ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

BÁO CÁO ĐỀ TÀI

MÔ HÌNH VẬN TẢI

NHÓM ANTI_MAIIU

1. Lương Anh Nhật – 1611174
2. Đặng Thảo Vy – 1611346
3. Phan Quang Khánh – 1611125

Thành phố HCM, …….. tháng ……… năm………

Lưu hành nội bộ

MỤC LỤC

ĐỀ TÀI 3. BÀI TOÁN VẬN TẢI (TRANSPORTATION MODEL)

Lời mở đầu

Trong môi trường kinh tế ngoài việc quan tâm các yếu tố chính là kinh doanh, đầu tư và tài chính; các doanh nghiệp còn dành một mối quan tâm đến vấn đề vận tải. Trong việc cấu thành giá của sản phẩm (bao gồm cả sản phẩm dịch vụ) thì chi phí vận chuyển cũng ảnh hưởng đến trị giá sản phẩm. Chính vì vậy việc tối ưu chi phí vận chuyển là yêu cầu thiết thực trong bài toán tài chính của doanh nghiệp.

Bài toán tối ưu chi phí vận chuyển gồm có hai phần lớn đó là bài toán trên mô hình cân bằng (balanced) và mô hình không cân bằng (unbalanced). Trong mỗi mô ta sẽ đề cập đến các mô hình cụ thể và phương pháp tối ưu cũng như ưu điểm và khuyết điểm của phương pháp.

Trong mô hình cân bằng (balanced) ta có các phương pháp căn bản

1. Phương pháp góc Tây Bắc (Northwest Corner Method)
2. Phương pháp hạn chế chi phí (Least Cost Method)
3. Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's Approximation Method)
4. Phương pháp Stepping – stone
5. Phương pháp MODI

Trong mô hình không cân bằng ta sẽ cố gắng chuyển chúng về môi trường cân bằng và áp dụng các phương pháp sẵn có trong mô hình cân bằng.

Những nội dung cung cấp có thể có sai sót, chúng tôi rất mong bạn đọc thông cảm!

Mọi ý kiến đóng góp mong bạn đọc gửi về cổng liên lạc sau:

- Email nhóm trưởng: nhatla398@gmail. Com
- Phone number: 0968.373.054

Trân Trọng cảm ơn

CÁC TÁC GIẢ

LƯỢC SỬ HÌNH THÀNH

Trong toán học và kinh tế, lý thuyết vận tải là một cái tên được đặt cho nghiên cứu về vận chuyển và phân bổ nguồn lực tối ưu. Vấn đề được nhà toán học người Pháp Gaspard Monge đưa ra vào năm 1781.

Vào những năm 1920 A.N. Tolstoi là một trong những người đầu tiên nghiên cứu vấn đề vận chuyển một cách toán học. Năm 1930, trong bộ sưu tập Quy hoạch giao thông tập I (Transportation Planning Volume I) cho Uỷ ban vận tải quốc gia Liên Xô (National Commissariat of Transportation of the Soviet Union), ông đã xuất bản một bài báo "Phương pháp tìm kiếm đường đi tối thiểu trong vận tải hàng hóa trong không gian" (Methods of Finding the Minimal Kilometrage in Cargo-transportation in space).

Những bước tiến lớn đã được thực hiện trong lĩnh vực này trong Thế chiến II bởi nhà toán học và kinh tế Liên Xô Leonid Kantorovich. Do đó, vấn đề như đã nêu trên đôi khi được gọi là bài toán vận chuyển Monge - Kantorovich. Các phát biểu theo quy hoạch tuyến tính của bài toán còn được gọi là bài toán vận chuyển Hitchcock - Koopmans.

$\langle \text{I} \rangle$ Ý tưởng ban đầu

- Mỏ và nhà máy

Giả sử rằng chúng ta có một tập hợp n mỏ khai thác quặng sắt và một tập hợp n nhà máy sử dụng quặng sắt mà mỏ khai thác. Giả sử các mỏ và nhà máy này tạo thành hai tập hợp rời rạc M và F của mặt phẳng Euclide $\mathbb{R}^2$. Giả sử ta có một hàm chi phí $c:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$, do đó $c(x,y)$ là chi phí vận tải của một lô hàng sắt từ x đến y. Để đơn giản, ta bỏ qua thời gian thực hiện việc vận chuyển. Ta cũng giả định rằng mỗi mỏ chỉ có thể cung cấp cho một nhà máy (không phân chia lô hàng) và mỗi nhà máy yêu cầu chính xác một lô hàng đang hoạt động (các nhà máy không thể hoạt động với công suất gấp rưỡi hoặc gấp đôi). Sau khi thực hiện các giả định trên, một phương án vận chuyển là một song ánh $T:M\to F$. Nghĩa là, mỗi mỏ $m\in M$ cung cấp chính xác cho một nhà máy $T(m)\in F$ và mỗi nhà máy chỉ được cung cấp hàng bởi một mỏ. Ta muốn tìm ra một phương án tối ưu, phương án T có tổng chi phí là:

$$c(T)=\sum_{m\in M} c(m,T(m))$$

Tổng chi phí của phương án này là nhỏ nhất trong các phương án phân phối từ M đến F.

