t),t)$ – детерминированные матричные функции, $\xi(t)$ – случайный процесс Гаусса (белый шум).

Интегральный вид

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(X(s),s)ds + \int_0^t B(X(s),s)dW(s)$$

$dW(s)$ – дифференциал процесса Винера

Простейшие методы численного решения. Метод Эйлера — Маруямы



СОДУ в дифференциальной форме

$$dX(t) = A(X(t), t)dt + B(X(t), t)dW(t), \qquad X(0) = X_0$$

$$dW(t) \sim \sqrt{dt} \cdot \xi(t), \qquad \xi(t) \sim N(0,1) - \text{генерация компьютера}$$

Вид численного метода

$$X_j = X_{j-1} + A\left(X_{j-1}, t_{j-1}\right)dt + B\left(X_{j-1}, t_{j-1}\right)dW(t)$$

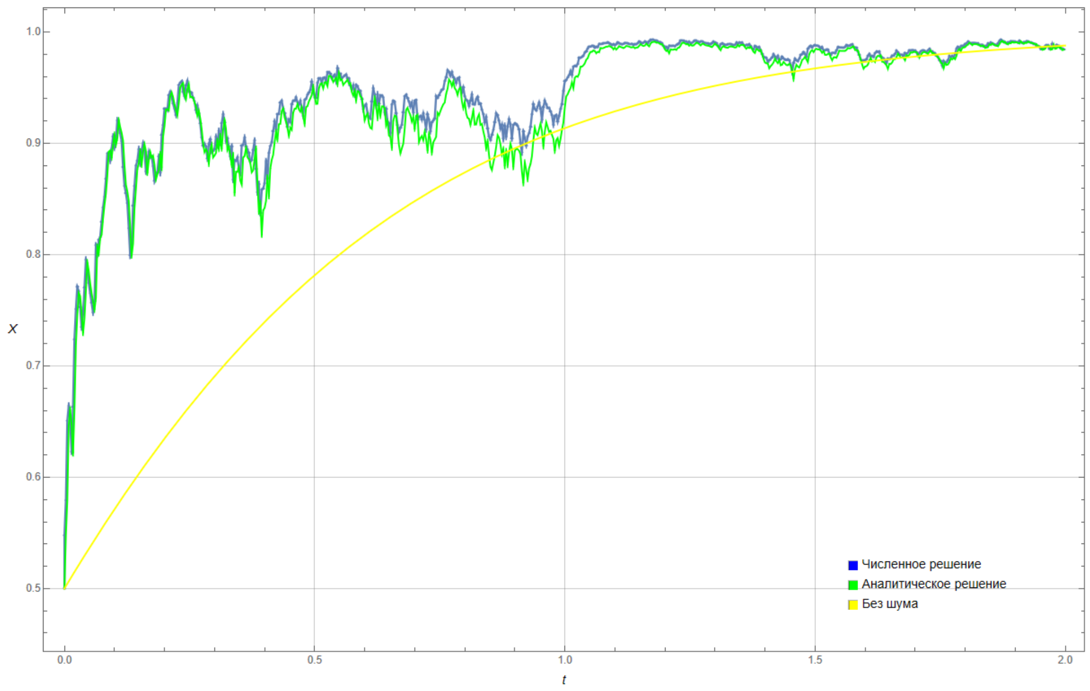
dt – заданный шаг по сетке

Геометрическое броуновское движение

$$dX(t) = kX(t)dt + mX(t)dW(t), \qquad X(0) = 1, \qquad m = 1, \qquad k = 2$$

Решение было найдено на интервале $[0,1]$ с шагом $dt = 2^{-8}$

Метод Рунге — Кутты. Одномерный случай



СОДУ в дифференциальной форме

$$dX(t) = A(X(t),t)dt + B(X(t),t)dW(t), \qquad X(0) = X_0$$

Вид численного метода

$$x_i = X_n + dt\sum_{j=1}^{s} R_{ij}A(x_j,t) + q\sum_{j=1}^{s} \hat{R}_{ij}B(x_j,t)$$

$$X_{n+1} = X_n + dt\sum_{j=1}^{s} r_{ij}A(x_j,t) + p\sum_{j=1}^{s} \hat{r}_{ij}B(x_j,t), \qquad i,j = 1 \dots s$$

