线性代数复习要点

第一部分　行列式

1. 排列的逆序数

2. 行列式按行（列）展开法则

3. 行列式的性质及行列式的计算

行列式的定义

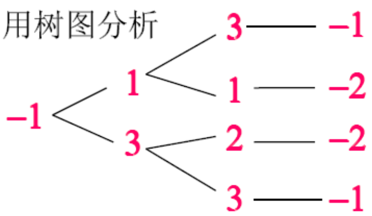
1. 行列式的计算：

①（定义法）$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

思考题：用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：用树图分析



$\tau(2134)=1$

$\tau(2143)=2$

$\tau(2413)=3$

$\tau(2431)=4$

故 $D=-3+2-12+9=-4$

②（降阶法）行列式按行（列）展开定理：

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

③ (化为三角型行列式)上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

$$|A| = \begin{vmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$$

④ 若 A与B 都是方阵（不必同阶），则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

⑤ 关于副对角线：

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n1}$$

⑥ 范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i - x_j\right)$$

⑦ $a-b$型公式：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

⑧ (升阶法)在原行列式中增加一行一列，保持原行列式不变的方法.

⑨ (递推公式法) 对 n 阶行列式 D_n 找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_{n-1}，D_{n-2} 之间的一种关系——称为递推公式，其中 D_n，D_{n-1}，D_{n-2} 等结构相同，再由递推公式求出 D_n 的方法称为递推公式法.

(拆分法) 把某一行（或列）的元素写成两数和的形式，再利用行列式的性质将原行列式写成两行列式之和，使问题简化以例计算.

⑩ (数学归纳法)

2. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k \lambda^{n-k}$，其中 S_k 为 k 阶主子式；

3. 证明 $|A| = 0$ 的方法：

①、$|A|=-|A|$；

②、反证法；

③、构造齐次方程组 $Ax=0$，证明其有非零解；

④、利用秩，证明 $r(A)<n$；

⑤、证明 0 是其特征值.

4. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

第二部分　矩阵

1. 矩阵的运算性质

2. 矩阵求逆

3. 矩阵的秩的性质

4. 矩阵方程的求解

1. 矩阵的定义 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m\times n$ 矩阵.

记作：$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$

① 同型矩阵：两个矩阵的行数相等、列数也相等.

② 矩阵相等：两个矩阵同型，且对应元素相等.

③ 矩阵运算

a. 矩阵加（减）法：两个同型矩阵，对应元素相加（减）.

b. 数与矩阵相乘：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

c. 矩阵与矩阵相乘：设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$，

其中

$$c_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

注：矩阵乘法不满足：交换律、消去律，即公式 $\begin{matrix} AB=BA \\ AB=0\Rightarrow A=0\text{或}B=0 \end{matrix}$ 不成立.

a. 分块对角阵相乘：$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$，$A^n=\begin{pmatrix} A_{11}^n & \\ & A_{22}^n \end{pmatrix}$

b. 用对角矩阵 Λ 左 乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的 行 向量；

$$\Lambda B=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_{m1} & a_mb_{m2} & \cdots & a_mb_{mn} \end{bmatrix}$$

c. 用对角矩阵 Λ 右 乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的 列 向量.

$$B\Lambda=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_mb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_mb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{m1} & a_2b_{m2} & \cdots & a_mb_{mn} \end{bmatrix}$$

d. 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

④ 方阵的幂的性质：$A^mA^n=A^{m+n}$， $(A^m)^n=(A)^{mn}$

⑤ 矩阵的转置：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

a. 对称矩阵和反对称矩阵：A 是对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A=A^T$.

A 是反对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ $A=-A^T$.

b. 分块矩阵的转置矩阵：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$

⑥ 伴随矩阵： $A^*=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 为 $|A|$ 中各个元素的代数余子式.

$AA^*=A^*A=|A|E$，$|A^*|=|A|^{n-1}$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

分块对角阵的伴随矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} BA^* & \\ & AB^* \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} & (-1)^{mn}|A|B^* \\ (-1)^{mn}|B|A^* & \end{pmatrix}$

矩阵转置的性质：	$(A^T)^T=A$	$(AB)^T=B^TA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^T)^*=(A^*)^T$
矩阵可逆的性质：	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}$	
伴随矩阵的性质：	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$(AB)^*=B^*A^*$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{\lvert A\rvert}$	$(A^k)^*=(A^*)^k$
$r(A^*)=\begin{cases} n & 若r(A)=n \\ 1 & 若r(A)=n-1 \\ 0 & 若r(A)<n-1 \end{cases}$		$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$	$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$（无条件恒成立）	

2. 逆矩阵的求法　方阵 A 可逆　　$|A|\neq 0$.

