南京大学大学数学试卷

考试时间 2018.1.10 任课教师__________ 考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设四阶行列式 D 中第1行元素为 $1,2,0,-4$，第3行元素的余子式为 $6,x,19,2$，求 x .

2. 设有四阶方阵 A 满足条件 $|\sqrt{2}E+A|=0, AA^T=2E, |A|<0$，其中 E 为四阶单位矩阵，求 A^* 的一个特征值.

3. 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|B|$.

4. 设 α,β 分别是 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 证明： $\alpha+\beta$ 不可能是 A 的特征向量.

二、 (本题12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\k&1&-k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，求 k 为何值时，矩阵 A 可以对角化？

三. (本题12分) 设 A,B 都是对称正定矩阵，且 $AB=BA$，试判断 AB 是否也是正定矩阵？

四. (本题12分) 已知三阶非零矩阵 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3&=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3&=0\\3x_1+x_2-x_3&=0\end{cases}$ 的解向量，(1) 求 λ 的值；(2) 求矩阵 B 的秩.

五. (本题12分) n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 β_1,β_2 都正交. 证明：(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta_2$ 线性无关；(2) β_1,β_2 线性相关.

六. (本题12分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的两个基，其中 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，试求 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ 分别在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基 β_2,β_2,β_3 下的坐标.

七. (本题12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 的一个特征值为3，(1) 求 y；(2) 求正交矩阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.