

Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»

Лекция 6 «Представления поверхностей с помощью методов трансфинитной интерполяции. Поверхности треугольной формы»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.:930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru



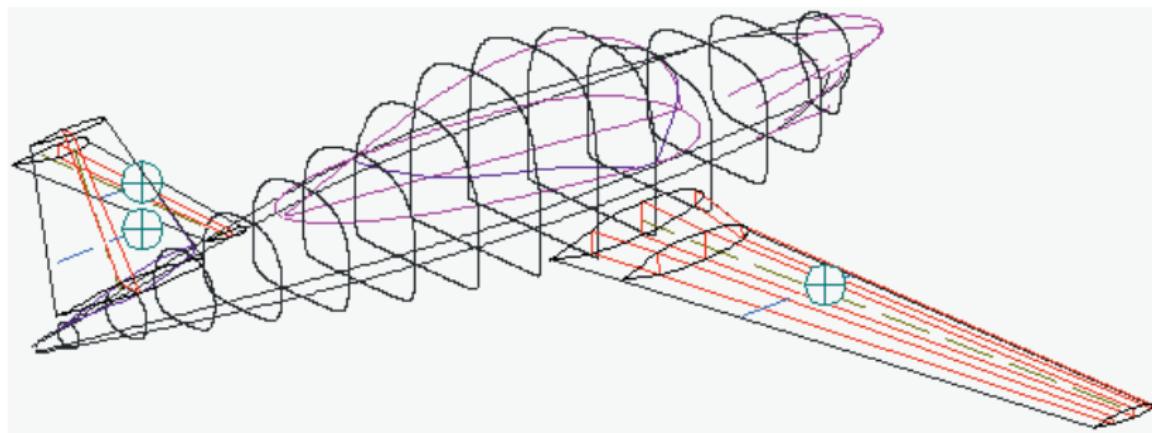
МГТУ им. Н.Э. Баумана

8 апреля 2022 г.

Поверхности, построенные по остову из кривых

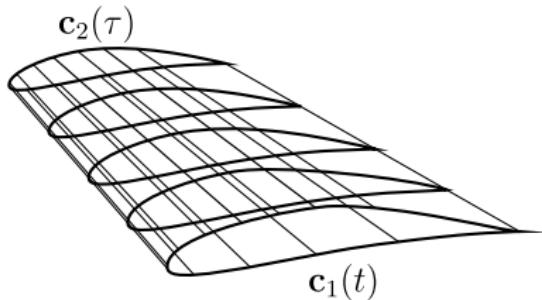
В предыдущих лекциях мы рассмотрели методы интерполяции и аппроксимации поверхностей по заданному дискретному набору данных состоящему из множества контрольных точек.

В проектировании поверхностей иногда применяются методы построения по дискретной совокупности её сечений. Например, корпуса судов, фюзеляжи и крылья самолетов часто проектируются с помощью поперечных или продольных сечений, проходящих в заданных местах. Эти сечения соединяются плавными кривыми, в результате чего получается единая трёхмерная форма.



Поверхности, построенные по остову из кривых

Для затягивания остова, образованного сечениями, гладкой поверхностью, применяются методы, аналогичные рассмотренным ранее, только контрольные точки заменяются кривыми. Поэтому получаемые таким способом поверхности имеют такие же названия, как и соответствующие интерполяционные сплайны, только вместо обычной интерполяции говорят о трансфинитной интерполяции (*transfinite interpolation*) — т.е. интерполяции бесконечного (*infinite*) множества точек, лежащих на конечном (*finite*) множестве кривых.



Линейчатая поверхность (*ruled surface*) — геометрическое место точек отрезков прямых, соединяющих соответствующие друг другу точки двух заданных кривых. Пусть $\mathbf{c}_1(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ и $\mathbf{c}_2(\tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, — две заданные кривые. Тогда определяемая ими линейчатая поверхность имеет вид

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{c}_1(t) + v\mathbf{c}_2(\tau),$$

где $t = t_0(1 - u) + t_1u$; $\tau = \tau_0(1 - u) + \tau_1u$, $0 \leq u, v \leq 1$.

