南京大学大学数学试卷

考试时间 2017.7.4 任课教师__________ 考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

2. 已知2阶实可逆矩阵 A 的特征值为整数 λ_1, λ_2，若矩阵 B 的特征值为 $-5, -7$ 且 $B = (A^{-1})^2 - 6A^{-1}$，求 λ_1 和 λ_2.

3. 设 A, B 都是3阶方阵，且满足 $AB + E = A^2 + B$，又设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 B.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，且 $ad - bc = 1, |a+d| > 2$，判断 A 是否相似于对角矩阵？

二、 (本题12分) 已知 $\alpha = (1,1,1)^T$ 是二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$ 对应矩阵的特征向量，判断该二次型是否正定？

三. (本题12分) 已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \beta_{s-1} = \alpha_{s-1} + \alpha_s, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$，讨论向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的线性相关性.

四. (本题12分) 求 $\lim\limits_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 5 \\ & 0 & -1 \\ & & -1/3 \end{pmatrix}^k$.

五. (本题12分) 已知3阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数)，且 $AB = O$，求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

六. (本题12分) 设 R^3 的两组基为 $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,-1)^T, \alpha_3 = (1,0,1)^T$ 和 $\beta_1 = (1,2,1)^T, \beta_2 = (2,3,4)^T, \beta_3 = (3,4,3)^T$，求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵和 β_1 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

七. (本题12分) 证明：二次型 $f = x^T Ax$ 在 $x^T x = 1$ 条件下的最大(小)值，等于实对称矩阵 A 的最大(小)特征值.