南京大学大学数学试卷　答案

考试时间 2018.1.10 　任课教师__________　考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设四阶行列式 D 中第1行元素为 $1,2,0,-4$，第3行元素的余子式为 $6,x,19,2$，求 x .

解：因为 $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=a_{11}M_{31}-a_{12}M_{32}+a_{13}M_{33}-a_{14}M_{34}=0$，
故有 $1\cdot 6-2\cdot x+0\cdot 19-(-4)\cdot 2=0$，解得：$x=7$.

2. 设有四阶方阵 A 满足条件 $|\sqrt{2}E+A|=0, AA^T=2E, |A|<0$，其中 E 为四阶单位矩阵，求 A^* 的一个特征值.

解：由 $|\sqrt{2}E+A|=0$ 得 $|-\sqrt{2}E-A|=0$，故 $\lambda=-\sqrt{2}$ 是 A 的一个特征值.
因为 $AA^T=2E$，所以 $|AA^T|=|A|^2=2^4$，而 $|A|<0$，所以 $|A|=-4$.
又 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，故将 $|A|,\lambda$ 代入得 A^* 的一个特征值为 $\dfrac{-4}{-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

3. 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|B|$.

解：由 $A^2B-A-B=E\Rightarrow(A^2-E)B=A+E\Rightarrow(A+E)(A-E)B=A+E$，
因为 $|A+E|=18\neq 0$，故 $A+E$ 可逆，两边同时左乘 $(A+E)^{-1}$，可得 $(A-E)B=E$.
两边再取行列式，因为 $|A-E|=2$，故有 $2|B|=1$，从而 $|B|=\dfrac{1}{2}$.

解法二：由 $A^2B-A-B=E$ 可得 $(A^2-E)B=A+E$，两边取行列式，有 $|A^2-E|\cdot|B|=|A+E|$.
因为 $|A^2-E|=\begin{vmatrix}-2&0&2\\0&3&0\\-4&0&-2\end{vmatrix}=36, |A+E|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{vmatrix}=18$，故有 $36|B|=18$，从而 $|B|=\dfrac{1}{2}$.

4. 设 α,β 分别是 A 的属于特征值

证：反证之，假设 $\alpha+\beta$ 是 A 的特征向量，则有 λ_0 存在，使 $A(\alpha+\beta)=\lambda_0(\alpha+\beta)$，
又 α,β 是 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，所以 $A\alpha=\lambda_1\alpha, A\beta=\lambda_2\beta$，则
$A\alpha+A\beta=A(\alpha+\beta)=\lambda_0(\alpha+\beta), \lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$，即$(\lambda_1-\lambda_0)\alpha+(\lambda_2-\lambda_0)\beta=0$，
因为 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量线性无关，所以 $\lambda_1-\lambda_0=0, \lambda_2-\lambda_0=0$，
即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$，这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 故假设不成立，即$\alpha+\beta$ 不是 A 的特征向量.

二、 (本题12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\k&1&-k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，求 k 为何值时，矩阵 A 可以对角化？

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\-k&\lambda-1&k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.
若 A 相似于对角矩阵，则 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量应有两个，
即矩阵 $(1\cdot E-A)$ 的秩应为1.
而 $E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-k&0&k\\-4&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，无论 k 为何值， $E-A$ 的秩都是2，
故无论 k 为何值，A 都不能相似于对角矩阵.

三. (本题12分) 设 A,B 都是对称正定矩阵，且 $AB=BA$，试判断 AB 是否也是正定矩阵？

证：由 $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$ 得出 AB 是实对称矩阵.

令 λ 是 AB 的任一特征值，对应特征向量为 $\xi \neq \theta$，则有 $AB\xi = \lambda\xi$，于是 $B\xi = \lambda A^{-1}\xi$，
两边左乘 ξ^T 得 $\xi^T B\xi = \lambda\xi^T A^{-1}\xi$.
由 A 是正定矩阵可知 A^{-1} 还是正定矩阵（因为 A^{-1} 的所有特征值均为正），即 $\xi^T A^{-1}\xi > 0$，
而由题设还有 $\xi^T B\xi > 0$，所以 $\lambda > 0$.
故 AB 的任一特征值都是正数，因此 AB 也是正定矩阵.

证法二：因为 A, B 对称正定，故存在可逆矩阵 P 使得 $P^T AP = E$，即 $A = P^{-T}P^{-1}$.
令 $M = P^T(AB)P = P^T(P^{-T}P^{-1}B)P = P^{-1}BP$，
则 $M^T = P^T B^T P^{-T} = P^T BP^{-T} = P^T BAP = P^T(AB)P = M$，故 M 对称.
又 M 相似于 B，故 M 与对称正定矩阵 B 有相同的特征值，均为正数，故 M 为对称正定矩阵.
由于 AB 与 M 合同，而 M 为对称正定矩阵，合同于单位矩阵，故 AB 也合同于单位矩阵，对称正定.