Если обе кривые \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 замкнуты, то линейчатая поверхность замкнута по u . По параметру v линейчатая поверхность всегда незамкнута.

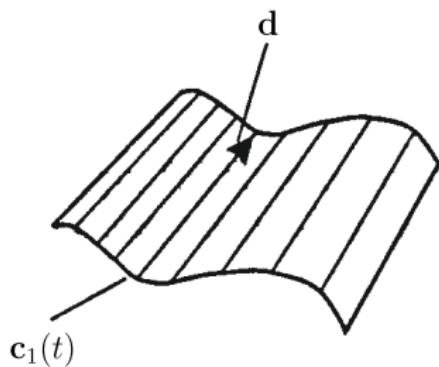
Каркасные линии $\mathbf{r}(u_i, v)$ являются отрезками прямых, а линии $\mathbf{r}(u, v_j)$ образуют систему полиморфных кривых, переходящих от линии \mathbf{c}_1 к линии \mathbf{c}_2 .

Линейчатые поверхности

Цилиндр — это линейчатая поверхность, у которой: $\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{c}_1(t) + \mathbf{d}$, где \mathbf{d} — некоторый вектор. Параметрическая форма цилиндра имеет вид:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{c}_1(t) + \mathbf{d}v,$$

Для создания обычного цилиндра необходимо, чтобы кривая $\mathbf{c}_1(t)$ располагалась только на плоскости. Если $\mathbf{c}_1(t)$ является окружностью, то цилиндр является круговым цилиндром. Если направление \mathbf{d} перпендикулярно к данной плоскости, то данная поверхность называется прямым цилиндром. К этой категории принадлежит и базовый цилиндр.



а) цилиндр



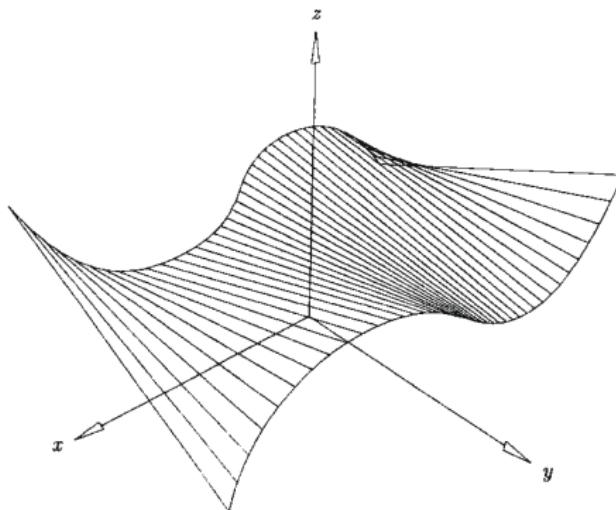
б) «ленточный» цилиндр

Линейчатые поверхности

Пусть кривые c_1 и c_2 задаются с помощью кривых Безье одинаковой степени по наборам контрольных точек p_k^1 и p_k^2 соответственно. Тогда уравнение для линейчатой поверхности мы можем записать в виде:

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left((1 - v) \mathbf{p}_i^1 + v \mathbf{p}_i^2 \right) B_i^n(u). \quad (1)$$

В качестве концевых кривых могут быть использованы NURBS-кривые или B-сплайн кривые; их даже можно задавать на разных векторах узлов, но на одном и том же промежутке.



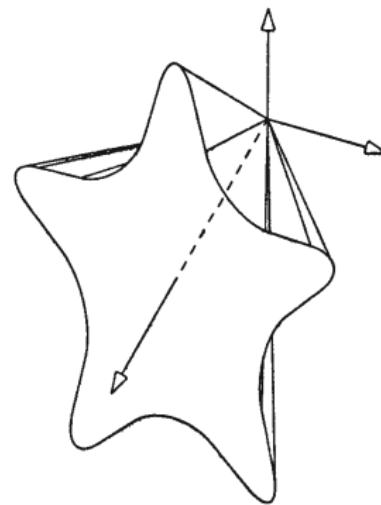
Линейчатые поверхности

Секториальная поверхность — частный случай линейчатой поверхности, когда одна из кривых c_1 или c_2 вырождается в точку p :