- Di chuyển sách: tầm quan trọng của hàm chi phí

Ví dụ đơn giản sau đây minh họa tầm quan trọng của hàm chi phí trong việc xác định kế hoạch vận chuyển tối ưu. Giả sử rằng chúng ta có n cuốn sách có chiều rộng bằng nhau trên một kệ, được sắp xếp trong một khối liền kề duy nhất. Ta muốn sắp xếp lại chúng thành một khối liền kề khác, nhưng đã chuyển một cuốn sách sang bên phải một khoảng đúng bằng chiều rộng sách.

Hai phương án rõ ràng cho kế hoạch vận chuyển tối ưu như sau:

    - Di chuyển tất cả n cuốn sách một khoảng bằng chiều rộng sách sang phải.

- Di chuyển cuốn sách ở đầu bên trái sang bên phải một khoảng bằng chiều rộng sách và sau đó chỉnh sửa lại tất cả những cuốn còn lại.

Nếu hàm chi phí tỷ lệ thuận với khoảng cách Euclide ($c(x,y)=\alpha|x-y|$) thì hai phương án trên đều tối ưu. Mặt khác, nếu ta chọn hàm chi phí lồi (strictly convex) tỷ lệ với bình phương khoảng cách Euclide ($c(x,y)=\alpha|x-y|^2$), thì phương án thứ nhất là phương án tối thiểu duy nhất.

$\langle \text{II} \rangle$ Bài toán của Hitchcock

Mô hình hóa bài toán vận tải sau đây được đưa ra bởi F. L. Hitchcock:

Giả sử có m nguồn cung cấp hàng $x_1, x_2, ..., x_m$ và $a(x_i)$ là đvhh được cung cấp bởi x_i đến n điểm tiêu thụ $y_1, y_2, ..., y_n$ với mức tiêu thụ là $b(y_j)$ ở vị trí y_j. Nếu $a(x_i, y_j)$ là chi phí vận chuyển hàng từ x_i đến y_j. Tìm phương án vận chuyển thỏa mãn lượng cung cầu sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất.

Cách giải quyết trong logistics được đưa ra bởi D.R.Fulkerson và trong cuốn sách *Flows in Networks* (1962) của L.R.Ford Jr..

Tjalling Koopmans cũng được ghi nhận với các công thức trong kinh tế vận tải và phân bố nguồn hàng.

1. MÔ HÌNH VẬN CHUYỂN

1.1 Đặt vấn đề

Để tối ưu chi phí vận chuyển hàng hóa từ các nhà cung cấp đến các địa điểm tiêu thụ, ta giải bài toán tìm chi phí nhỏ nhất nói trên thông qua các dữ liệu thu thập được từ hoạt động vận chuyển của các doanh nghiệp.

Giả sử có *m* nhà cung cấp $X_i, i=\overline{1,m}$ và *n* địa điểm tiêu thụ $Y_j, j=\overline{1,n}$ gọi $a(i,j)$ là lượng hàng vận chuyển từ X_i đến Y_j và $c(i,j)$ là chi phí vận chuyển tương ứng.

Đặt

$$C(a)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a(i,j).c(i,j)$$

là tổng chi phí vận chuyển. Như vậy, ta cần tìm phương án vận chuyển để $C(a)$ có giá trị nhỏ nhất.

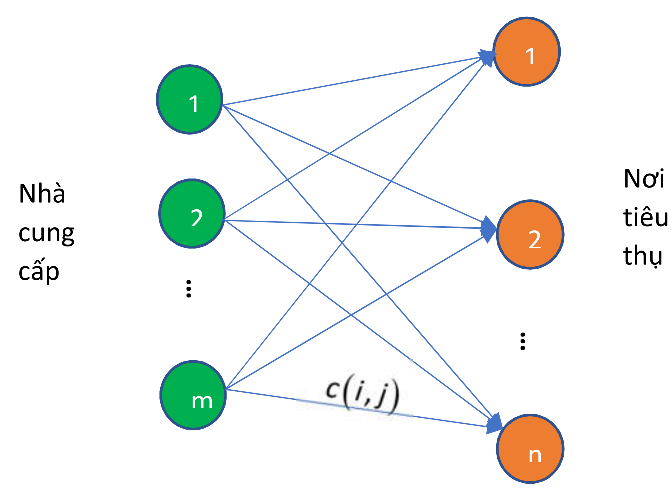
Ta mô hình hóa bài toán như sau:

Đặt

$$A=\left[a(i,j)\right],\ i=\overline{1,m} \text{ và } j=\overline{1,n}$$

là các phương án vận chuyển từ X_i đến Y_j.