①伴随矩阵法　$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$　　　注：$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　　　主L 换位
副L 变号

② 初等变换法　$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{初等行变换}(E\,\vdots\,A^{-1})$

③ 分块矩阵的逆矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B \end{pmatrix}$$

④ $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$

⑤ 配方法或者待定系数法　（逆矩阵的定义 $AB=BA=E\Rightarrow A^{-1}=B$ ）

3. 行阶梯形矩阵 可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素非零. 当非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其他元素都是0时，称为行最简形矩阵

4. 初等变换与初等矩阵　对换变换、倍乘变换、倍加（或消法）变换

初等变换	初等矩阵	初等矩阵的逆	初等矩阵的行列式
$\boldsymbol{r_i\leftrightarrow r_j}$ ($\boldsymbol{c_i\leftrightarrow c_j}$)	$\boldsymbol{E(i,j)}$	$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$	$\lvert E(i,j)\rvert=-1$
$\boldsymbol{r_i\times k}$ ($\boldsymbol{c_i\times k}$)	$\boldsymbol{E(i(k))}$	$E[i(k)]^{-1}=E[i(\frac{1}{k})]$	$\lvert E[i(k)]\rvert=k$
$\boldsymbol{r_i+r_j\times k}$ ($\boldsymbol{c_i+c_j\times k}$)	$\boldsymbol{E(i,j(k))}$	$E[i,j(k)]^{-1}=E[i,j(-k)]$	$\lvert E[i,j(k)]\rvert=1$

☻ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系：

① 对 A 施行一次初等行变换得到的矩阵，等于用相应的初等矩阵左乘 A；

② 对 A 施行一次初等列变换得到的矩阵，等于用相应的初等矩阵右乘 A .

注意： 初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵.

5. $\boxed{\text{矩阵的秩}}$ 关于 A 矩阵秩的描述：

①、$r(A)=r$， A 中有 r 阶子式不为 0， $r+1$ 阶子式 (存在的话) 全部为 0；

②、$r(A)<r$， A 的 r 阶子式全部为 0；

③、$r(A)\geq r$， A 中存在 r 阶子式不为 0；

☻ 矩阵的秩的性质：

① $A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geqslant 1$； $A=O\Leftrightarrow r(A)=0$；$0\leqslant r(A_{m\times n})\leqslant \min(m,n)$

② $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$

③ $r(kA)=r(A)\quad$ 其中 $k\neq 0$

④ 若 $A_{m\times n},B_{n\times s}$，若 $r(AB)=0\Rightarrow\begin{cases} r(A)+r(B)\leq n \\ B\text{的列向量全部是}Ax=0\text{的解}\end{cases}$

⑤ $r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$

⑥ 若 P 、 Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；　　即：可逆矩阵不影响矩阵的秩.

⑦ 若 $r(A_{m\times n})=n\begin{cases}\Leftrightarrow Ax=o\ \text{只有零解} \\ \Rightarrow\begin{cases} r(AB)=r(B) \\ A\text{在矩阵乘法中有左消去律}\begin{cases} AB=O\Rightarrow B=O \\ AB=AC\Rightarrow B=C\end{cases}\end{cases}\end{cases}$；

若 $r(B_{n\times s})=n\Rightarrow\begin{cases} r(AB)=r(B) \\ B\text{在矩阵乘法中有右消去律.}\end{cases}$

⑧ 若 $r(A)=r\Rightarrow A$ 与唯一的 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$ 等价，称 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的**等价标准型.**

⑨ $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$， $\max\{r(A),r(B)\}\leqslant r(A,B)\leqslant r(A)+r(B)$

⑩ $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$， $r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B\end{pmatrix}\neq r(A)+r(B)$

☻ 求矩阵的秩：定义法和行阶梯形阵方法

6 矩阵方程的解法($|A| \neq 0$)：设法化成(I) $AX = B$ 或 (II) $XA = B$

(I)的解法：构造 $(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots X)$　(II)的解法：构造 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ X \end{pmatrix}$

(II)的解法：将等式两边转置化为 $A^T X^T = B^T$，

用(I)的方法求出 X^T，再转置得 X

第三部分　线性方程组

1. 向量组的线性表示

2. 向量组的线性相关性

3. 向量组的秩

4. 向量空间

5. 线性方程组的解的判定

6. 线性方程组的解的结构（通解）

（1）齐次线性方程组的解的结构（基础解系与通解的关系）

（2）非齐次线性方程组的解的结构（通解）

1. 线性表示：对于给定向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合，或称称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性表示.