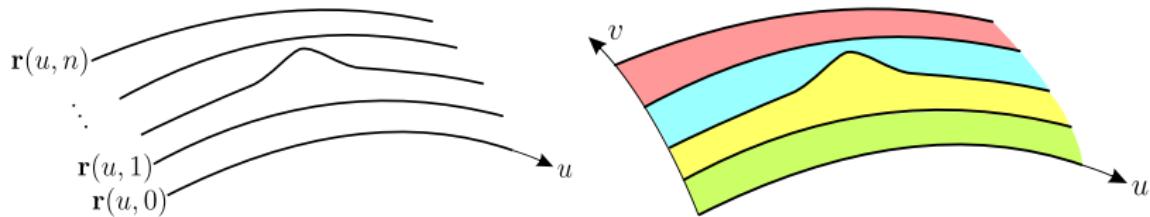
$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - v)\mathbf{c}(u) + v\mathbf{p},$$

где $\mathbf{c}(u)$ — кривая; \mathbf{p} — точка, $u_1 \leq u \leq u_2$, $0 \leq v \leq 1$. Если направляющая $\mathbf{c}(u)$ замкнута, то секториальная поверхность также замкнута по параметру u . По другому параметру секториальная поверхность всегда не замкнута.

Хорошо известны частные случаи: круговой конус получается, если $\mathbf{c}(u)$ представляет собой окружность; круговой конус становится прямым, когда эта окружность лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой, соединяющей центр окружности с вершиной \mathbf{p} . У конуса, показанного на рис., $\mathbf{c}(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u, 1)$, причём «радиус» кривой $r(u)$ изменяется синусоидально согласно уравнению $r(u) = 0.5 + 0.2 \cos(5u)$.



Поверхности Эрмита по заданным сечениям



Сплайном Эрмита называется кусочно-кубическая кривая, проходящая через заданные точки p_0, \dots, p_n и имеющая в этих точках заданные производные p'_0, \dots, p'_n . Аналогично сплайнам Эрмита строятся **поверхности Эрмита**, являющиеся гладкими поверхностями, имеющими непрерывные производные по всем направлениям.

Пусть имеется семейство кривых:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}_0(u); \\ \dots \\ \mathbf{r}(u, i) = \mathbf{r}_i(u); \\ \dots \\ \mathbf{r}(u, n) = \mathbf{r}_n(u). \end{array} \right. \quad (2)$$

Кривые семейства не должны пересекать друг друга. Без ограничения общности будем считать, что параметр u для всех кривых пробегает один и тот же отрезок: $u_0 \leq u \leq u_1$.

Поверхность Эрмита, затягивающая остав кривых $\mathbf{r}(u, i)$, $0 \leq i \leq n$, определяется формулой, аналогичной формуле для сплайна Эрмита:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= (\varphi_1(\omega) \quad \varphi_2(\omega) \quad \varphi_3(\omega) \quad \varphi_4(\omega)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, j) \\ \mathbf{r}(u, j+1) \\ \mathbf{r}_v(u, j) \\ \mathbf{r}_v(u, j+1) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{r}(u, j)\varphi_1(\omega) + \mathbf{r}(u, j+1)\varphi_2(\omega) + \mathbf{r}_v(u, j)\varphi_3(\omega) + \mathbf{r}_v(u, j+1)\varphi_4(\omega), \quad (3)\end{aligned}$$

если $j \leq v \leq j+1$. Здесь $\omega = v - j$ — местный параметр на данном участке поверхности ($0 \leq \omega \leq 1$); $\mathbf{r}_v(u, j)$ и $\mathbf{r}_v(u, j+1)$ — производные в трансверсальном направлении на заданном оставе кривых (2).

Параметрическая область поверхности Эрмита имеет вид

$$\begin{cases} u_0 \leq u \leq u_1; \\ 0 \leq v \leq n. \end{cases}$$

Данная поверхность является кубической по v направлению.

