

基于物理规律与机器学习的罚篮命中分析

彭启航¹, 王彦淞¹, 李锦钊¹
¹清华大学行健-车辆 2 班

摘 要 篮球运动员在罚篮过程中通常需要根据实际情况调整篮球出手的角度与速度。为了能更好地指导运动员进行罚篮训练, 本项目计划探究在篮球正直射出且空心入网的前提下, 出射角与初速度之间的关系。本文分别从理论推导与机器学习角度出发进行探究。一方面, 对实际情景进行物理抽象并通过物理规律得出出射角与初速度之间的关系; 另一方面, 通过实验并结合机器学习方法对数据进行回归。结果上, 物理推导结果与实验结果符合的较好, 证实了物理建模的合理性。期望能将研究成果应用罚篮训练中。

关键词 斜抛运动 出射角 初速度 机器学习

1 引言

出射角度与初速度是抛体模型中的两个关键参数。罚篮作为经典的抛体运动, 篮球出射角与出手速度会极大地影响罚篮命中率。一般而言, 出手速度受运动员体力影响而改变。在出手速度变化时, 相应地改变出手角度, 可以提高命中概率。因此, 在假定出手高度一定的前提下, 研究出射角与出手速度之间的关系是有必要的。

为达到实验目的, 本文首先对罚篮过程进行物理建模。首先, 在考虑一切外力的情况下求解篮球的运动方程; 而后, 经过从理论上的参数估计对模型进行进一步的理想化处理, 并由此理想化模型对出射角与出手速度之间的关系进行讨论。

而后, 采用实验复合机器学习的方法对本项目提出的理论模型进行实验验证。若由机器学习得到的实验结果与理论模型相吻合, 则证明该模型有能力指导现实罚篮训练。

2 基于物理规律的篮球命中分析

2.1 物理建模

实际投篮过程中涉及到篮球与空气之间复杂的相互作用。篮球在飞行过程中, 既有质心的平动, 又有篮球绕质心的转动。因此, 篮球在运动过程中受到的表面力有: 因与空气发生相对运动而产生的空气阻力, 因篮球绕质心转动而产生的马尔科夫力, 以及空气浮力。下面逐个分析受力情况。

空气阻力方面, 考虑到篮球相对空气运动速率较高, 且运动过程中雷诺数很大, 故空气阻力主要体现为压差阻力。其大小与速度的平方成正比, 数学表达

为 $f_1 = -\frac{1}{2}\rho_a C_d S v^2$ 。其中 ρ_a 为空气密度, 通常为 $1.293\text{kg}/\text{m}^3$; C_d 为阻力系数; 其大小与篮球表面粗糙程度, 雷诺数以及马赫数有关; S 表示篮球最大截面积。方向与篮球速度方向相反。

马尔科夫力方面, 由库塔-茹科夫斯基升力定理 (Kutta-Joukowski) 可知, 篮球在运动过程中受到的马尔科夫力大小为 $f_2 = C_L \rho_a r^3 \omega v$ 。其中 C_L 为升力系数, ω 为篮球绕质心旋转的角速度。方向方面, 平行于 $\mathbf{v} \times \omega$ 。

接下来以篮球上升过程为例列写动力学方程, 其中用 $F' = \rho_a g V$ 表示篮球受到的空气浮力, 其中 V 是篮球体积; 用 G 表示篮球重力。

$$\begin{cases} ma_x = -f_1 \cos \alpha - f_2 \sin \alpha \\ ma_y = F' - G - f_1 \sin \alpha + f_2 \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

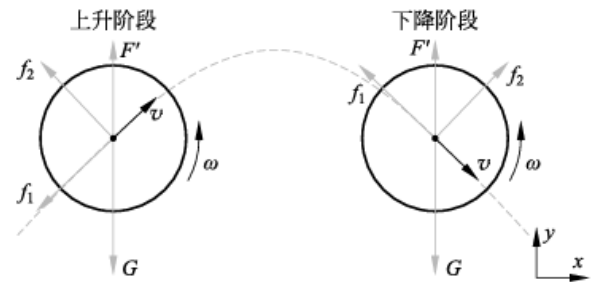


图 1: 受力分析示意图

由方程组 (1), 结合实际物理参数的测量并采用相关数值计算方法可以得到篮球的轨迹方程, 结合相关的初值条件 (篮球须空心入网) 以解出出射角与速度之间的关系。

2.2 理想近似

上节对罚篮过程进行了较为精细的建模。虽然较为严谨,但是得到的微分方程组(1)本身没有解析解,且涉及到的相关参数的测量难度较大,不便于进行试验与指导罚篮训练。因此,本节将对罚篮模型进行进一步的理想化。各物理量的字母表示如图2中所示。