线性表示的判别定理:

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性表示

$\Leftrightarrow$ 由 n 个未知数 m 个方程的方程组构成 n 元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_n \end{cases}$ 有解

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = \beta$

③、$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$（全部按列分块，其中 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta$（线性表出）

$\Leftrightarrow$ ⑤、有解的充要条件：$r(A) = r(A, \beta) \le n$（n 为未知数的个数或维数）

2. 设 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$，$A$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$B$ 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，

$$\text{则 } AB = C_{m\times s} \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \cdots, c_s)$$

$\Leftrightarrow A\beta_i = c_i$，$(i = 1, 2, \cdots, s)$

$\Leftrightarrow \beta_i$ 为 $Ax = c_i$ 的解

$\Leftrightarrow A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s) = (c_1, c_2, \cdots, c_s)$

$\Leftrightarrow c_1, c_2, \cdots, c_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

即：C 的列向量能由 A 的列向量线性表示，B 为系数矩阵.

同理：C 的行向量能由 B 的行向量线性表示，A 为系数矩阵.

$$\text{即：}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_2 = c_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_2 = c_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_2 = c_m \end{cases}$$

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程组 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ $\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A, B)$

3. 线性相关性

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0 \text{（零向量）}$$

则称向量组 A 是线性相关的，否则称它是线性无关的.

向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $R(A) < m$

判别方法：

法 1

对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

的**线性相关性**等价于**齐次线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=0 \end{cases}$$

是否有非零解.

(1) 齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 向量组线性相关；

(2) 齐次线性方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ 向量组线性无关.

法 2

关于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，设矩阵

$$A=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_s)$$

(1) $r(A)<m \Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关；

(2) $r(A)=m \Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

法 3

定理3 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

推论

设有n个n维向量$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$，

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$构成的$n$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(1) $D\neq 0 \Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关；

(2) $D=0 \Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关.

♣ 线性相关性判别法（归纳）

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关

⟺ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0 .$$

⟺ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

⟺ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

⟺ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

♣ 线性相关性的性质

① 零向量是任何向量的线性组合，零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

③ 部分相关，整体必相关；整体无关，部分必无关.　　（向量个数变动）

④ 原向量组无关，接长向量组无关；接长向量组相关，原向量组相关.　　（向量维数变动）

⑤ 两个向量线性相关 ⟺ 对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关.

⑥ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任一向量 α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是此向量组的线性组合.

⑦ 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且表示法唯一

4. 最大无关组相关知识

最大无关组

若在向量组 A 中找到 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(1) $A_0 : \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

(2) A 中任一向量都可由 A_0 表示，

则向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

向量空间的基

设 V 为向量空间，若有 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$，且满足

① $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关；

② V 中任一向量都可由 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性表示

则称向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 就称为向量空间 V 的一个基.

基础解系

若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 满足

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关；

(2) $Ax = 0$ 的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示.

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 称为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

$\boxed{\text{向量组的秩}}$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩. 记作 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\boxed{\text{矩阵等价}}$ A 经过有限次初等变换化为 B .

$\boxed{\text{向量组等价}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可以相互线性表示.　记作：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \cong (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

① 矩阵的行向量组的秩＝列向量组的秩＝矩阵的秩.

行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

② 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，且不改变行（列）向量间的线性关系

③ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且 $s>n$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，且可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $s\leqslant n$.

④ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则两向量组等价；

⑤ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

⑥ 向量组的极大无关组不唯一，但极大无关组所含向量个数唯一确定.

⑦ 若两个线性无关的向量组等价，则它们包含的向量个数相等.

