《张量分析》期末试题 II（开卷）

（2024 年 1 月 18 日）

班级　　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　学号

注：本试卷所有概念，均定义在三维平坦空间曲线坐标系内。

题 1、在静态的曲线坐标系下，成立如下协变微分不变式：

$$\nabla_m\left(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^m\otimes\boldsymbol{T}\right)=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^m\otimes\boldsymbol{T}\right) \qquad \text{(a)}$$

请论述：

（1）Euler 描述下式（a）仍然成立。也就是说，式（a）中，如果将静态的坐标替换为物质点上的 Euler 坐标，将静态的基矢量和度量张量行列式之根式分别替换为物质点上的 Euler 基矢量和度量张量行列式之根式，则式（a）仍然成立。

（2）Lagrange 描述下式（a）仍然成立。也就是说，式（a）中，如果将静态的坐标替换为物质点上的 Lagrange 坐标，将静态的基矢量和度量张量行列式之根式分别替换为物质点上的 Lagrange 基矢量和度量张量行列式之根式，则式（a）仍然成立。

题 2、请你撰写一篇短文，论证如下命题：

协变形式不变性公设，就是对称性公设。

具体要求如下：

（1）短文字数不少于 1000 字。

（2）类似于科学研究中的比较研究法，撰写短文时，请你采用比较分析法。即引入公设之后，通过比较（尤其是一一对应的数学表达式的比较），揭示出张量分析理论体系的对称性。

（3）具体可以从以下几个方面进行对称性比较：（a）比较空间域与时间域上公设的内涵；（b）比较空间域与时间域上关键性概念、概念的定义式、概念的计算式；（c）比较空间域上的协变微分学与时间域上的协变微分学；（d）比较 Euler 描述下的协变微分学与 Lagrange 描述下的协变微分学。

（4）比较过程中，可随时附上你的感悟。

（5）最后，请评述一下，提升张量分析的对称性，好处何在？