Ta xét một mạng lưới cung cầu cơ bản như sau



Hình 1.2 Mạng lưới vận chuyển

1.3 Một số tính chất

_ Lượng hàng hóa phải được vận chuyển từ một số nhà cung cấp đến những nơi tiêu thụ sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất có thể.

_ Mỗi nguồn cung chỉ có thể cung ứng một số lượng hàng hóa cố định và mỗi nơi tiêu thụ có sức tiêu thụ cố định.

_ Mô hình quy hoạch tuyến tính **(linear programing model)** có một số ràng buộc cho lượng hàng cung cấp ở mỗi nguồn cung và lượng tiêu thụ ở mỗi nguồn cầu.

_ Trong mô hình vận tải cân bằng **(balanced)** tất cả các ràng buộc đều được thể hiện bởi các phương trình.

_ Trong mô hình vận tải không cần bằng **(unbalanced)** các ràng buộc thể hiện dưới dạng bất phương trình.

2. MÔ HÌNH CÂN BẰNG (BALANCED)

Mô hình cân bằng là mô hình đảm bảo tổng cung bằng tổng cầu, nghĩa là lượng hàng hóa của nhà cung cấp cân bằng với nhu cầu của khách hàng.

2.1 Các giai đoạn Có hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Tìm nghiệm cơ bản (Basic Feasible Solution)

Tìm ra các nghiệm khả thi cơ bản, nghĩa là ta có một hệ phương trình các ràng buộc, hệ này sẽ có họ các bộ nghiệm. (*thường gọi là* ***nghiệm cơ bản***)

Giai đoạn 2: Phương pháp tối ưu nghiệm cơ bản (Optimum basic solution)

Kiểm tra lại nghiệm cơ bản và đưa ra kết luận cuối cùng với mức chi phí tối ưu nhất.

Trong mô hình này ta có một số phương pháp tiếp cận dưới đây.

Ví dụ: Có ba nhà cung cấp (NCC) X_1, X_2, X_3 có lần lượt có 50, 40, 60 đơn vị hàng hóa **(đvhh)** trong kho cung cấp hàng cho ba cơ sở tiêu thụ (CSTT) Y_1, Y_2, Y_3 với mức nhu cầu tiêu thụ lần lượt là 20, 95, 35 đvhh.

Ta có:

$$\sum X_i = 50 + 40 + 60 = 150 \text{ (đvhh)},\ i = 1,2,3 \text{ và } \sum Y_j = 20 + 95 + 35 = 150,\ j = 1,2,3$$

Như vậy "Tổng cung = Tổng cầu", nên đây là bài toán trong mô hình cân bằng.

Chi phí vận chuyển được cho trong bảng sau:

Chi phí

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8	4	50
X_2	6	6	3	40
X_3	3	9	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Để giải quyết bài toán trên, ta thực hiện hai giai đoạn nêu trên (2.1.1 và 2.1.2)

2.2 **Giai đoạn 1** Ta có các phương pháp căn bản dưới đây.

2.2.1 **Phương pháp góc Tây Bắc (Northwest Corner Method)** *Phương pháp này giúp ta tối ưu lượng hàng vận chuyển.*

2.2.1a Thuật toán

Ta bắt đầu ở ô (1;1) (**ô góc Tây Bắc**) và phân phối lượng hàng vào các ô của bảng theo quy trình sau:

- Cung cấp hết lượng hàng của NCC cho mỗi dòng (row) rồi mới xét đến hàng tiếp theo nếu trong ô đó "cầu ít hơn cung".
- Tiếp nhận hết nguồn cung từ NCC cho mỗi cột (column) rồi mới xét đến cột tiếp theo nếu trong ô đó "cung ít hơn cầu".
- Kiểm tra xem NCC đã phân phối hết hàng; CSTT đã tiếp nhận đủ nhu cầu lượng hàng và tổng cung bằng tổng cầu thì kết thúc quy trình.

Để dễ hình dung, ta giải bài toán **Ví dụ** nêu trên:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5 20	8 30	4	50
X_2	6	6 40	3	40
X_3	3	9 25	6 35	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Mô tả phương pháp:

_ Xét ô Tây Bắc (1,1), nhu cầu 20, NCC có 50 cung cấp lần lượt cho (1,1) là 20 và (1,2) là 30.

_ Ta xét dòng thứ 2, nhu cầu ở ô (2,2) là 95, NCC có 40 cung cấp hết cho ô (2,2). Khi đó CSTT Y_2 đã được cung cấp 70 trong tổng nhu cầu là 95.

_ Ta xét dòng thứ 3, CSTT Y_2 có nhu cầu 25, NCC có 60 cung cấp đủ phần còn lại cung cấp cho CSTT Y_3 và kết thúc quy trình.