Если трансверсальные производные $\mathbf{r}_v(u, i)$ на линиях остова не заданы, то их можно определить, например, так:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_v(u, j) = \frac{\mathbf{r}(u, j+1) - \mathbf{r}(u, j-1)}{2}, & 1 \leq j \leq n-1; \\ \mathbf{r}_v(u, 0) = 2\mathbf{r}(u, 1) - 2\mathbf{r}(u, 0) - \mathbf{r}_v(u, 1); \\ \mathbf{r}_v(u, n) = 2\mathbf{r}(u, n) - 2\mathbf{r}(u, n-1) - \mathbf{r}_v(u, n-1). \end{cases}$$

При таком определении трети производные на кривых \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_n в трансверсальном направлении обращаются в ноль:

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^3} \bigg|_{v=0} = \frac{\partial^3 \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^3} \bigg|_{v=n} = 0.$$

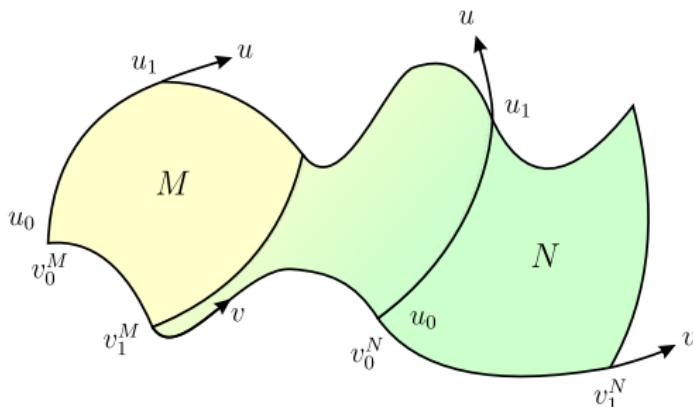
Если все кривые семейства являются замкнутыми, то поверхность (3) получается замкнутой в соответствующем направлении. Поверхность может быть замкнутой и в другом параметрическом направлении. Поверхности Эрмита имеют класс C^1 .

Применение поверхностей Эрмита: поверхность перехода

Поверхность Эрмита можно использовать в качестве *поверхности перехода* для объединения двух поверхностей путём соединения их краев.

Пусть даны две поверхности M и N , которые надо сопрячь, соединив поверхностью перехода край $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M(u, v_1^M)$ первой поверхности и край $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N(u, v_0^N)$ второй поверхности. Будем считать, что оба сопрягаемых края отнесены к одному и тому же параметру u , изменяющемуся в пределах $u_0 \leq u \leq u_1$. Второй параметр на поверхностях M и N обозначим (в обоих случаях) через v :

$$\begin{cases} u_0 \leq u \leq u_1; \\ v_0^M \leq v \leq v_1^M; \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 \leq u \leq u_1; \\ v_0^N \leq v \leq v_1^N. \end{cases}$$

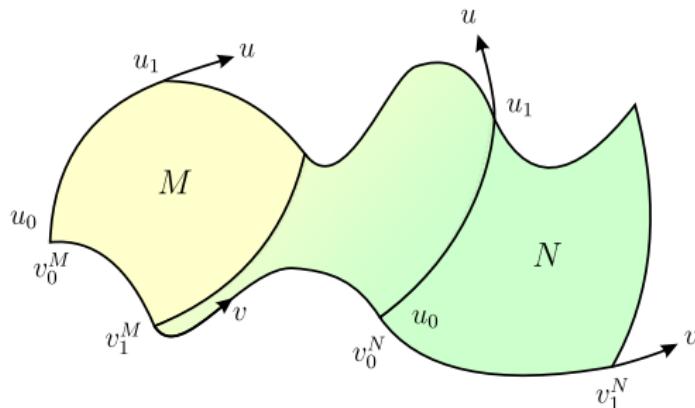


Применение поверхностей Эрмита: поверхность перехода

Без ограничения общности будем считать, что $v_1^M < v_0^N$. Тогда поверхность перехода от M к N может быть описана формулой Эрмита:

$$\mathbf{r}(u, \omega) = \mathbf{r}_M(u, v_1^M) \varphi_1(\omega) + \mathbf{r}_N(u, v_0^N) \varphi_2(\omega) + \\ + \left. \frac{\partial \mathbf{r}_M(u, v)}{\partial v} \right|_{v=v_1^M} \varphi_3(\omega) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}_N(u, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0^N} \varphi_4(\omega),$$