⑧ 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=m$， A 的行向量线性无关；

5. 线性方程组理论

$\boxed{\text{线性方程组的矩阵式}}$ $Ax=\beta$ $\boxed{\text{向量式}}$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_j=\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,n$

（1）解得判别定理

定理：n 元线性方程组 $AX=b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

（2）线性方程组解的性质：

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
(1)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=o\text{的解},\eta_1+\eta_2\text{也是它的解}\\
(2)\ \ \eta\text{是}Ax=o\text{的解},\text{对任意}k,k\eta\text{也是它的解}\\
(3)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=o\text{的解},\text{对任意}k\text{个常数}\\
\qquad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\ \ \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是它的解}
\end{array}\right\}\text{齐次方程组}\\
(4)\ \ \gamma\text{是}Ax=\beta\text{的解},\eta\text{是其导出组}Ax=o\text{的解},\gamma+\eta\text{是}Ax=\beta\text{的解}\\
(5)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的两个解},\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=o\text{的解}\\
(6)\ \ \eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\eta_1\text{也是它的解}\Leftrightarrow\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=o\text{的解}\\
(7)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\\
\qquad\qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_k\eta_k\text{也是}Ax=\beta\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1\\
\qquad\qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_k\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=0
\end{array}\right.$$

(3) 判断 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=o$ 的基础解系的条件：

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 都是 $Ax=o$ 的解；

③ $s=n-r(A)=$ 每个解向量中自由未知量的个数.

(4) 求非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解的步骤

(1) 将增广矩阵 $(A\ \ b)$ 通过初等行变换化为阶梯形矩阵；

(2) 当 $r(A\ \ b)=r(A)=r<n$ 时，把不是首非零元所在列对应的 $n-r$ 个变量作为自由元；

(3) 令所有自由元为零，求得 $Ax=b$ 的一个特解 α_0；

(4) 不计最后一列，分别令一个自由元为1，其余自由元为零，得到 $Ax=0$ 的基础解系 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-r}\}$；

(5) 写出非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解

$$x=\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中 $k_1,k_2,...,k_{n-r}$ 为任意常数.

（5）其他性质

一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

√ 若 η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个解，$\xi_1,\xi,\cdots,\xi_s$ 是 $Ax=o$ 的一个解 $\Rightarrow \xi_1,\xi,\cdots,\xi_s,\eta^*$ 线性无关

√ $Ax=o$ 与 $Bx=o$ 同解（A,B 列向量个数相同）$\Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=r(A)=r(B)$，且有结果：

① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=o$ 与 $Bx=o$ 同解 $\Leftrightarrow$ $PA=B$（左乘可逆矩阵 P）；

矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的列向量组等价 $\Leftrightarrow$ $AQ=B$（右乘可逆矩阵 Q）.

第四部分　方阵的特征值及特征向量

1. 施密特正交化过程

2. 特征值、特征向量的性质及计算

3. 矩阵的相似对角化，尤其是对称阵的相似对角化

1. ① $\boxed{\text{标准正交基}}$ n 个 n 维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

② $\boxed{\text{向量}\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\text{与}\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\text{的内积}}$ $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sqrt{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$

③ $\boxed{\alpha\text{与}\beta\text{正交}}$ $(\alpha,\beta)=0$.　记为：$\alpha\perp\beta$

④ $\boxed{\text{向量}\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\text{的长度}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

⑤ $\boxed{\alpha\text{是单位向量}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1$.　即长度为 1 的向量.

2. 内积的性质：　① 正定性：$(\alpha,\alpha)\geq 0,\text{且}(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=o$

② 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 线性性：$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$$

3. ① 设 **A** 是一个 **n** 阶方阵，若存在数 λ 和 **n** 维非零列向量 x，使得

$$Ax=\lambda x,$$

则称 λ 是方阵 **A** 的一个特征值，x 为方阵 **A** 的对应于特征值 λ 的一个特征向量.

② $\boxed{A\text{ 的特征矩阵}}$ $|\lambda E-A|=0$（或 $|A-\lambda E|=0$）.

③ $\boxed{A\text{ 的特征多项式}}$ $|\lambda E-A|=\varphi(\lambda)$（或 $|A-\lambda E|=\varphi(\lambda)$）.

④ $\varphi(\lambda)$ 是矩阵 A 的特征多项式 $\Rightarrow \varphi(A)=O$

⑤ $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\qquad \sum_{1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}A$，$\mathrm{tr}A$ 称为矩阵 A 的$\boxed{\text{迹}}$.