Ta tính được chi phí là: $20.5 + 30.8 + 40.6 + 9.25 + 35.6 = \boxed{1015}$.

2.2.1b Nhận xét

Ưu điểm	Khuyết điểm
• Đơn giản • Tối ưu lượng hàng	• Chủ quan • Chưa chắc tối ưu được chi phí.

2.2.2 Hạn chế tối tiểu (Least Cost Method).

Phương pháp này giúp ta tối ưu chi phí.

2.2.2a Thuật toán

- Chọn ô bắt đầu dựa vào ô có chi phí nhỏ nhất trong bảng giả sử ô đó là $\left(X_{i_o};Y_{j_o}\right)$.
- Điền $\min\left\{X_{i_o},Y_{j_o}\right\}$ vào $\left(X_{i_o};Y_{j_o}\right)$.
- Lập lại bước đầu tiên cho đến khi "tổng cung = tổng cầu" và kết thúc quy trình.

Để dễ hình dung, ta lại xét **Ví dụ**

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8	4	50
X_2	6	6	3	40
X_3	3	9	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Nhìn vào bảng, ta thấy có hai vị trí có chi phí thấp nhất là (3,1) và (2,3). Thông thường ta ưu tiên cho vị trí có thể cho vào lượng hàng nhiều nhất, do đó ta đi từ ô (2,3)

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5 x	8 50	4 x	50
X_2	6 x	6 5	3 35	40
X_3	3 20	9 40	6 x	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Mô tả phương pháp:

_ Ở ô (2;3) nhu cầu là 35, NCC có 40 nên điền 35 và xóa hai ô (1;3) và (3;3). Tiếp theo ta tìm ô có chi thấp nhất có thể nhập hàng là ô (3;1).

_ Ở ô (3;1) nhu cầu là 20, NCC có 60 nên điền 20 và xóa hai ô (1;1) và (2;1). Tiếp tục tìm ô có chi phí thấp nhất có thể nhập hàng là ô (2;2).

_ Ở ô (2;2) nhu cầu là 95, NCC còn 5 nên điền 5. Ô tiếp theo có chi phí thấp nhất là 8 ở ô (1;2), nhu cầu là 90, NCC có 50 nên điền 50. Còn lại điền 40 vào ô (3;2) và kết thúc quy trình.

Ta tính được chi phí là: $3.20 + 3.35 + 5.6 + 50.8 + 40.9 = \boxed{955}$.

2.2.2b Nhận xét

Ưu điểm	Khuyết điểm
• Đơn giản • Hạn chế chi phí	• Chủ quan • Không có trình tự cụ thể.

2.2.3 Vogel's approximation method

2.2.3a Định nghĩa Phương pháp xấp xỉ Vogel hay còn gọi VAM là một quy trình lặp lại để tìm nghiệm ban đầu của bài toán tối ưu chi phí vận tải.

2.2.3b Thuật toán

Bước 1: Tìm hiệu của hai ô có chi phí nhỏ nhất cho từng dòng và từng hàng.

Bước 2: Chọn dòng có hiệu số lớn nhất vừa tìm được ở **Bước 1**. Nếu có hai hiệu số lớn nhất bằng nhau thì ta chọn dòng hoặc cột bất kì.

Bước 3: Cho lượng hàng hóa lớn nhất theo ràng buộc cung cầu đã có với chi phí thấp nhất của dòng hoặc cột đó.

Bước 4: Xóa dòng hoặc cột đã đủ lượng hàng; lập lại bảng mới và thực hiện lại quy trình trên cho đến khi hoàn tất bảng phân phối cung cầu.

2.2.3c Ví dụ: Cho bảng dữ liệu như sau

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8	4	50
X_2	6	6	3	40
X_3	3	9	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Lần 1 : Ta tính được hiệu số chi phí mỗi dòng và cột theo bảng dưới đây

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)	
X_1	5	8	4	50	1
X_2	6	6	3	40	3
X_3	3	9	6	60	3
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150	
	2	2	1		

Lần 2: Chọn ngẫu nhiên ô (2;3) và điền 35 và đồng thời xóa đi các ô còn lại ở cột 3 và ô cung của X_2 còn 5.

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)	
X_1	5	8	4 x	50	1
X_2	6	6	3 35	40	3
X_3	3	9	6 x	60	3
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150	
	2	2	1		

Lần 3: Tiếp tục tìm hiệu số chi phí và chọn ô (3;1) điền 20 đồng thời xóa cột và điền 40 vào ô (3;2). Khi đó cung ở dòng 3 hết.

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Nguồn cung (Supply)	
X_1	5 x	8	50	3
X_2	6 x	6	5	0
X_3	3 20	9 40	60	6
Nhu cầu (Demand)	20	95	115	
	2	2		

Lần 4: Tiếp tục tìm hiệu số chi phí, điền 50 vào ô (1;2) và 5 vào ô (1;1). Kết thúc quy trình.