где $\omega = \frac{v - v_1^M}{v_0^N - v_1^M}$ — местный параметр по направлению v , $0 \leq \omega \leq 1$, $u_0 \leq u \leq u_1$.



Поверхности Кунса (Coons patch). Линейные поверхности Кунса

Пусть заданы четыре кривые $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$, образующие криволинейный четырёхугольник с углами в точках $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$:

$$\mathbf{c}_1(u) = \mathbf{r}(u, 0), \quad 0 \leq u \leq 1; \quad \mathbf{c}_1(0) = \mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{p}_1; \quad \mathbf{c}_1(1) = \mathbf{r}(1, 0) = \mathbf{p}_2;$$

$$\mathbf{c}_2(u) = \mathbf{r}(u, 1), \quad 0 \leq u \leq 1; \quad \mathbf{c}_2(0) = \mathbf{r}(0, 1) = \mathbf{p}_3; \quad \mathbf{c}_2(1) = \mathbf{r}(1, 1) = \mathbf{p}_4;$$

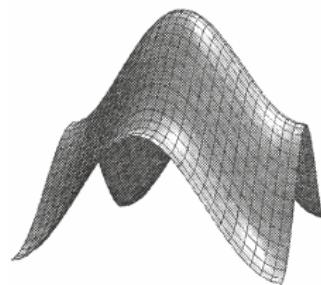
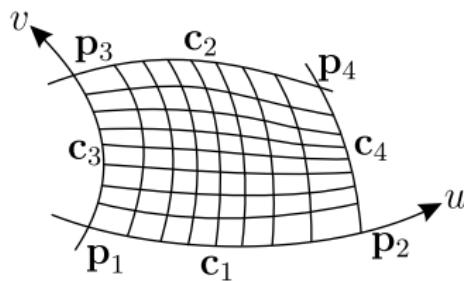
$$\mathbf{c}_3(v) = \mathbf{r}(0, v), \quad 0 \leq v \leq 1; \quad \mathbf{c}_3(0) = \mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{p}_1; \quad \mathbf{c}_3(1) = \mathbf{r}(0, 1) = \mathbf{p}_3;$$

$$\mathbf{c}_4(v) = \mathbf{r}(1, v), \quad 0 \leq v \leq 1; \quad \mathbf{c}_4(0) = \mathbf{r}(1, 0) = \mathbf{p}_2; \quad \mathbf{c}_4(1) = \mathbf{r}(1, 1) = \mathbf{p}_4;$$

Обозначим: $\alpha_0(u) = 1 - u$, $\alpha_1(u) = u$

— функции, которые будем называть *функциями смешения линейной поверхности Кунса*. Сама линейная поверхность Кунса определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{f}(u, v) - \alpha_0(u)[\mathbf{f}(0, v) - \mathbf{c}_3(v)] - \alpha_1(u)[\mathbf{f}(1, v) - \mathbf{c}_4(v)], \\ \mathbf{f}(u, v) &= \alpha_0(v)\mathbf{c}_1(u) + \alpha_1(v)\mathbf{c}_2(u). \end{aligned} \quad (4)$$