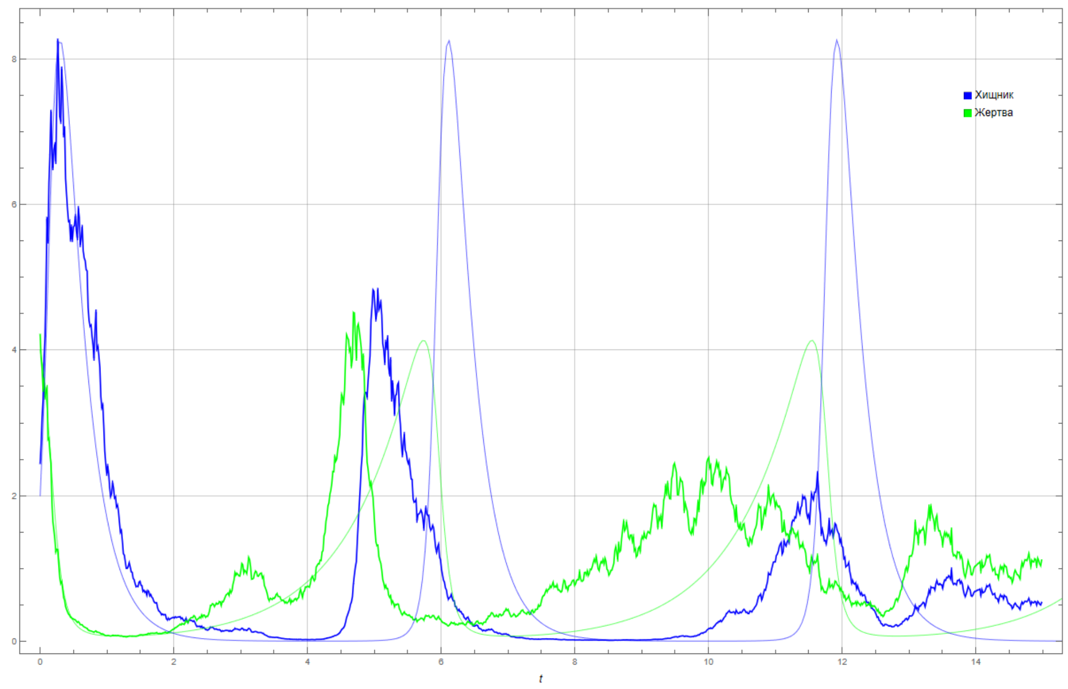
$r_{ij},\ \hat{r}_{ij},\ R_{ij},\ \hat{R}_{ij}$ – известны из таблиц Бутчера

Пример СОДУ для тестирования метода

$$dX(t) = -\left(\alpha + \beta^2 X(t)\right)\left(1 - X^2(t)\right)dt + \beta\left(1 - X^2(t)\right)dW(t), \qquad X(0) = 0.5, \qquad \alpha = -1, \qquad \beta = 1$$

Решение было найдено на интервале $[0,2]$ с шагом $dt = 2^{-8}$ при $s = 3$ (трехстадийный метод)

Метод Рунге — Кутты. Двухмерный случай



Детерминированная модель Лотки — Вольтерры

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x, \\ \dfrac{dy}{dx} = (-\gamma + \delta x)y \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Стохастическая модель Лотки — Вольтеры

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x + \eta x \cdot \xi(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = (-\gamma + \delta x)y + \theta x \cdot \xi(t) \end{cases} \qquad \xi(t) \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Параметры, используемые для моделирования решения

$$x(0) = 4, \quad y(0) = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 3$$