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_2	Nguồn cung (Supply)	
X_1	8 50	50	8
X_2	6 5	5	6
Nhu cầu (Demand)	55	55	
	2		

Chi phí: $35.3+20.3+40.9+50.8+5.6=\boxed{955}$.

2.2.3d Nhận xét

Ưu điểm	Khuyết điểm
• Hạn chế một phần chi phí.	• Khá phức tạp.

2.2.4 Sơ kết

_ Ta có thể tìm nghiệm ban đầu của bài toán trên theo một trong ba phương pháp tùy theo nhu cầu của mục đích của doanh nghiệp.

_ Xét bảng sau

Phương pháp	Chi phí
Phương pháp góc Tây Bắc (Nortwest Corner Method)	1015
Hạn chế chi phí vận chuyển (Least Cost Method)	955
Vogel's approximation method	955

2.3 Giai đoạn 2

Sau khi thực hiện **Giai đoạn 1** bằng một trong các phương pháp trên, ta tìm được nghiệm ban đầu nhưng chưa khẳng định được tính tối ưu của quy trình vì vậy ta cần kiểm tra lại kết quả vừa tìm được và đưa ra kết luận hợp lý.

Để thực hiện được yêu cầu trên, ta có hai phương pháp là

- *Phướng pháp 1: Stepping – stone*
- *Phương pháp 2: Modified Distribution (MODI METHOD)*

2.3.1 Điều kiện để thực hiện phương pháp kiểm tra tối ưu

Phải có đúng $m+n-1$ vị trí được cung ứng hàng từ các nhà cung cấp thông qua các phương pháp tìm nghiệm cơ bản đã trình bày như trên. Trong đó m là số nhà cung cấp, n là số cơ sở tiêu thụ.

2.3.2 Stepping – stone method

Ý tưởng của phương pháp này là thêm 1 đvhh vào ô trống (nghĩa là thêm dấu (+), ngược lại bớt đi là thêm dấu $(-)$, sau đó điều chỉnh lượng hàng hóa cho các ô đã xác định trong đường đi đóng vừa vẽ được, sau đó tính xem nếu ta thay đổi như vậy thì chi phí vận chuyển sẽ có khả năng giảm hay không. Nếu chi phí giảm thì ta tìm lại nghiệm tối ưu của bài toán theo quy tắc dưới đây.

2.3.2a Thuật toán

Trong phương pháp này, ta cần thực hiện các quy tắc sau đây

Bước 1: Xác định nghiệm cơ bản ban đầu.

Bước 2: Xem xét các cô còn trống theo quy trình sau:

a) Chọn một ô trống bất kỳ và vẽ một đường đi đóng sao cho góc của đường đi là các ô đã xác định.
b) Đan dấu (+) và $(-)$, bắt đầu với dấu (+) ở ô đã chọn ở a).
c) Tính phí vận chuyển của quy trình tương ứng dấu đã chèn ở b), người ta gọi là Net Cost Change.
d) Thực hiện lại các bước trên với những ô trống còn lại.

Bước 3: Nếu tất cả các Net Cost Change đều không âm thì nghiệm cơ bản thu được ở **Giai đoạn 1** đã tối ưu và kết thúc thuật toán. Ngược lại, ta chọn vòng kín có Net Cost Change có giá trị âm lớn để thực hiện tiếp theo.

Bước 4:

a) Xét các ô đã được đánh $(-)$ trong đường đi đóng được vẽ từ ô vừa chọn ở bước trên, chọn ô nào có lượng hàng nhỏ nhất.

b) Chuyển toàn bộ lượng hàng trong ô đó vào các ô được đấu dấu (+), nghĩa là ô đã chọn sẽ có lượng hàng bằng 0. Điều chỉnh lại lượng hàng trong các ô còn lại thỏa mãn số lượng cung và cầu trong mỗi hàng và cột.

Bước 5: Thực hiện lại các **Bước 2- 4** với bảng hàng hóa và chi phí mới. Thuật toán dừng lại khi tất cả những giá trị Δ không âm. Khi đó ta nhận được nghiệm tối ưu của bài toán.