Поверхности Кунса. Линейные поверхности Кунса

Линейная поверхность Кунса, вообще говоря, не является линейчатой поверхностью. Название «линейная» обусловлено тем, что в её определении используются линейные функции смешения $\alpha_0(u)$ и $\alpha_1(u)$. Параметрическая область поверхности Кунса может иметь вид прямоугольника, не обязательно совпадающего с квадратом $[0, 1] \times [0, 1]$. Для того чтобы формула (4) легче воспринималась, преобразуем её к другому виду. Имеем в матричных обозначениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{pmatrix} + (\alpha_0(v) \quad \alpha_1(v)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0) \\ \mathbf{r}(u, 1) \end{pmatrix} - \\ &\quad - (\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^1 \alpha_i(u) \mathbf{r}(i, v) + \sum_{j=0}^1 \alpha_j(v) \mathbf{r}(u, j) - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha_i(u) \alpha_j(v) \mathbf{r}(i, j) = \\ &= \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{r}_2(u, v) - \mathbf{r}_3(u, v), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_1(u, v)$ и $\mathbf{r}_2(u, v)$ — линейчатые поверхности между $\mathbf{c}_1(u)$, $\mathbf{c}_2(u)$ и $\mathbf{c}_3(v)$, $\mathbf{c}_4(v)$, соответственно, а $\mathbf{r}_3(u, v)$ — билинейная поверхность.

Поверхности Кунса. Обобщённые поверхности Кунса

При стыковке линейных поверхностей Кунса по граничным кривым производные в направлении, ортогональном границе, претерпевают разрыв. Чтобы гладко склеивать поверхности Кунса необходимо строить их таким образом, чтобы они имели на границе заданные (согласованные) производные до n -го порядка включительно. Производные в касательном направлении определяются уравнениями самих граничных кривых, а производные в трансверсальном к границе направлении необходимо задавать дополнительно.

Обобщённой поверхностью Кунса n -го порядка называется поверхность

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & \sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^n \alpha_{k,i}(u) \mathbf{r}_u^{(k)}(i, v) + \sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^n \alpha_{l,j}(v) \mathbf{r}_v^{(l)}(u, j) - \\ & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{k,i}(u) \alpha_{l,j}(v) \mathbf{r}_{uv}^{(k,l)}(i, j), \quad 0 \leq u, v \leq 1, \end{aligned}$$

задаваемая четырьмя граничными кривыми $\mathbf{r}(u, 0); \mathbf{r}(u, 1); \mathbf{r}(0, v); \mathbf{r}(1, v)$; стыкующимися в точках $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}(0, 0); \mathbf{p}_2 = \mathbf{r}(1, 0); \mathbf{p}_3 = \mathbf{r}(0, 1)$ и $\mathbf{p}_4 = \mathbf{r}(1, 1)$, а также чистыми частными производными в трансверсальном направлении на граничных кривых до n -го порядка включительно и смешанными частными производными в угловых точках $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ до $2n$ -го порядка включительно:

Поверхности Кунса. Обобщённые поверхности Кунса

$$\mathbf{r}_u^{(k)}(i, v) = \frac{\partial^k \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^k} \bigg|_{u=i}, \quad i = 0, 1;$$

$$\mathbf{r}_v^{(l)}(u, j) = \frac{\partial^l \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^l} \bigg|_{v=j}, \quad j = 0, 1;$$

$$\mathbf{r}_{uv}^{(k,l)}(i, j) = \frac{\partial^{kl} \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^k \partial v^l} \bigg|_{u=i, v=j}, \quad i, j = 0, 1;$$

а также — *обобщёнными функциями смешения* $\alpha_{k,i}(u)$, где $0 \leq k \leq n$, $i = 0, 1$, в качестве которых могут быть взяты произвольные гладкие функции, удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{\partial^m \alpha_{k,i}(u)}{\partial u^m} \bigg|_{u=j} = \delta_i^j \delta_k^m = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, k = m; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

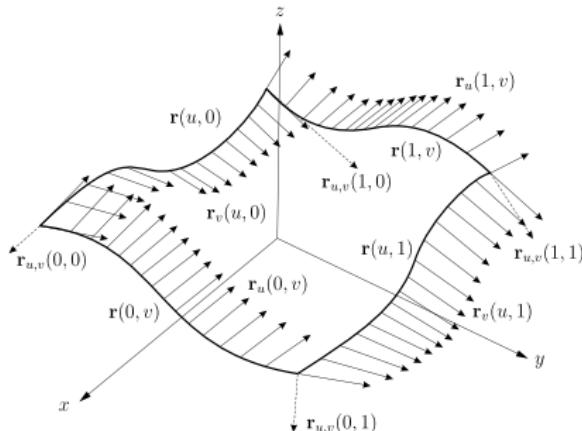
Здесь $0 \leq k, m \leq n$.

