weight-normalization VS threshold-balancing[1]

2022 年 4 月

符号表示

l: $l \in \{1, \cdots, L\}$ a network with L layers, layer l
W_{ij}^l: weight connection between neuron i in layer l and neuron j in layer $l-1$
b_i^l: neuron i bias in layer l
a_i^l: neuron i activation value(after relu) in layer l
M^l: the number of neurons in layer l
$V_i^l(t)$: neuron i membrane potential in layer l and time t
$z_i^l(t)$: neuron i inputs in layer l and time t
$\Theta_{t,i}^l$: a step function indicating the occurrence of a spike at time t
$N_i^l(t)$: the number of spike generated in neuron i layer l for a total time t
$r_i^l(t)$: firing rate of neuron i in layer l for a total time t
V_{thr}^l : voltage threshold in layer l

满足关系

$$\Theta_{t,i}^l = \Theta\left(V_i^l(t-1) + z_i^l(t) - V_{\text{thr}}\right), with\ \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$N_i^l(t) = \sum_{t'=1}^{t} \Theta_{t',i}^l$$

$$r_i^l(t) = N_i^l(t)/t$$

$$a_i^l = \sum_{j=1}^{M^{l-1}} W_{ij}^l a_j^{l-1} + b_i^l$$

$$V_i^l(t) = V_i^l(t-1) + z_i^l(t) - V_{\text{thr}}\ \Theta_{t,i}^l$$

$$z_i^l(t) = V_{\text{thr}} \left(\sum_{j}^{M^{l-1}} W_{ij}^l \Theta_{t,i}^l + b_i^l\right) \quad *$$

[1] *: 下面探讨针对的都是软重置的脉冲发放方式

对第一层

a) 权重归一化：

$$V_i^l(t) = V_i^l(t-1) + \underbrace{\sum_j^{M^{l-1}} W_{ij}^l x_j + b_i^l}_{a_i^l} - \Theta_{t,i}^l$$

移项并对 T 个时间步长求和：

$$\sum_{t=0}^{T} \Theta_{t,i}^l = \sum_{t=0}^{T} \sum_j^{M^{l-1}} W_{ij}^l x_j + b_i^l - V_i^l(T)$$

由于输入的 x 是固定值, 所以第一层的 Wx+b 是常数项, 式子变成

$$\sum_{t=0}^{T} \Theta_{t,i}^l = \left(\sum_j^{M^{l-1}} W_{ij}^l x_j + b_i^l \right) T - V_i^l(T)$$

两边除以 T

$$r_i^l(T) = \underbrace{\sum_j^{M^{l-1}} W_{ij}^l x_j + b_i^l}_{a_i^l} - \frac{V_i^l(T)}{T} \tag{1}$$

Diehl 当时对权重归一化的解释为：转换后由于阈值和权重的比例不合适, 导致神经元欠激活或者过激活，提出权重归一化来减少这个误差。实际上由式子 (1), **另一种解释方法为：**要想 RELU 单元用 firing rate approximation of an IF neuron with no refractory period 近似, 这里的 firing rate 即 $r_i^l(T) \in [0,1]$, 需要将模拟激活值 a_i^l 映射到 [0,1], 才能用不带不应期的 IF 神经元脉冲发放率做近似。这就是为什么除以激活值最大值, 即权重归一化的数学解释

同时只有对正的输入，膜电势才会积累到超过阈值发放脉冲，这就使得负的输入膜电势越来越负，脉冲发放率为零，完美地用 IF 神经元等价了 RELU 激活函数。

所以注意 (1) 式子中的 W, b 是归一化后的值, 若是换一种表达，即如果 W, b 是 ANN 的原始权重, 那么 (1) 式子应该写为：

$$r_i^l(T) = \underbrace{\sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l}{a_{max}^l} x_j + \frac{b_i^l}{a_{max}^l}}_{a_i^l / a_{max}^l} - \frac{V_i^l(T)}{T} \tag{2}$$

b) 阈值平衡：

上周讨论了发放脉冲是 1 还是 V_{thr} 的问题, 显然发放 V_{thr} 从生物上不符合脉冲的特性，**但是下面我们先说明：发放 V_{thr} 和权重归一化等价**。这时把 $V_{\text{thr}}\,\Theta_{t,i}^l$ 看做一个脉冲数

$$V_i^l(t) = V_i^l(t-1) + \underbrace{\sum_j^{M^{l-1}} W_{ij}^l x_j + b_i^l}_{a_i^l} - V_{\text{thr}}\,\Theta_{t,i}^l \tag{3}$$

移项并对 T 个时间步长求和：

$$V_{\mathrm{thr}}\sum_{t=0}^{T}\Theta_{t,i}^{l}=\sum_{t=0}^{T}\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}x_j+b_i^l-V_i^l(T)$$

由于输入的 x 是固定值, 所以第一层的 Wx+b 是常数项, 式子变成

$$V_{\mathrm{thr}}\sum_{t=0}^{T}\Theta_{t,i}^{l}=\left(\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}x_j+b_i^l\right)T-V_i^l(T)$$

两边除以 T，由于 $r_i^l(T)=\frac{N_i^l(T)}{T}=\frac{V_{\mathrm{thr}}\,\Theta_{t,i}^{l}}{T}$

$$r_i^l(T)=\underbrace{\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}x_j+b_i^l}_{a_i^l}-\frac{V_i^l(T)}{T} \tag{4}$$