下面对2.1节中涉及到的表面力进行理论估算以判断其是否可以被忽略。对于空气阻力而言,阻力系数 C_d 处于 10^{-1} 数量级,最大截面积 S 处于 10^{-2} 数量级,而速度 v 通常处于 10^1 数量级。因此空气阻力处于 10^{-1} 数量级,其在罚篮这种短时间运动过程中对篮球的作用冲量较小,因此可以忽略。同样地方法也可估算出篮球受到的马尔科夫力与空气浮力分别处于 10^{-1} 与 10^{-2} 数量级,故而亦可忽略。因此,理论上可将罚篮过程中篮球的运动轨迹近似为理想抛体。分别对水平与竖直方向列写运动学方程如下:

$$\begin{cases} x: v_0 \cos \theta t = L \\ y: v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = H - h \end{cases} \quad (2)$$

消去时间参数 t 并设高度差 $\Delta h = H - h$ 后得到出手速度 v_0 与出射角 θ 之间的关系:

$$\frac{2}{gL^2}(L \tan \theta - \Delta h)v_0^2 = \tan^2 \theta + 1 \quad (3)$$

设极限出射角 ϕ 满足 $\tan \phi = \frac{\Delta h}{L}$ 并进一步整理后得到

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2\sqrt{L^2 + \Delta h^2} \cos \theta \sin(\theta - \phi)} \quad (4)$$

其中, $\theta \in (\phi, \frac{\pi}{2})$ 时 v_0 有实际意义。

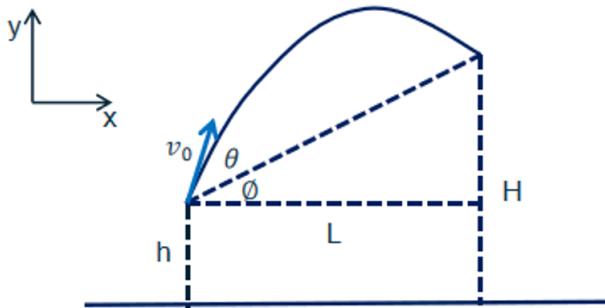


图 2: 理想模型示意图

2.3 讨论

2.3.1 极限情况分析

通过分析解的情况可知,当出射角 θ 一定时, v_0 有唯一解。由2.1节所得式(3)可知,当 v_0 趋于无限大时,有 $\lim_{v_0 \rightarrow +\infty} \theta = \phi$,也即称 ϕ 为极限出射角的原因所在;那么另一个自然的问题是,以何种角度出手时最为省力?换言之, v_0 的下限是多少?为求 v_{0min} ,对式(3)的等价表示进行数学处理

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{L \sin 2\theta - 2\Delta h \cos^2 \theta} \quad (5)$$

并对 $f(\theta) = L \sin 2\theta - 2\Delta h \cos^2 \theta$ 求导并求其Hessian矩阵负定的驻点

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2L \cos 2\theta + 2\Delta h \sin 2\theta = 0 \\ \theta_1 &= \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{L}{\Delta h}\right) + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 θ_1 即为最省力投篮角。运动员以此角度出手时最省力,也就意味着可以更为精细地控制罚篮动作的其他细节。

2.3.2 抗角度偏差最佳角的计算

从上节中可得知,当出射角 θ 处于合理区间范围时,都可以通过调整初速度以实现空心命中。然而,实际罚篮过程中,由于随机误差,实际出射角会在预定值附近以不确定的小角度波动,因而导致篮球运动轨迹偏离理想弹道。换言之,以某些角度投篮时,实际效果会因角度的不确定波动而被严重影响。因此,寻找具有最佳“抗角度偏差”的出射角是值得被讨论的。

数学上,“抗角度偏差能力”可以被描述为水平射程 x 对出射角 θ 的偏导数。“抗角度偏差最佳角” θ_2 应满足 $\frac{\partial x(\theta_2)}{\partial \theta}$ 取极小值,其中 $x(\theta)$ 表示水平射程 x 在初速度一定时是 θ 的单值函数。

对式(1)进行整理,消除时间参数 t ,并以 x 为主变量进行整理得

$$\Delta h \cos^2 \theta = \frac{1}{2}x \sin 2\theta - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (7)$$

等式左右两端同时对 θ 求偏导数,有

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\Delta h \sin 2\theta + x \cos 2\theta}{\frac{gx}{v_0^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta} \quad (8)$$

令 $\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$,这等价于 $\Delta h \sin 2\theta + x \cos 2\theta = 0$,亦即