2.3.2.a Bài toán

Xét bài toán trên, với nghiệm cơ bản tìm được từ phương pháp xấp xỉ Vogel. Ta có kết quả quy trình ở **Giai đoạn 1** được ghi lại trong bảng sau:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 50	4	50
X_2	6	6 5	3 35	40
X_3	3 20	9 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Chọn ô (1;1), thực hiện các bước như trên, ta có một vòng khép kín như bảng dưới đây

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5 +	8 – 50	4	50
X_2	6	6 5	3 35	40
X_3	3 – 20	9 + 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

$X_1Y_1 : \Delta = 5 - 8 + 9 - 3 = 3 > 0$

Chọn ô (2;1), thực hiện các bước như trên, ta có một vòng khép kín như bảng dưới đây

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 50	4	50
X_2	6 +	6 – 5	3 35	40
X_3	3 – 20	9 + 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

$X_2Y_1 : \Delta = 6 - 6 + 9 - 3 = 6 > 0$

Chọn ô (1;3), thực hiên các bước như trên, ta có một vòng khép kín như bảng dưới đây

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 – 50	4 +	50
X_2	6	6 + 5	3 – 35	40
X_3	3 20	9 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

$X_1Y_3 : \Delta = 4 - 3 + 6 - 8 = -1 < 0$

Chọn ô (3;3), thực hiện các bước trên, ta có một vòng khép kín như bảng dưới đây

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 50	4	50
X_2	6	6 + 5	3 – 35	40
X_3	3 20	9 – 40	6 +	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

$X_3Y_3 : \Delta = 6 - 9 + 6 - 3 = 0$

Tóm tắt lại các bước đi trong bảng sau đây:

Ô bắt đầu	Đường đi	Net cost change
X_1Y_1	$X_1Y_1 \to X_1Y_2 \to X_3Y_2 \to X_3Y_1$	$X_1Y_1 : \Delta = 5 - 8 + 9 - 3 = 3 > 0$
X_2Y_1	$X_2Y_1 \to X_2Y_2 \to X_3Y_2 \to X_3Y_1$	$X_2Y_1 : \Delta = 6 - 6 + 9 - 3 = 6 > 0$
X_1Y_3	$X_1Y_3 \to X_2Y_3 \to X_2Y_2 \to X_2Y_1$	$X_1Y_3 : \Delta = 4 - 3 + 6 - 8 = -1 < 0$
X_3Y_3	$X_3Y_3 \to X_3Y_2 \to X_2Y_2 \to X_2Y_3$	$X_3Y_3 : \Delta = 6 - 9 + 6 - 3 = 0$

Các vị trí cho ra kết quả $\Delta < 0$ sẽ là các vị trí có thể làm giảm chi phí vận chuyển, từ đó cho ra được chi phí tối ưu. Ta chọn ô có giá trị Δ nào âm "lớn nhất" (nghĩa là ô có Δ âm mà giá trị tuyệt đối của nó là lớn nhất) để thực hiện bước tiếp theo.

Ta nhận thấy ô (1;3) cho giá strị âm nghĩa là nghiệm cơ bản chưa tối ưu, nên trong hai ô mang dấu $(-)$ chọn ô có lượng hàng nhỏ hơn để điền vào ô trống, ở đây cụ thể là điền vào ô (1;3) lượng 35. Ta có bảng mới như sau:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 / 15	4 / 35	50
X_2	6	6 / 40	3	40
X_3	3 / 20	9 / 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Thực hiện tương tự, ta có bảng tóm tắt đường đi:

Ô bắt đầu	Đường đi	Net Cost Change
X_1Y_1	$X_1Y_1 \to X_1Y_2 \to X_3Y_2 \to X_3Y_1$	$\Delta = 5-8+9-3=3>0$
X_2Y_1	$X_2Y_1 \to X_2Y_2 \to X_3Y_2 \to X_3Y_1$	$\Delta = 6-6+9-3=6>0$
X_2Y_3	$X_2Y_3 \to X_2Y_2 \to X_1Y_2 \to X_1Y_3$	$\Delta = 3-6+8-4=1>0$
X_3Y_3	$X_3Y_3 \to X_3Y_2 \to X_1Y_2 \to X_1Y_3$	$\Delta = 6-9+6-3=0$

Khi đó chi phí tối ưu, có giá trị là $15.8+35.4+40.6+20.3+40.9=\boxed{920}$.

2.3.3 Modified Distribution Method (MODI)

Phương pháp MODI là phiên bản đã cải tiến của phương pháp Stepping Stone để tìm ra nghiệm tối ưu cho bài toán. Phương pháp này được sử dụng khi số lượng nhà cung cấp và nơi tiêu thụ lớn mà phương pháp Stepping Stone không làm được. Trong MODI, ta sẽ tính toán để tìm các giá trị Net Cost Change và chỉ cần vẽ duy nhất một đường đi đóng thay vì phải vẽ mọi đường đi đóng như trong Stepping Stone.

Thuật toán của phương pháp này sẽ được trình bày như sau:

2.3.3a Thuật toán

Bước 1: Xác định nghiệm ban đầu của bài toán bằng một trong ba phương pháp ở **Giai đoạn 1**. Nghiệm ban đầu phải có đúng $m+n-1$ ô được xác định.