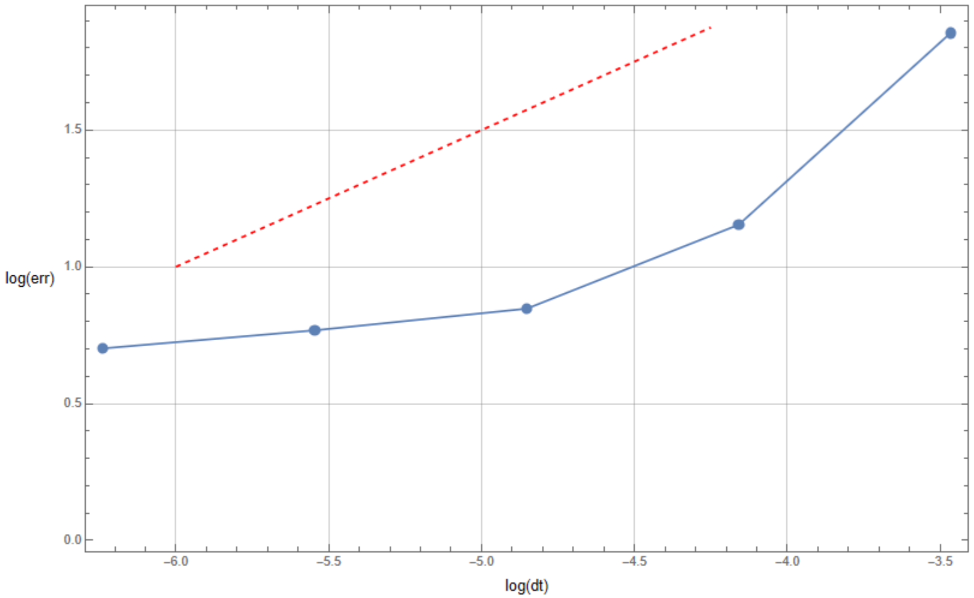
Решение было найдено на интервале $[0,15]$ с шагом $dt = 2^{-10}$ при $s = 3$ (трехстадийный метод)

Анализ результатов. Метод Эйлера — Маруямы. Сильная и слабая сходимость.

Сильная сходимость

$$\langle |X(t) - X(t_n)| \rangle \leq C \cdot dt^g, \quad t = ndt$$

Оценка убывания “среднего ошибки”

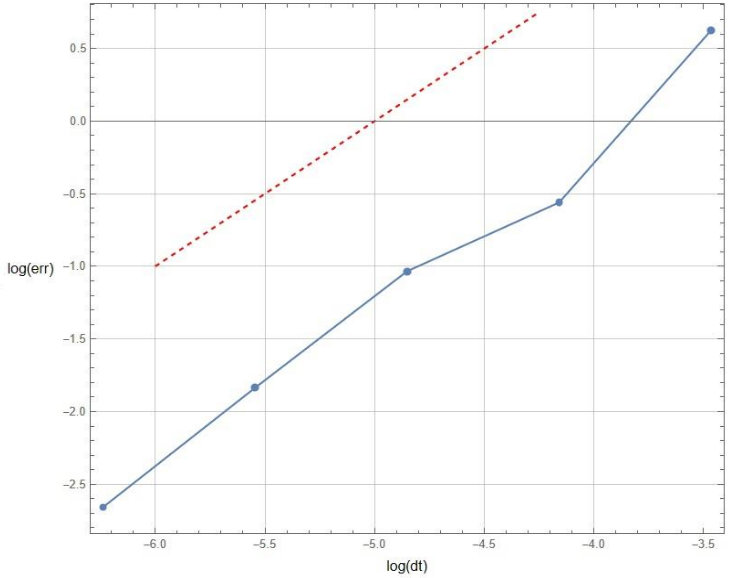


Для метода Эйлера — Маруямы порядок сильной сходимости $g = 0.5$. График в логарифмическом масштабе (пунктирная прямая с наклоном 0.5).

Слабая сходимость

$$|\langle f(X(t)) \rangle - \langle f(X_n) \rangle| \leq C \cdot dt^p, \quad t = ndt$$

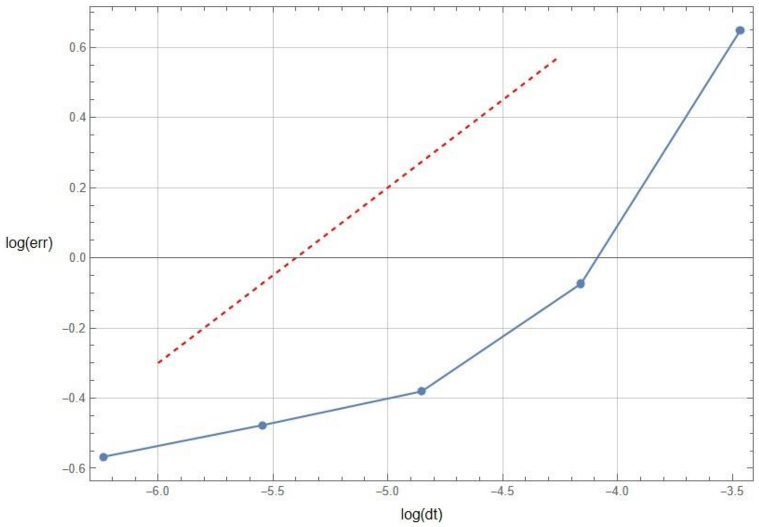
Оценка убывания “ошибки средних”



