

Homework

姓名: 赵超懿 学号: 191870271

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 3 月 16 日

题目 1 (P17 1)

证明 $|PROP| = \aleph_0$

解答:

记最短构造序列长度为 n 的命题构成的集合为 T_n , 对 n 进行归纳:

$T_1 = |PS| = \aleph_0$, 假设当 $n=k$ 时结论成立, 当 $n=k+1$ 时, $|T_{k+1}| = |T_k| + 3 * |T_k \times T_k| = \aleph_0$, 所以对任意命题 P 都存在于某一个 T_n 中, $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, T_n, \dots$ 为可数个无穷可数集合, 故 $|PROP| = |\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i| = \aleph_0$

题目 2 (P17 3-(a)(b))

证明以下命题永真

(a) $A \rightarrow A$

(b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

解答:

(a)

| | |
|---|-------------------|
| A | $A \rightarrow A$ |
| T | T |
| F | T |

(b)

| | | | |
|---|---|---|--|
| A | B | C | $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ |
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

题目 3 (P17 6-(a)(b))

设习题 3 中的命题为 A' , 在 G' 中证明 $\vdash A'$

(a) $A \rightarrow A$

(b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

解答:

(a)

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A}_{(\rightarrow R)}$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A, B, C}{\vdash A, A \rightarrow C, B}_{(\rightarrow R)} \quad \frac{A, C \vdash A, C}{C \vdash A, A \rightarrow C}_{(\rightarrow R)}}{B \rightarrow C \vdash A, A \rightarrow C} \quad \frac{\frac{A, B, C \vdash C}{B \vdash B, A \rightarrow C}_{(\rightarrow R)} \quad \frac{B, C \vdash A \rightarrow C}{B \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow C}_{(\rightarrow L)}}{\frac{((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow C)}{\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)}_{(\rightarrow R)}}$$

题目 4 (P17 7)

证明在 G' 中 $\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$ 不可证, 这里 $P, Q, R \in PS$

解答:

$$\frac{P \vdash Q, R}{\vdash (P \rightarrow Q), R}_{(\rightarrow R)}$$

$$\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$$