$\tan 2\theta = -\frac{x}{\Delta h}$ 。由于 θ 介于 $(\phi, \frac{\pi}{2})$ ，则经周期性分析后得到

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan(-\frac{x}{\Delta h}) + \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

由式 (8) 可知，抗角度偏差最佳角与最省力投篮角重合，即运动员在某一合适角度出手时，可以同时保证投篮最稳定与最省力。

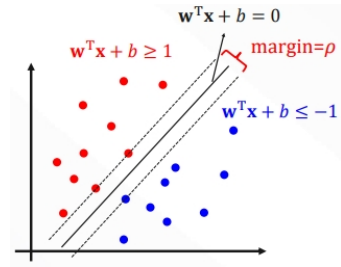


图 3: 最大化类间距

3 基于机器学习的篮球命中分析

3.1 理论建模

本节拟采用机器学习的模型对问题进行建模，以得到罚篮空心入网时出射角和初速度的关系。训练过程输入的原始样本数据包含两个特征维度，分别代表出射角与初速度，模型通过对样本的拟合最终可以得到两个物理参数的回归曲线，并用于对新的输入进行预测。

我们希望能够得到罚篮空心入网时的出射角与初速度的关系，该问题抽象出来就是得到罚篮空心命中时的回归超平面。在机器学习中，用于回归的模型有很多，比如线性回归、岭回归、随机森林回归、支持向量回归、神经网络等，但是以神经网络为核心的深度学习要求数据集足够大，本实验难以提供足够的数据，所以决定采用比较适合中小型数据集的机器学习方法：支持向量机 [3]。

3.2 支持向量机 (Support Vector Machine)

3.2.1 线性 SVM 原理介绍

根据上一节的物理理论分析，显然罚篮空心命中时的出射角与初速度并不满足线性关系，所以需要构造非线性的支持向量机，这只需要在线性支持向量机的基础上结合核函数的技巧即可。而支持向量机虽然是分类模型，但是只需要调整策略就能应用于回归。因此首先来简单介绍线性的支持向量机，对于线性可分的数据集来说，分类超平面的解是多样的，但是哪个分类面更好呢？相信大多数人都更倾向于将分类面画在距离两类样本都最远的地方，从直观上这样分类的效果最好，下面来形式化地定义这样的分类面。

假定有训练样本集

$$(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_N, y_N), \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_i \in R^d, y_i \in \{+1, -1\}$$

其中每个样本都是 d 维向量， y 是类别标签， w_1 类用 +1 表示， w_2 类用 -1 表示，设这些样本是线性可分的，即存在超平面

$$g(\mathbf{x}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) + b = 0 \quad (11)$$

可以把所有 N 个样本没有错误地分开。这里， $\mathbf{w} \in R^d$ 是线性判别函数的权值， b 是其中的常数项。

这等价于，所有样本都满足

$$\begin{cases} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b > 0, & y_i = +1 \\ (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b < 0, & y_i = -1 \end{cases} \quad (12)$$

而且对于 (7) 中的权值与常数项作任何正的尺度调整都不会影响分类决策，同时也不会改变样本到分类面的距离，因此为了使该问题有唯一解，需要将参数的尺度确定下来，所以将上述条件变成

$$\begin{cases} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b \geq 1, & y_i = +1 \\ (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b \leq -1, & y_i = -1 \end{cases} \quad (13)$$

即要求第一类样本中 $g(\mathbf{x})$ 最小等于 1，而第二类样本中 $g(\mathbf{x})$ 最大等于 -1。把样本的类别信息融于其中，可以把两个不等式合并成一个统一的形式：

$$y_i[(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b] \geq 1, i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (14)$$

由于限制两类离分类面最近的样本的 $g(\mathbf{x})$ 分别等于 1 和 -1，那么分类间隔就是 $M = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$ 。于是，求解最优

超平面的问题就成为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i[(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b] - 1 \geq 0, \\ & i = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (15)$$

这是一个在不等式约束下的优化问题，可以通过拉格朗日法求解。求解过程中，通过计算鞍点可以得到

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \mathbf{x}_i \quad (16)$$

且

$$\sum_{i=1}^N y_i \alpha_i^* = 0 \quad (17)$$

进一步可以将 (11) 转化为二次优化问题，称为最优超平面的对偶问题，具体求解过程此处不再赘述。

3.2.2 非线性 SVM

对于任意幂次的判别函数，我们总是可以利用合适的特征变换，将其转化为广义的线性判别函数。但遗憾的是。经过这种变换，维数会大大地增加，这将会使问题很快地陷入所谓的“维数灾难”，一方面使这种计算变得非常复杂而不可行，另一方面，将样本变换到很高维的空间中以后，由于样本数目并未增加，在很高维的空间中就变得非常稀疏，很多算法会因为病态矩阵等问题而无法实现。