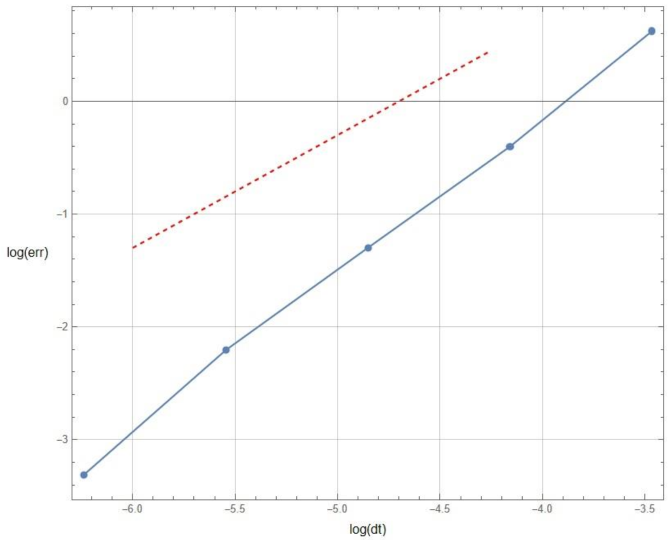
Для метода Эйлера — Маруямы порядок слабой сходимости $p = 1$. График в логарифмическом масштабе (пунктирная прямая с наклоном 1).

Анализ результатов. Метод Рунге — Кутты. Сильная сходимость

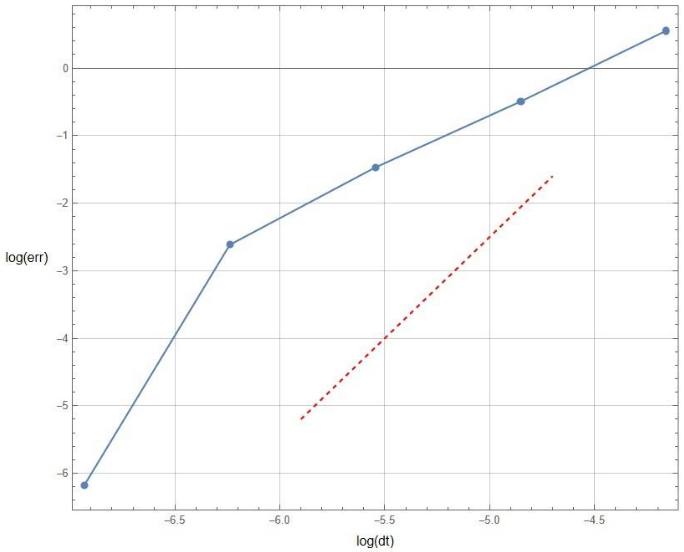
Анализ точности численного решения будем проводить на примере СОДУ $dX(t) = kX(t)dt + mX(t)dW(t)$



Оценка порядка сильной сходимости при $m = 1$. Результат: $g = 0.5$.



Оценка порядка сильной сходимости при $m = 0.01$. Результат: $g = 1$.