Bước 2: Ta thêm cột u_i với i = 1,…,n vào bên trái bảng, và dòng v_j với j = 1,…,m vào dưới cùng bảng. Tính các giá trị u_i, v_j của các ô đã xác định trong **Bước 1**, ta dùng công thức $c_{ij} = u_i + v_j$ với c_{ij} là chi phí vận chuyển ở ô $(i;j)$. Để tìm nghiệm của hệ phương trình này, ta đặt u_i hoặc v_j bất kì bằng 0 rồi giải tìm các nghiệm còn lại và điền vào các ô u_i và v_j tương ứng trong bảng.

Bước 3: Tính giá trị. $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

a) Nếu tất cả các giá trị $\Delta_{ij} \geq 0$, ta đã tìm được nghiệm tối ưu.

b) Nếu có vài giá trị Δ_{ij} âm thì nghiệm hiện tại chưa tối ưu. Chọn ô cho giá trị Δ_{ij} âm lớn nhất và vẽ vòng kín và điền lần lượt dấu (+) và (−) theo nguyên tắc của phương pháp Stepping Stone.

Bước 4: Xét các ô đã được đánh dấu (−) trong đường đi đóng được vẽ từ ô vừa chọn ở bước trên, chọn ô nào có lượng nào nhỏ nhất. Chuyển toàn bộ lượng hàng trong ô đó vào các ô được đấu dấu (+), nghĩa là ô đã chọn sẽ có lượng hàng bằng 0. Điều chỉnh lại lượng hàng trong các ô còn lại thỏa mãn số lượng hàng cung và cầu trong mỗi hàng và cột.

Bước 5: Thực hiện lại các bước 2 - 4 với bảng hàng hóa và chi phí mới. Thuật toán dừng lại khi tất cả những giá trị $\Delta_{ij} \geq 0$. Khi đó ta nhận được nghiệm tối ưu của bài toán.

2.3.3b Bài toán

Ta dùng kết quả thu được từ phương pháp xấp xỉ Vogel để thực hiện phương pháp này

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 50	4	50
X_2	6	6 5	3 35	40
X_3	3 20	9 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Ta thực hiện quy tắc của MODI như sau:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)	u_i
X_1	5	8 50	4	50	0
X_2	6	6 5	3 35	40	
X_3	3 20	9 40	6	60	
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150	
v_j					

Ta áp dụng: $c_{ij} = u_i + v_j$. Chọn $u_1 = 0$, ta có $c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 8$

Tương tự

$c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = -2$	$c_{32} = u_3 + v_2 \Rightarrow u_3 = 9 - 8 = 1$
$c_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow v_1 = 3 - 1 = 2$	$c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = 3 - (-2) = 5$

Ta được bảng điều chỉnh sau

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)	u_i
X_1	5	8 50	4	50	0
X_2	6	6 5	3 35	40	-2
X_3	3 20	9 40	6	60	1
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150	
v_j	2	8	5		

Ta áp dụng: $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3$	$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 6$
$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = -1$	$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 0$

Chọn ô (1;3), ta có đường đi đóng như bảng sau

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 – 50	4 +	50
X_2	6	6 + 5	3 – 35	40
X_3	3 20	9 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Trong hai ô mang dấu $(-)$ chọn ô có lượng hàng nhỏ hơn để điền vào ô trống, ở đây cụ thể là điền vào ô (1;3) lượng 35. Sau khi điều chỉnh lại lượng hàng hóa ở các ô khác, ta có bảng mới như sau:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	5	8 15	4 35	50
X_2	6	6 40	3	40
X_3	3 20	9 40	6	60
Nhu cầu (Demand)	20	95	35	150

Lặp lại phương pháp MODI, ta tìm được nghiệm tối ưu là: $15.8+35.4+40.6+20.3+40.9=\boxed{920}$.

2.3.3c Nhận xét

Ưu điểm	Nhược điểm
Không cần thực hiện với nhiều đường đi đóng, dùng cho các mô hình vận tải lớn	Tính toán nhiều

3. MÔ HÌNH KHÔNG CÂN BẰNG (UNBALANCED)

Bài toán vận tải có tổng của lượng hàng cung cấp và nhu cầu không bằng nhau được gọi là bài toán vận tải không cân bằng. Trong thực tế, chúng ta thường gặp các bài toán không cân bằng hơn là các bài toán cân bằng. Đối với các bài toán không cân bằng, ta bổ sung các "NCC ảo" **(dummy column)** hoặc "nơi tiêu thụ ảo" **(dummy row)** để bài toán trở nên cân bằng rồi giải bằng các phương pháp đã đưa ra trong mô hình cân bằng.

3.1 Thuật toán:

Bước 1: Tìm nghiệm cơ bản ban đầu . Thêm vào một dòng ảo (Cầu > Cung) hoặc cột ảo (Cung > Cầu) với chi phí là 0 ở các ô ảo rồi thực hiện tìm nghiệm cơ bản ban đầu bằng một trong ba phương pháp: Northwest Corner Method, Least Cost Method, VAM Method.

