线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2015.11.14

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij}=i\times j$，计算 $|A|$.
解：若$n=1$，则$A=(1)$，于是 $|A|=1$.
若 $n\geq 2$，则 A 的任意两列都成比例，所以 $|A|=0$.

2. 求 p 使得矩阵 $A=\begin{pmatrix} p & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 15 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小，并求 $r(A)$.

解：$A\to\begin{pmatrix} 1 & 7 & 15 & 3\\ 0 & -12 & -30 & -3\\ p & 4 & 10 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & p & 5p & -p\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 2p & -p\end{pmatrix}$,

$p=0$ 时，$\mathrm{r}(A)$ 最小为2.

3. 设已知矩阵$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 求$A^2-B^2$.

解：$A=\dfrac{1}{2}\big((A+B)+(A-B)\big)=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 15\\ 5 & 12\end{pmatrix}$,

$B=\dfrac{1}{2}\big((A+B)-(A-B)\big)=\begin{pmatrix} -1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,

$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 8 & 15\\ 5 & 13\end{pmatrix}$.

4. 已知3阶矩阵 A 有特征值6,8,9，求矩阵 $B=A^2-16A+64E$ 的特征值.
解：易知 $B=f(A)$，其中 $f(x)=x^2-16x+64=(x-8)^2$。故 B 有特征值 $f(\lambda)=(\lambda-8)^2$.
于是，B 的特征值是：$f(6),f(8),f(9)$，即 4,0,1.

5. 若5元方程组 $Ax=b,b\neq\theta$ 有解 $\xi_1=(1,1,1,1,1)^T,\xi_2=(1,2,3,4,5)^T,\xi_3=(1,0,-3,-2,-3)^T$，且 $r(A)=3$，求方程组的通解.
解：A 的秩 $\mathrm{r}(A)=3$，则对应的齐次线性方程组的基础解系含2 个向量.
令 $\alpha_1=\xi_2-\xi_1=(0,1,2,3,4)^T,\alpha_2=\xi_3-\xi_1=(0,-1,-4,-3,-4)^T$.
易知 α_1,α_2 为对应齐次方程组的非零解，且线性无关，故构成基础解系.
于是原方程组的通解为： $x=\xi_1+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

二.(12分) (1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}$；(2)由(1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ & & \vdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$.

解：(1) 此行列式为 $n+1$ 阶的 Vandermonde 行列式，故

$$D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{i<j}(x_j-x_i).$$

(2) 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$，则 D 为行列式 $D(x)$ 中x^{n-1} 的余子式，

故 $D(x)$ 中 x^{n-1} 的代数余子式为：$(-1)^{2n+1}D = -D$，为 $D(x)$ 多项式中 x^{n-1} 项的系数 $\sum_{i=1}^{n}(-x_i)\prod_{i<j}(x_j - x_i)$，于是 $D = (\sum_{i=1}^{n} x_i)\prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

三.(10分) 设3阶方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A) = 2$，且 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ a & 4 & d \\ b & 2 & 6 \end{pmatrix}$，求$a, b, c, d$的值?

解：$\mathrm{r}(A) = 2$ 说明$|A| = 0$，故 $AA^* = |A|E = O$。故 $\mathrm{r}(A^*) \leq 3 - \mathrm{r}(A) = 1$.

由条件易知 $\mathrm{r}(A^*) \geq 1$，故 $\mathrm{r}(A^*) = 1$，即 A^* 的列成比例.

从而立即可得 $a = 8,\ b = 4,\ c = 3,\ d = 12$.

四.(12分) 求过点：$(-2,0), (-1,1), (1,-3), (t,1)$ 的三次多项式函数 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，其中 t 为参数.

解：将点的坐标代入函数，得方程组

$$\begin{cases} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 = 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 1 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -3 \\ t^3a_3 + t^2a_2 + ta_1 + a_0 = 1 \end{cases}$$

对其增广矩阵做初等行变换得

$$(A, b) = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ t^3 & t^2 & t & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & (t^2-1)(t+2) & -2(t+1)^2 \end{pmatrix}.$$

当 $t = 1$ 或 $t = -2$ 时，$\mathrm{r}(A) = 3 < \mathrm{r}(A, b) = 4$，故方程组无解，即函数不存在.

当 $t = -1$ 时，$\mathrm{r}(A, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

故通解为：$(0, -1, -2, 0)^T + k(-1, -2, 1, 2)^T$，$k$ 为任意非零数，即函数为

$y = -kx^3 - (1 + 2k)x^2 + (-2 + k)x + 2k$.

当 $t \neq 1, -2, -1$ 时，$\mathrm{r}(A, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{t+1}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-t^2+t+4}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2t^2-3t+3}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2(t+1)}{(t-1)(t+2)} \end{pmatrix}$.

故函数为 $y = \frac{1}{(t-1)(t+2)}((t+1)x^3 + (-t^2 + t + 4)x^2 + (-2t^2 - 3t + 3)x - 2(t + 1))$.

五.(12分) 一个方阵 A 称为幂零的，如果存在正整数 N 使得 $A^N = O$. 设 A 为幂零的，证明

(1) $B = a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 也是幂零的;

(2) 若 $a_0 \neq 0$，则 $C = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ 是可逆矩阵，并利用 B 来表示 C^{-1}.

证：假设 $A^k = O$.

(1) $B = AB' = B'A$，其中 $B' = a_1E + a_2A + \cdots + a_mA^{m-1}$，

于是 $B^k = (AB')^k = A^k(B')^k = O$，$B$ 是幂零的。

(2) 易知有如下的矩阵关系：

$$(a_0E+B)(\frac{1}{a_0}E-\frac{1}{a_0^2}B+\frac{1}{a_0^3}B^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^{k-1})=E+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^k=E,$$

即 $C=a_0E+B$ 为可逆矩阵，且 $C^{-1}=\frac{1}{a_0}E-\frac{1}{a_0^2}B+\frac{1}{a_0^3}B^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^{k-1}$.

六.(14**分**) 若n 阶方阵A 满足$A^2=A$, 则称A 为幂等矩阵. 设A 为幂等矩阵，证明

(1) $E-A$ 也为幂等矩阵;

(2) $r(A)+r(E-A)=n$;

(3) A 有$r(A)$个属于特征值1 的线性无关的特征向量，$r(E-A)$个属于特征值0 的线性无关的特征向量.

证：(1) 按幂等矩阵定义可得 $(E-A)^2=E-2A+A^2=E-A$.

(2) 由幂等矩阵定义可得 $A-A^2=A(E-A)=O$，故有 $\mathrm{r}(E-A)\le n-\mathrm{r}(A)$，
即 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)\le n$.
矩阵的秩又有关系：$n=\mathrm{r}(E)=\mathrm{r}(A+(E-A))\le \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)$，
故有：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)=n$.

(3) 由 $A^2=A\times A=A$，可得 A 至少有 $\mathrm{r}(A)$ 个属于特征值1 的无关特征向量.
又由 $A(E-A)=O$，可得 A 至少有 $\mathrm{r}(E-A)$ 个属于特征值0 的无关特征向量.
由(2)的结论可知，$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)=n$，而无关特征向量个数至多 n 个，
故 A 有 $\mathrm{r}(A)$ 个属于特征值1 的无关特征向量，有 $\mathrm{r}(E-A)$ 个属于特征值0
的无关特征向量.

此处，$\mathrm{r}(A)$ 或 $\mathrm{r}(E-A)$ 为零时，看作没有相应特征值.