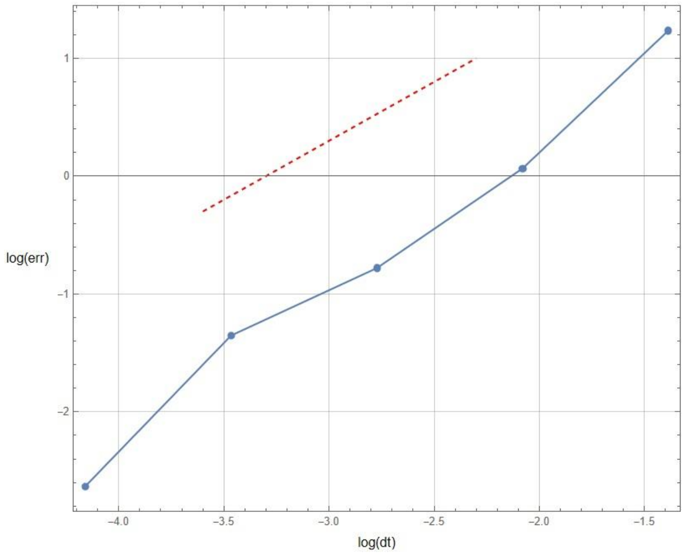


Оценка порядка сильной сходимости при $m = 0$. Результат: $g = 3$.

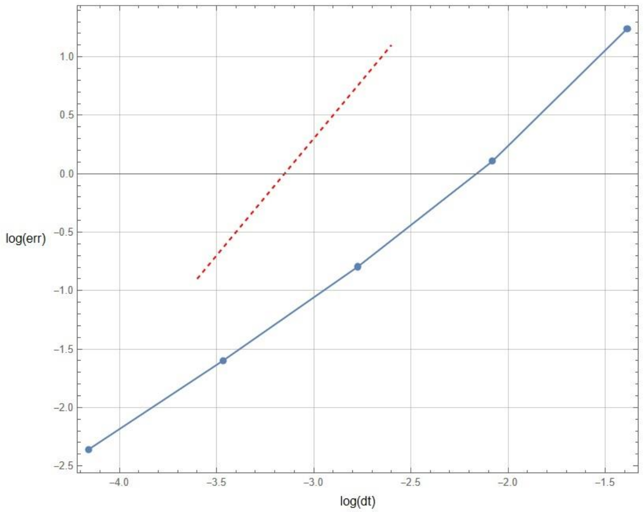
Чем меньше “стохастичность ” дифференциального уравнения, тем больше его порядок сходимости. Сверху это значение ограничено порядком сходимости для детерминированного случая.

Анализ результатов. Метод Рунге — Кутты. Слабая сходимость

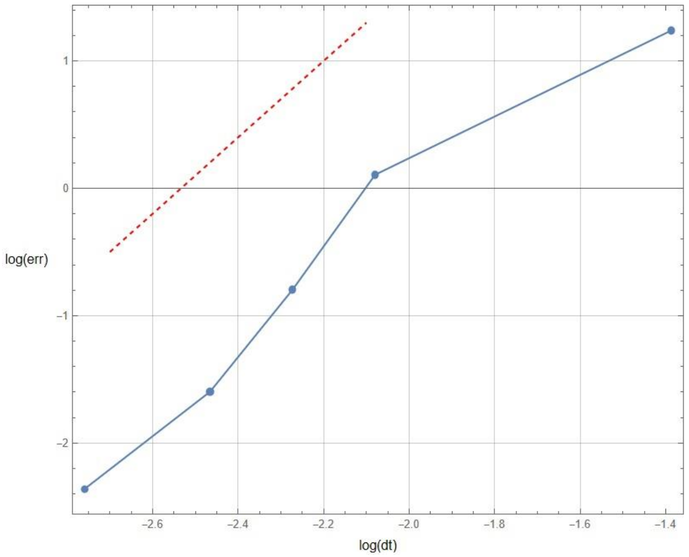
Анализ точности численного решения будем проводить на примере СОДУ $dX(t) = kX(t)dt + mX(t)dW(t)$



Оценка порядка слабой сходимости при $m = 1$. Результат: $p = 0.5$.



Оценка порядка слабой сходимости при $m = 0.01$. Результат: $\mathrm{p} = 1$.



Оценка порядка слабой сходимости при $m = 0$. Результат: $p = 3$.

Чем меньше “стохастичность ” дифференциального уравнения, тем больше его порядок сходимости. Сверху это значение ограничено порядком сходимости для детерминированного случая.

Результаты работы

По окончании работы были получены следующие результаты:

- Изучены базовые сведения о стохастическом дифференциальном исчислении;
- Реализованы два численных метода решения СОДУ: метод Эйлера — Маруямы и метод Рунге — Кутты;
- Были найдены численные решения известных стохастических уравнений и их систем;
- Проведен анализ полученных результатов, была исследована сильная и слабая сходимость численных методов.

Спасибо за внимание.