南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2017.7.4 任课教师________ 考试成绩________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}$.

解：$|D_n|=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$

由 n 阶范德蒙行列式，有

$D_n=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]=n!\cdot(n-1)!\cdots 2!\cdot 1!$.

2. 已知2阶实可逆矩阵 A 的特征值为整数 λ_1,λ_2，若矩阵 B 的特征值为 $-5,-7$ 且 $B=(A^{-1})^2-6A^{-1}$，求 λ_1 和 λ_2.

解：若 A 的特征值为 λ，则 A^{-1} 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$，那么 $B=(A^{-1})^2-6A^{-1}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda^2}-\dfrac{6}{\lambda}=-5$ 或 7，又由于 A 的特征值为整数，解之得：$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$.

3. 设 A,B 都是3阶方阵，且满足 $AB+E=A^2+B$，又设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解：因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $A-E$ 可逆，即 $(A-E)^{-1}$ 存在.

$AB+E=A^2+B\Rightarrow AB-B=A^2-E\Rightarrow(A-E)B=(A-E)(A+E)\Rightarrow B=A+E$，

故 $B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，且 $ad-bc=1,|a+d|>2$，判断 A 是否相似于对角矩阵？

解：计算特征多项式 $p(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$. 它的判别式 $(a+d)^2-4>2^2-4=0$，所以 $p(\lambda)=0$ 有两个互异的根，也就是 A 的特征值互异，所以 A 相似于对角矩阵.

二、 (本题12分) 已知 $\alpha=(1,1,1)^T$ 是二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 对应矩阵的特征向量，判断该二次型是否正定？

解：二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&b\\1&1&1\\b&1&a\end{pmatrix}$. 设 α 是对应于特征值 λ_0 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则

$\begin{pmatrix}2&1&b\\1&1&1\\b&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}2+1+b=\lambda_0\\1+1+1=\lambda_0\\b+1+a=\lambda_0\end{cases}$，解得 $\lambda_0=3,a=2,b=0$.

对于 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，因 $|A|=0$，故 f 不是正定二次型.

三. (本题12分) 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，讨论向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

解：由于 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{pmatrix}$，

而 $\begin{vmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}$，所以

当 s 为奇数时，此行列式$=2\neq 0$，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关；

当 s 为偶数时，此行列式$=0$，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

四. (本题12分) 求 $\lim\limits_{k\to\infty}\begin{pmatrix}1/2&2&5\\&0&-1\\&&-1/3\end{pmatrix}^k$.

解：由于矩阵 $A=\begin{pmatrix}1/2&2&5\\&0&-1\\&&-1/3\end{pmatrix}$ 的特征值为 $1/2,0,-1/3$ 互不相同，所以 A 相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1/2&&\\&0&\\&&-1/3\end{pmatrix}$. 那么有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}A^k&=\lim_{k\to\infty}P\begin{pmatrix}1/2&&\\&0&\\&&-1/3\end{pmatrix}^kP^{-1}=\lim_{k\to\infty}P\begin{pmatrix}(1/2)^k&&\\&0^k&\\&&(-1/3)^k\end{pmatrix}P^{-1}\\&=P\cdot\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}(1/2)^k&&\\&0^k&\\&&(-1/3)^k\end{pmatrix}\cdot P^{-1}=P\cdot O\cdot P^{-1}=O.\end{aligned}$$

五. (本题12分) 已知3阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ (k 为常数)，且 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

解：由于 $AB=O$，故 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq 3$，又由 a,b,c 不全为零，可知 $\mathrm{r}(A)\geq 1$.

当 $k\neq 9$ 时，$\mathrm{r}(B)=2$，于是 $\mathrm{r}(A)=1$.

当 $k=9$ 时，$\mathrm{r}(B)=1$，于是 $\mathrm{r}(A)=1$ 或 $\mathrm{r}(A)=2$.

(1) 对于 $k\neq 9$，由 $AB=O$ 可得 $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$ 和 $A\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=0$，

由于 $\eta_1=(1,2,3)^T,\eta_2=(3,6,k)^T$ 线性无关，故 η_1,η_2 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，
于是 $Ax=0$ 的通解为 $x=c_1\eta_1+c_2\eta_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(2) 对于 $k=9$，分别就 $\mathrm{r}(A)=2$ 和 $\mathrm{r}(A)=1$ 进行讨论.

(i) 如果 $\mathrm{r}(A)=2$，则 $Ax=0$ 的基础解系由一个向量构成，又因为 $A(1,2,3)^T=0$，
所以 $Ax=0$ 的通解为 $x=c_1(1,2,3)^T$，其中 c_1 为任意常数.

(ii) 如果 $\mathrm{r}(A)=1$，则 $Ax=0$ 的基础解系由两个向量构成，又因为 A 的第一行为 (a,b,c)
且 a,b,c 不全为零，所以 $Ax=0$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$.

不妨设 $a \neq 0$，则 $\eta_1 = (-b, a, 0)^T, \eta_2 = (-c, 0, a)^T$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解，
故 $Ax = 0$ 的通解为 $x = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

六. (**本题12分**) 设 R^3 的两组基为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$，求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵和 β_1 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解：设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$，则由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为
$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
又因为 β_1 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标是 $(1, 0, 0)^T$，所以 β_1 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

七. (**本题12分**) 证明：二次型 $f = x^TAx$ 在 $x^Tx = 1$ 条件下的最大(小)值，等于实对称矩阵 A 的最大(小)特征值.

证：下证最大值的情形（最小值情形同理可证）：
设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，不妨设 λ_n 为其中最大值，且 $Ax_n = \lambda_n x_n$.
因为 A 实对称矩阵，所以对二次型 $f = x^TAx$，存在正交变换 $x = Qy$，使
$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$.
由于 $x^Tx = (Qy)^T(Qy) = y^T(Q^TQ)y = y^Ty$，故当 $x^Tx = 1$ 时，$y^Ty = 1$，即 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$，
故 $f \leq \lambda_n$. 又因为 $f(x_n) = x_n^TAx_n = x_n^T\lambda_n x_n = \lambda_n x_n^Tx_n = \lambda_n$，所以有 $\max f(x) = \lambda_n$.