Bước 2: Nếu nghiệm cơ bản ban đầu cho ra $m+n-1$ ô đã xác định, ta thực hiện phương pháp Stepping Stone hoặc MODI để kiếm tra và đưa ra nghiệm tối ưu. Nếu nghiệm cơ bản ban đầu có số lượng ô xác định nhỏ hơn m+n-1, ta nói bài toán bị suy biến (degeneracy), khi đó cả phương pháp Stepping Stone và MODI đều không thể thực hiện được.

Bước 3: Degenaracy Để có thể xây dựng một đường đi kín, ta sẽ chọn một ô chưa xác định bất kì để gán vào đó một lượng hàng ảo là 0. Khi đó ta xem ô này là một ô đã được xác định trong nghiệm cơ bản. Vậy lúc này nghiệm cơ bản đã có m+n-1 ô đã xác định. Ta tiếp tục bài toán với phương pháp Stepping Stone hoặc MODI. Tuy nhiên khi ta chọn một ô bất kì như vậy, sẽ có trường hợp ta không vẽ được tất cả các đường đi kín trong phương pháp Stepping Stone. Trong trường hợp này, ta phải chọn một ô khác để gán lượng hàng ảo 0 cho đến khi ta có thể vẽ được tất cả các đường đi kín cho tất cả các ô chưa xác định. Thực chất thì trong đa số trường hợp ta chọn ô gán lượng hàng bằng 0, có nhiều hơn một ô mà từ đó có thể thực hiện Stepping Stone.

3.2 Một số ví dụ:

3.2a Bài toán Cầu > Cung Dữ liệu cung cầu cho trong bảng dưới đây:

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	6	8	10	150
X_2	7	11	11	175
X_3	4	5	12	275
Nhu cầu (Demand)	200	100	350	

$\sum \text{cầu} = 200 + 350 + 100 = 650 > \sum \text{cung} = 150 + 175 + 275 = 600$

Ta thêm vào một dòng ảo.

Cung cấp \ Tiêu thụ	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	6	8	10	150
X_2	7	11	11	175
X_3	4	5	12	275
Dummy	0	0	0	50
Nhu cầu (Demand)	200	100	350	650

3.2b Bài toán Cung > Cầu

Dữ liệu cung cầu cho trong bảng dưới đây:

Cung cấp \ Tiêu thụ	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	6	8	10	150
X_2	7	11	11	175
X_3	4	5	12	375
Nhu cầu (Demand)	200	100	350	

$\sum \text{cầu} = 200 + 350 + 100 = 650 \; < \; \sum \text{cung} = 150 + 175 + 375 = 700$

Ta thêm vào một cột ảo.

Cung cấp \ Tiêu thụ	Y_1	Y_2	Y_3	Dummy	Nguồn cung (Supply)
X_1	6	8	10	0	150
X_2	7	11	11	0	175
X_3	4	5	12	0	375
Nhu cầu (Demand)	200	100	350	50	700

3.3c Degeneracy

Ta có dữ liệu cung cầu cho trong bảng dưới đây

Chọn ô ảo là ô (1;1), ta hoàn toàn có thể vẽ được tất cả các đường đi kín như trong **Phương pháp stepping – stone** và kết luận nghiệm tối ưu.

Tiêu thụ / Cung cấp	Y_1	Y_2	Y_3	Nguồn cung (Supply)
X_1	6 0	8 100	10 50	150
X_2	7	11	11 250	250
X_3	4 200	5	12	200
Nhu cầu (Demand)	200	100	300	600

Tuy nhiên, cũng hệ dữ liệu này, nếu ta chọn ô ảo là ô (2;2) thì không thể vẽ được tất cả các đường đi kín như đã nói ở trên.

THAM KHẢO

[1] Wikipedia, Transportation theory (mathematics), https://tinyurl.com/y66h422g

[2] Ignou The People's university, Unit 4 Transportation Problem, https://tinyurl.com/yyfegzps

[3] Técnico Lisboa, B Transportation and Assignment Solution Methods, https://tinyurl.com/y476mw2c

[4] msn007, SlideShare, Transportation Model, https://tinyurl.com/yyw8esek

[5] Business Jargon, North-West Corner Rule, https://businessjargons.com/north-west-corner-rule.html

[6] Business Jargon, Least Cost Method, https://businessjargons.com/least-cost-method.html

[7] Business Jargon, Vogel's Approximation Method, https://businessjargons.com/vogels-approximation-method.html

[8] Wikipedia, Bài Toán Vận Tải, https://tinyurl.com/yxbyttb4

[9] AtoZmath, Stepping Stone Method, https://tinyurl.com/y5ztq9ak

[10] Universal Teacher Publications, Stepping Stone Method Examples: Transportation Problem, https://tinyurl.com/y68c2hjl