万幸的是，原始的二次优化问题可以利用核函数进行迂回计算，再次来考察前面已经得到的支持向量机，它求解的分类器是

$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x} + b\right) \quad (18)$$

其中 α_i 是下列二次优化问题的解

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & Q(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i = 0, 0 \leq \alpha_i \leq C, i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

而 b 通过满足以下等式的支持向量求得

$$y_i \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + b \right) - 1 = 0 \quad (20)$$

不难注意到，上述等式中样本原始特征出现的形式都是 $(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)$ ，而如果对特征 \mathbf{x} 进行非线性变换，记新特征为 $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ ，则新特征空间里构造的支持向量机决策函数其实没有本质性的变化，只是将内积转化为 $[\phi(\mathbf{x}_i) \cdot \phi(\mathbf{x}_j)]$ ，因此新空间中的内积也是原始特征的函数，可以记作

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) := (\phi(\mathbf{x}_i) \cdot \phi(\mathbf{x}_j)) \quad (21)$$

把它就称为核函数，从计算角度，不论 $\phi(\mathbf{x})$ 所生成的变换空间维数有多高，这个空间里的线性支持向量机求解都可以在原始空间下通过核函数 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 进行，这样就避免了高维空间里的计算，而且计算 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 的复杂度与计算内积相比没有实质性的增加；进一步分析可以发现，只要确定了核函数，实际上甚至没有必要知道 $\phi(\mathbf{x})$ 的具体形式，而核函数的设计已经相当成熟，这也使得该模型具有强大的泛化性，可以用来分析本项目中罚篮空心入网时出射角与初速度的关系。

3.2.3 支持向量回归 (Support Vector Regression)

支持向量机最初是用于分类问题，通过优化得到最大类间距与最优超平面，那么它是否也能用于回归呢？答案是肯定的，只需要将思路微调，既然分类时是将不同类别的样本用间隔隔开，那么回归时只需要使间隔将同类的样本包裹起来就行了！

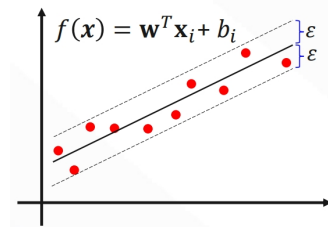


图 4: SVR

此时，支持向量回归的优化问题是

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_i - ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \leq \epsilon, \\ ((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - y_i \leq \epsilon, \end{cases} \\ & i = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (22)$$

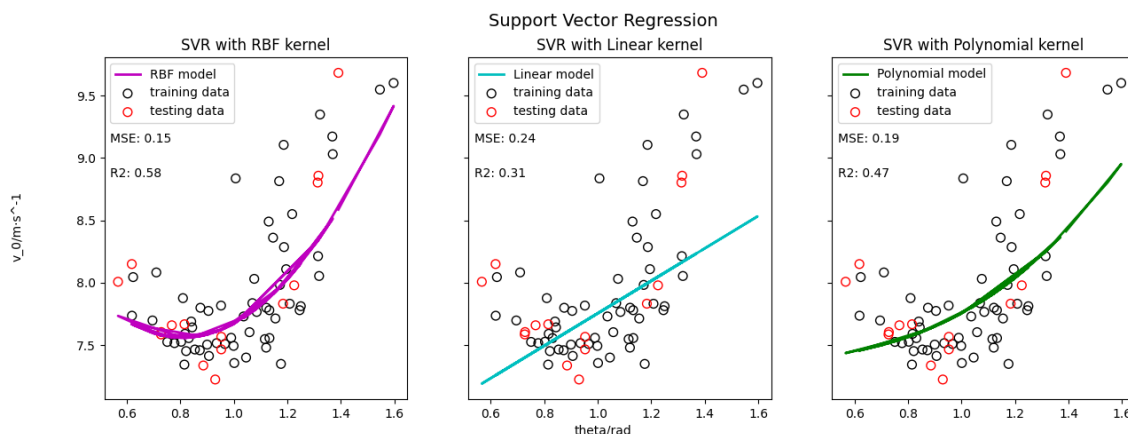


图 5: 拟合结果

与前述优化问题并没有本质性区别，因此也可以借助核函数对于非线性数据进行回归。

4 实验

4.1 罚篮实验

为贴合理论推导所假设的情境，选在无风天气进行实验。为使得实验能够满足本论文的需求，要求实验在不运用任何物理规律的前提下测量篮球在正射空心入网时的出射角与出手速度。