⑥ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

⑦ 若 $|A|=0$，则 $\lambda=0$ 为 A 的特征值，且 $Ax=o$ 的基础解系即为属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

⑧ $r(A)=1\Leftrightarrow A$ 一定可分解为 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$、$A^2=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)A$，从而 A 的特征值

为：$\lambda_1=\mathrm{tr}A=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$\qquad \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

㊟ $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 为 A 各行的公比，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为 A 各列的公比.

⑨ 若 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$f(A)$ 是多项式，则：

① 若 A 满足 $f(A)=O\Rightarrow A$ 的任何一个特征值必满足 $f(\lambda_i)=0$

② $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$；$|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

⑩ A 与 A^T 有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

4. 特征值与特征向量的求法

(1) 写出矩阵 **A** 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$，求出特征值 λ_i.

(2) 根据 $(A-\lambda_i E)x=0$ 得到 **A** 对应于特征值 λ_i 的特征向量.

设$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots\ \xi_{n-r_i}$，其中$r_i=r(A-\lambda_i E)$.

则 A 对应于特征值λ_i的全部特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_i}\xi_{n-r_i}$,

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r_i}$为任意不全为零的数.

5. ① $\boxed{A\text{ 与 }B\text{ 相似}}$ $P^{-1}AP=B$ （P 为可逆矩阵）

② $\boxed{A\text{ 与 }B\text{ 正交相似}}$ $P^{-1}AP=B$ （P 为正交矩阵）

③ $\boxed{A\text{ 可以相似对角化}}$ A 与对角阵Λ相似.（称Λ是A的$\boxed{\text{相似标准形}}$）

6. 相似矩阵的性质：

①$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，从而$A,B$有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

㊟ α是A关于λ_0的特征向量，$P^{-1}\alpha$是B关于λ_0的特征向量.

②$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$

③$|A|=|B|$ 从而A,B同时可逆或不可逆

④ $r(A)=r(B)$

⑤若A与B相似，则A的多项式$f(A)$与B的多项式$f(A)$相似.

7. 矩阵对角化的判定方法

① n 阶矩阵 A 可对角化（即相似于对角阵）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

这时，P为A的特征向量拼成的矩阵，$P^{-1}AP$为对角阵，主对角线上的元素为A的特征值.

设α_i为对应于λ_i的线性无关的特征向量，则有：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

② A可相似对角化$\Leftrightarrow n-r(\lambda_i E-A)=k_i$，其中$k_i$为$\lambda_i$的重数$\Leftrightarrow$ A恰有n个线性无关的特征向量.

㊟：当$\lambda_i=0$为A的重的特征值时，A可相似对角化$\Leftrightarrow$ λ_i的重数$=n-r(A)=$ $Ax=o$基础解系的个数.

③ 若n阶矩阵A有n个互异的特征值$\Rightarrow$ A可相似对角化.

8. 实对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数，特征向量是实向量；

② 不同特征值对应的特征向量必定正交；

㊟：对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

③ 一定有 n 个线性无关的特征向量． 若 A 有重的特征值，该特征值 λ_i 的重数$=n-r(\lambda_i E-A)$；

④ 必可用正交矩阵相似对角化，即：任一实二次型可经正交变换化为标准形；

⑤ 与对角矩阵合同，即：任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形；

⑥ 两个实对称矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 有相同的特征值.

9. 正交矩阵 $AA^T=E$

正交矩阵的性质：① $A^T=A^{-1}$；

② $AA^T=A^TA=E$；

③ 正交阵的行列式等于 1 或-1；

④ A 是正交阵，则 A^T，A^{-1} 也是正交阵；

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑥ A 的行（列）向量都是单位正交向量组.

10.

求正交矩阵 T，把实对称矩阵 A 化为对角阵的方法：

1. 解特征方程 $|A-\lambda E|=0$,
   求出对称阵 A 的全部不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$
2. 对每个特征值 λ_i，求出对应的特征向量，
   即求齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系。
3. 将属于每个 λ_i 的特征向量先正交化，再单位化。
   这样共可得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$
4. 以$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列向量构成正交矩阵 $T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$
   有 $T^{-1}AT=\Lambda$

11. $\boxed{\text{施密特正交规范化}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

$$\text{正交化}\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\end{cases}$$

$$\text{单位化：}\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}\qquad \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\qquad \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。让第二个解向量先与第一个解向量正交，再把第二个解向量代入方程，确定其自由变量.

