

考试科目名称 计算机问题求解 (一)

考试日期: 2018 年 01 月 18 日 教师: 陶先平、马骏、魏恒峰

系 (专业): 计算机科学与技术系 年级: 2017 级

姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七			
分数										

题目 1 (“算一算” (Let us Calculate!))

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。

由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

- (1) 若赵去, 钱也去;
- (2) 李、吴两人中必有一人去;
- (3) 钱、孙两人中去且仅去一人;
- (4) 孙、李两人同去或同不去;
- (5) 若吴去, 则赵、钱也去;
- (6) 只有孙去, 赵才会去。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

(2) 给定如下“前提”, 请判断“结论”是否有效, 并说明理由。

前提如下:

- (1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

题目 2 (常用证明方法)

证明: 从 $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

题目 3 (集合的势 (Cardinality))

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。请问 A 的势是什么, 并给出证明。

题目 4 (关系与序 (Order))

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (quasiorder)。
令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 \sim 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \wedge y \leq x,$$

则 \sim 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

(2) 如果定义商集 (quotient set) X/\sim 上的关系 \preceq 为

$$[x]_{\sim} \preceq [y]_{\sim} \triangleq x \leq y,$$

则 \preceq 是偏序关系 (partial order)。

题目 5 (格 (Lattice))

假设 (L, \leq) 是格。如果以下模律 (modular law) 成立, 则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \geq (a \vee x) \wedge b.$$

(2) 请证明: 对任意元素 $a, b, c \in L$, 如果 $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ 成立, 则 $a = c$ 。

友情提示: 正向、逆向使用吸收律 (absorption law)。

(3) 给定任意元素 $s, t \in L$, 且 $s \leq t$, 构造集合 (称为区间 (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \leq x \leq t\}.$$

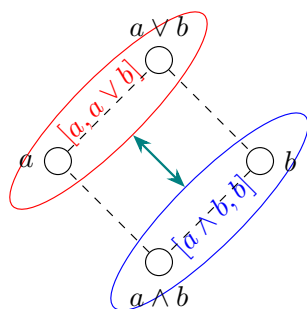
请证明 $([s, t], \leq)$ 是 L 的子格 (sublattice)。

(4) 给定任意元素 $a, b \in L$, 定义函数 $\varphi : [a \wedge b, b] \rightarrow [a, a \vee b]$ 与 $\psi : [a, a \vee b] \rightarrow [a \wedge b, b]$

$$\varphi(x) = x \vee a, \quad \psi(y) = y \wedge b.$$

请证明 φ (类似地, ψ) 是从 $[a \wedge b, b]$ 到 $[a, a \vee b]$ 的同构。

友情提示: 使用模律时, 哪是 a , 哪是 b , 哪是 x ? 图示是不是有一种 “结构”(structure) 之美?



题目 6 (布尔代数 (Boolean Algebra))

给定某布尔代数中的布尔表达式 $E = xy' + xyz' + x'yz'$, 请证明:

(1) $xz' + E = E$

(2) $x + E \neq E$

题目 7 (算法设计与正确性证明)

在“掇蛋”游戏中, 5 张大小连续的扑克牌构成一个顺子 (如 $A\ 2\ 3\ 4\ 5$ 和 $10\ J\ Q\ K\ A$ 都是顺子; 不考虑花色)。任给 13 张从小到大的牌 (允许不同花色重复, 如 $A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$):

(1) 请设计算法, 找到所有的顺子。

友情提示: 上例中有 4 个顺子: (1) $7\ 8\ 9\ 10\ J$ (2) $8\ 9\ 10\ J\ Q$ (3) $9\ 10\ J\ Q\ K$ (4) $10\ J\ Q\ K\ A$ 。

警告: 写伪代码, 而不是写可编译执行的代码!

(2) 请使用“循环不变式” (loop invariants) 证明你设计的算法的正确性。

(3) 数学归纳法的正确性也是需要证明的。请证明第一数学归纳法的正确性。

规定: 不允许使用第二数学归纳法证明。