本实验通过对罚篮过程进行录像以采集实验原始数据。数据处理方面，本项目借助 MATLAB 编程，对罚篮视频进行等时间间隔截图。通过不断调整时间间隔长短以获取到篮球出手瞬间的截图，如图 6 所示。

数据测量方面，由于截图时间间隔很短，可以用匀速直线运动进行近似。故而以篮球出手瞬间图像与下一张图像中篮球质心连线与水平线的夹角作为出射角；速度方面，根据已知的放缩比例（现实中篮球半径与图像中篮球半径的比），对速度进行测量。为保证实验数据能够满足机器学习训练要求，共进行了 50 组平行重复实验。同时通过调整出手角度避免实验数据过度集中。

4.2 计算机实验

考虑到实验数据规模较小，基于理论模型的连续性，本项目选择对数据进行插值处理，以更好地用于下一步拟合。随后将预处理的数据输入到已经写好的 SVR 模型中，其中训练集与测试集的划分是 4: 1。源码详见<https://github.com/pqh22/Exploratory-Physics-Experiment>，

代码中基于sklearn的SVR，尝试了包括径向基、线性、多项式在内的核函数，超参数尝试了惩罚系数 $C = 1, 10, 100$ 和松弛系数 $\gamma = 0.1, 1$ ，前者代表对误差的宽容度，后者是径向基核函数的自带参数，决定了数据映射到新特征空间的分布。

实验中以最大均方误差 (MSE) 和决定系数 (R2) 作为模型的评估指标，两者均能反应最终模型的拟合效果。代码中通过网格搜索寻找最佳超参数，图 3 是部分可视化结果，图 4 是理论推导的函数示意图。

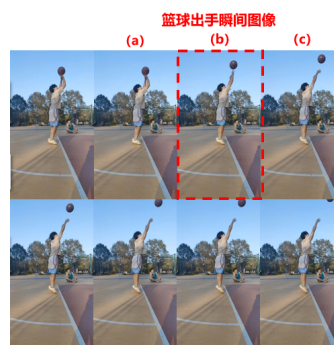


图 6: 频闪图像示例

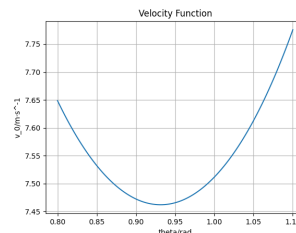


图 7: 理论推导函数图像

经过计算机实验可得，当选取径向基核函数，超参数为 $C = 10$ 和 $\gamma = 1$ 时，回归曲线与理论曲线拟合的很好，此时对应指标为 $MSE = 0.1327$ 和 $R^2 = 0.7693$ ，证明了本算法对于样本的拟合效果不错。

5 总结

本项目为探究有实际意义的罚篮模型，采用物理建模、模型理想化、机器学习验证的实验思路。

在物理建模部分，首先依据实际场景，考虑所有可能对篮球运动轨迹产生影响的因素，如空气阻力、马尔科夫力等，并列写动力学方程，获得较为全面的物理学图景。但是，为了使研究结果能够较好地运用在日常训练中，本项目通过理论计算，进一步对模型进行理想化处理，将其视为理想抛体运动。此外，在理想模型的基础上，探究了各种性能的最佳角，即抗角度偏差最佳角与最省力投篮角，并发现它们重合。在机器学习部分，通过对罚篮问题的抽象与建模，选择使用支持向量机对目标变量的关系进行回归，最终在尝试了不同的超参数后，得到了相应的可视化图像，为理论分析提供了统计证据，验证了模型的有效性。

总的来说，本项目从物理规律和机器学习两个方面入手分析罚篮命中时的出射角与初速度关系。借助机器学习的统计与分析，物理推导时的理想化假设是符合样本实际规律的，因此理论推导得到的最省力投篮角度对于运动员的实战罚篮具有实际的指导意义。

参考文献

- [1] 项姿睿, 桑芝芳. (2023). 投篮中的篮球运动轨迹分析. 物理与工程, 33(6), 80-84.
- [2] 高秀明, 苏永福.(2008). 用变分方法研究篮球投篮最佳出手角. 数学的实践与认识,38(6),143-150.
- [3]Platt, John. “Sequential Minimal Optimization : A Fast Algorithm for Training Support Vector Machines.” Microsoft Research Technical Report (1998): n. pag.
- [4]M. A. Hearst, S. T. Dumais, E. Osuna, J. Platt and B. Scholkopf, ”Support vector machines,” in IEEE Intelligent Systems and their Applications, vol. 13, no. 4, pp. 18-28, July-Aug. 1998, doi: 10.1109/5254.708428.