第四部分 二次型

1. 二次型及其矩阵形式

2. 二次型向标准形转化的三种方式

3. 正定矩阵的判定

1. ① $\boxed{\text{二次型}}$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=x^TAx$

其中 A 为对称矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

② $\boxed{A\text{ 与 }B\text{ 合同}}$ $C^TAC=B$. （A,B为实对称矩阵,C为可逆矩阵）

③ $\boxed{\text{正惯性指数}}$ 二次型的规范形中正项项数 p $\boxed{\text{负惯性指数}}$二次型的规范形中负项项数 $r-p$

$\boxed{\text{符号差}}$ $2p-r$ （r 为二次型的秩）

④ 两个矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的正负惯性指数 $\Leftrightarrow$ 他们的秩与正惯性指数分别相等.

⑤ 两个矩阵合同的充分条件是：A 与 B 等价

⑥ 两个矩阵合同的必要条件是：$r(A)=r(B)$

2. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 经过 $\left\langle\begin{matrix}\text{正交变换}\\\text{合同变换}\\\text{可逆线性变换}\end{matrix}\right.$ $x=Cy$ 化为 $f=\sum\limits_{1}^{n}d_iy_i^{\ 2}$ $\boxed{\text{标准形}}$.

① 正交变换法

用正交变换化二次型为标准形（规范形）的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T Ax$，求出 A；

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$；

4. 将特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 正交化，单位化，得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，记 $P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$；

5. 作正交变换 $x = Py$，则得 f 的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

② 配方法

（1）若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

（2） 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij}\neq 0$ （$i\neq j$），则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \left(k=1,2,\cdots,n 且 k\neq i,j\right),$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按(1)中方法配方.

③ 初等变换法

3. $\boxed{正定二次型}$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.

$\boxed{正定矩阵}$ 正定二次型对应的矩阵.

4. $f(x)=x^T Ax$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ （之一成立）：

（1） $\forall x\neq o$ ， $x^T Ax>0$；

（2） A 的特征值全大于 0；

（3） f 的正惯性指数为 n；

（4） A 的所有顺序主子式全大于 0；

（5） A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C 使得 $C^T AC=E$；

（6）存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$；

5. （1）合同变换不改变二次型的正定性.

（2） A 为正定矩阵 $\Rightarrow a_{ii}>0$ ； $|A|>0$.

（3） A 为正定矩阵 $\Rightarrow A^T, A^{-1}, A^*$ 也是正定矩阵.

（4） A 与 B 合同，若 A 为正定矩阵 $\Rightarrow B$ 为正定矩阵

（5） A, B 为正定矩阵 $\Rightarrow A+B$ 为正定矩阵，但 AB, BA 不一定为正定矩阵.

6. 半正定矩阵的判定

实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X^TAX$ 半正定

$\Leftrightarrow$ 秩 f =秩(A)= p（正惯性指数）

$\Leftrightarrow$ A 与非负对角阵合同，即存在可逆矩阵 C，使

$$C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, d_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n$$

$\Leftrightarrow$ 存在 $C\in R^{n\times n}$，使 $A=C^TC$

$\Leftrightarrow A$ 的所有主子式全大于或等于零.

一些重要的结论

$$|A|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A)=n \\ A\text{的列（行）向量线性无关} \\ A\text{的特征值全不为}0 \\ Ax=o\text{只有零解} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\neq o,\ Ax\neq o \\ \forall\beta\in\mathbf{R}^n, Ax=\beta\text{总有唯一解} \\ A^TA\text{是正定矩阵} \\ A\cong E \\ A=p_1p_2\cdots p_s \quad p_i\text{是初等阵} \\ \text{存在}n\text{阶矩阵}B,\text{使得}AB=E \ \text{ 或 } \ AB=E \end{cases}$$

注：全体 n 维实向量构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 叫做 n 维向量空间.

$$|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A)<n \\ A\text{的列（行）向量线性相关} \\ 0\text{是}A\text{的特征值} \\ Ax=o\text{有非零解, 其基础解系即为}A\text{关于}\lambda=0\text{的特征向量} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{矩阵等价}(\cong) \\ \text{矩阵相似}(:\ ) \\ \text{矩阵合同}(;\ ) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$：

①称为 ¡ ^{n} 的标准基， ¡ ^{n} 中的自然基，单位坐标向量；

② $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关；

③ $|e_1,e_2,\cdots,e_n|=1$；

④ tr$E$=n；

⑤任意一个 n 维向量都可以用 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示.