四. (**本题12分**) 已知三阶非零矩阵 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$ 的解向量，(1) 求 λ 的值；(2) 求矩阵 B 的秩.

解：(1) 由题设，题中的齐次线性方程组有非零解，故它的系数行列式为零，即
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(\lambda - 1) = 0$，解得 $\lambda = 1$.
(2) 又由于 $r(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}) = 2$，故题设齐次线性方程组的基础解系中所含向量个数$= 3 - 2 = 1$，而 $B \neq O$，所以 $r(B) = 1$.

五. (**本题12分**) n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 β_1, β_2 都正交. 证明：(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_2$ 线性无关；(2) β_1, β_2 线性相关.

证：(1) 令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1} + k\beta_2 = \theta$，因为 β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 正交，故有
$k_1(\alpha_1, \beta_2) + k_2(\alpha_2, \beta_2) + \cdots + k_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_2) + k(\beta_2, \beta_2) = 0, k(\beta_2, \beta_2) = 0 \Rightarrow k = 0(\beta_2 \neq \theta)$.
又因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$线性无关，所以$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_2$ 线性无关.
(2) 另一方面，又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_2, \beta_1$ 线性相关（$n+1$ 个 n 维向量必线性相关），
所以 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_2$ 线性表示，设 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_{n-1}\alpha_{n-1} + t\beta_2$，
令 $\alpha = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_{n-1}\alpha_{n-1}$，则 $\beta_1 = \alpha + t\beta_2$，
且有 $(\alpha, \beta_1) = t_1(\alpha_1, \beta_1) + t_2(\alpha_2, \beta_1) + \cdots + t_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_1) = 0$，同理 $(\alpha, \beta_2) = 0$.
又 $(\alpha, \beta_1) = (\alpha, \alpha + t\beta_2) = (\alpha, \alpha) + t(\alpha, \beta_1) = (\alpha, \alpha)$，故 $(\alpha, \alpha) = 0$，于是 $\alpha = \theta$，得 $\beta_1 = t\beta_2$，
此即 β_1, β_2 线性相关.

证法二：(1) 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_2$ 线性相关，由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关，
故 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示，设为 $\beta_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$.
因为 β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 正交，故有 $(\beta_2, \beta_2) = k_1(\alpha_1, \beta_2) + k_2(\alpha_2, \beta_2) + \cdots + k_{n-1}(\alpha_{n-1}, \beta_2) = 0$，
即 $\beta_2 = \theta$，与题设 β_2 为非零向量矛盾，故结论成立.
(2) 令 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{pmatrix}$，则由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关知 $r(A) = n - 1$.
故齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的基础解系只含一个向量，设为 ξ，且解集为 $k\xi$.
显然 β_1, β_2 均为 $Ax = \theta$ 的非零解，故 $\beta_1 = k_1\xi, \beta_2 = k_2\xi, k_1, k_2 \neq 0$，于是 $\beta_2 = \dfrac{k_2}{k_1}\beta_1$，
即 β_1, β_2 线性相关.

六. (**本题12分**) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 R^3 的两个基，其中 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，试求 $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 分别在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和基 $\beta_2, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

解：由 $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$，显然可知，$\alpha$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -2, 3)^T$，

又由题设可知，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为：$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

于是，α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3)^T$ 能由坐标变换公式得到，即

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\3\end{pmatrix}.$$

七. (**本题12分**) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 的一个特征值为3，(1) 求 y；(2) 求正交矩阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

解：(1) 因为 A 有特征值3，故 $|3E-A|=8(2-y)=0$，得到 $y=2$.

(2) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，令 $B=A^TA=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$，

则要求正交矩阵 P 使得 $(AP)^T(AP)=P^T(A^TA)P=P^TBP$ 为对角矩阵.

$|\lambda E-B|=(\lambda-1)^3(\lambda-9)$ 得到 B 的特征值为：$\lambda=1(3\text{重}),9$.

$\lambda=1$ 时，解 $(E-B)x=\theta$ 得无关特征向量：$\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,1,-1)^T$，

标准正交化得：$\beta_1=(1,0,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0,0)^T,\beta_3=(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

$\lambda=9$ 时，解 $(9E-B)x=\theta$ 得单位特征向量：$\beta_4=(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，则 P 为正交矩阵，且有 $P^TAP=\mathrm{diag}(1,1,1,9)$.