这里的 $V_i^l(T)$ 是 (2) 式中的 V_{thr} 倍，在 V_{thr} 设为 a_{max}^l 的情况下，显然权重归一化后的脉冲发放率乘以最大值后，等于阈值平衡的脉冲发放率。

———-以下先忽略 ————

注意**满足关系**一节中的 (*) 式, 它的输入很奇怪, 是输入又乘以了一个电压阈值。**在发放脉冲为 1 的情况下, (*) 式这样的输入才能使两种不同发放的阈值平衡等价**。所以所有输入前面多乘了一项 V_{thr} ,(3) 式变换为

$$V_i^l(t)=V_i^l(t-1)+V_{\mathrm{thr}}\underbrace{\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}x_j+b_i^l}_{a_i^l}-V_{\mathrm{thr}}\,\Theta_{t,i}^{l} \tag{5}$$

由于 $r_i^l(T)=\frac{N_i^l(T)}{T}=\frac{\Theta_{t,i}^{l}}{T}$，可以自然得到与 (4) 式一样的结果

对更高层

$$V_i^l(t)=V_i^l(t-1)+\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}\Theta_{t,j}^{l-1}+b_i^l-V_{\mathrm{thr}}\,\Theta_{t,i}^{l}$$

同样地，进行 T 次求和：

$$V_{\mathrm{thr}}\sum_{t=0}^{T}\Theta_{t,i}^{l}=\sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}\Theta_{t,j}^{l-1}+b_i^l\right)-V_i^l(T)$$

两边同时除以 T

$$r_i^l(T)=\sum_{j}^{M^{l-1}}W_{ij}^{l}r_j^{l-1}+b_i^l-\frac{V_i^l(T)}{T} \tag{6}$$

这是阈值平衡的，显然权重归一化后的脉冲发放率乘以最大值后，仍然等于阈值平衡的脉冲发放率，即两者在高层也完全等价。

激活值与脉冲发放率之间的关系

由 (6) 式可得不同层间的脉冲发放率关系。为了方便表示，我们用权重归一化的形式进行展开。

$$
\begin{aligned}
r_i^l(T) &= \sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l a_{max}^{l-1}}{a_{max}^l} r_j^{l-1} + \frac{b_i^l}{a_{max}^l} - \frac{V_i^l(T)}{T} \\
&= \sum_j^{l-1} \sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l a_{max}^{l-1}}{a_{max}^l} \left(\sum_k^{M^{l-2}} \frac{W_{jk}^{l-1} a_{max}^{l-2}}{a_{max}^{l-1}} r_k^{l-2} + \frac{b_j^{l-1}}{a_{max}^{l-1}} - \frac{V_j^{l-1}(T)}{T} \right) + \frac{b_i^l}{a_{max}^l} - \frac{V_i^l(T)}{T} \\
&= \sum_j^{l-1} \sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l a_{max}^{l-1}}{a_{max}^l} \left(\sum_k^{M^{l-2}} \frac{W_{jk}^{l-1} a_{max}^{l-2}}{a_{max}^{l-1}} \left(\sum \cdots \underbrace{\sum_m^{M^1} \frac{W_{1m}^1}{a_{max}^1} x_m + \frac{b_m^1}{a_{max}^1}}_{a_m^1/a_{max}^1} - \frac{V_i^1(T)}{T} + \cdots + \frac{b}{a_{max}} - \frac{V_i^l(T)}{T} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{b_j^{l-1}}{a_{max}^{l-1}} - \frac{V_j^{l-1}(T)}{T} \right) + \frac{b_i^l}{a_{max}^l} - \frac{V_i^l(T)}{T}
\end{aligned}
$$

用 ΔV_i^l 表示 $\frac{V_i^l(T)}{T}$

则上面的式子变为

$$
r_i^l(T) = \frac{a_i^l}{a_{max}^l} - \Delta V_i^l - \sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l a_{max}^{l-1}}{a_{max}^l} \Delta V_j^l - \cdots - \sum_j^{M^{l-1}} \frac{W_{ij}^l a_{max}^{l-1}}{a_{max}^l} \cdots \sum_k^{M^1} \frac{W_{1k}^2 a_{max}^1}{a_{max}^2} \Delta V_k^1 \tag{7}
$$

所以从理论上来讲，用脉冲发放率 * 最后一层的最大激活值来近似模拟激活值 a_i^l，有 (7) 式中，减号后面一长串的固有误差，这个误差每项都乘了 ΔV，即 $\frac{V(T)}{T}$。所以增加时间步长可以有效地减少转换的损失。对于分类问题，虽然这个误差对每个神经元都存在，但是时间步长的增大，这个误差往往不大，所以对取最大值作为分类结果这样的任务，需要的时间步长不大。但对于检测，这样的误差会引起浮点数计算的改变，所以需要更大的时间步长来减少这一固有损失。

那么既然有了固有误差，人为地将它补上即把在得到脉冲发放率后，将右边误差加到发放率上，就可以无损失地还原模拟激活值了，而且不受时间步长的影响。遗憾的是理论上确实可行，但是这完全没有生物合理性，也失去了脉冲神经网络的意义；从代码实现来讲，这些权重是使得输入 $W\Theta + b$ 为正的权重，将每层的这些权重找出来再和 ΔV 做乘法就过于复杂了。所以在为了简化，转换中人们还是带着这样的误差在做视觉任务。