

Homework

姓名: 赵超懿 学号: 191870271

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 3 月 16 日

题目 1 (P17 1)

证明 $|PROP| = \aleph_0$

解答:

记最短构造序列长度为 n 的命题构成的集合为 T_n , 对 n 进行归纳:

$T_1 = |PS| = \aleph_0$, 假设当 $n=k$ 时结论成立, 当 $n=k+1$ 时, $|T_{k+1}| = |T_k| + 3 * |T_k \times T_k| = \aleph_0$, 所以对任意命题 P 都存在于某一个 T_n 中, $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, T_n, \dots$ 为可数个无穷可数集合, 故 $|PROP| = |\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i| = \aleph_0$

题目 2 (P17 3-(a)(b))

证明以下命题永真

- (a) $A \rightarrow A$
(b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

解答:

(a)

A	$A \rightarrow A$
T	T
F	T

(b)

A	B	C	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

题目 3 (P17 6-(a)(b))

设习题 3 中的命题为 A' , 在 G' 中证明 $\vdash A'$

- (a) $A \rightarrow A$
(b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

解答:

(a)

$$\frac{A \vdash A_{(\rightarrow R)}}{\vdash A \rightarrow A}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{c} A \vdash A, B, C_{(\rightarrow R)} \\ \vdash A, A \rightarrow C, B \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} A, C \vdash A, C_{(\rightarrow R)} \\ C \vdash A, A \rightarrow C_{(\rightarrow L)} \end{array}}{B \rightarrow C \vdash A, A \rightarrow C} \quad \frac{\begin{array}{c} A, B, C \vdash C_{(\rightarrow R)} \\ B \vdash B, A \rightarrow C \end{array}}{B \vdash B, A \rightarrow C} \quad \frac{B, C \vdash A \rightarrow C_{(\rightarrow L)}}{B, C \vdash A \rightarrow C_{(\rightarrow L)}}}{\frac{((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow C)_{(\rightarrow R)}}{\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)}}$$

题目 4 (P17 7)

证明在 G' 中 $\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$ 不可证, 这里 $P, Q, R \in PS$

解答:

$$\frac{\begin{array}{c} P \vdash Q, R_{(\rightarrow R)} \\ \vdash (P \rightarrow Q), R_{(\vee R)} \end{array}}{\vdash (P \rightarrow Q) \vee R}$$