Поверхности Кунса. Обобщённые поверхности Кунса. Пример: кубическая поверхность Кунса

Определим функции смешения формулами:

$$\begin{aligned}\alpha_{0,0}(u) &= \varphi_1(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3; & \alpha_{0,1}(u) &= \varphi_2(u) = 3u^2 - 2u^3; \\ \alpha_{1,0}(u) &= \varphi_3(u) = u - 2u^2 + u^3; & \alpha_{1,1}(u) &= \varphi_4(u) = -u^2 + u^3.\end{aligned}$$

Пусть заданы четыре кривые $\mathbf{r}(u, i)$, $\mathbf{r}(i, v)$, где $i = 0, 1$, стыкующиеся в точках $\mathbf{r}(0, 0)$, $\mathbf{r}(0, 1)$, $\mathbf{r}(1, 0)$, $\mathbf{r}(1, 1)$. Пусть заданы первые производные на границе в трансверсальном направлении: $\mathbf{r}_u(i, v)$, $\mathbf{r}_v(u, i)$, $i = 0, 1$, и вторые смешанные производные в угловых точках: $\mathbf{r}_{u,v}(i, j)$, $i, j = 0, 1$.



Поверхности Кунса. Обобщённые поверхности Кунса.

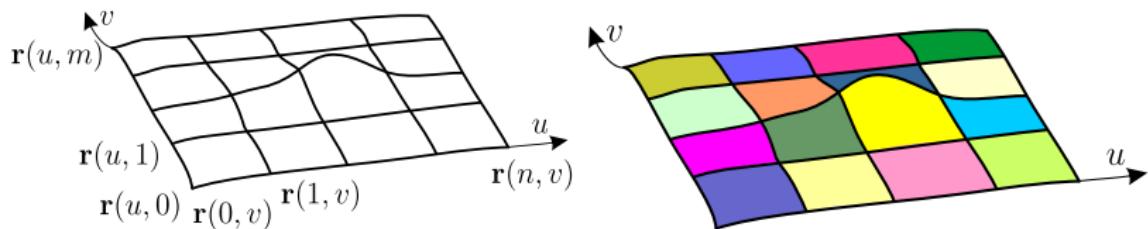
Пример: кубическая поверхность Кунса

Кубическая поверхность Кунса определяется формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & (\varphi_1(u) \quad \varphi_2(u) \quad \varphi_3(u) \quad \varphi_4(u)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \\ \mathbf{r}_u(0, v) \\ \mathbf{r}_u(1, v) \end{pmatrix} + \\ & + (\varphi_1(v) \quad \varphi_2(v) \quad \varphi_3(v) \quad \varphi_4(v)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0) \\ \mathbf{r}(u, 1) \\ \mathbf{r}_v(u, 0) \\ \mathbf{r}_v(u, 1) \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} \varphi_1(u) \\ \varphi_2(u) \\ \varphi_3(u) \\ \varphi_4(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) & \mathbf{r}_v(0, 0) & \mathbf{r}_v(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) & \mathbf{r}_v(1, 0) & \mathbf{r}_v(1, 1) \\ \mathbf{r}_u(0, 0) & \mathbf{r}_u(0, 1) & \mathbf{r}_{uv}(0, 0) & \mathbf{r}_{uv}(0, 1) \\ \mathbf{r}_u(1, 0) & \mathbf{r}_u(1, 1) & \mathbf{r}_{uv}(1, 0) & \mathbf{r}_{uv}(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \\ \varphi_4(v) \end{pmatrix}, = \\ & = \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{r}_2(u, v) - \mathbf{r}_3(u, v), \quad 0 \leq u, v \leq 1, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_1(u, v)$ и $\mathbf{r}_2(u, v)$ — поверхности Эрмита, построенные по заданным граничным кривым и их производным, а $\mathbf{r}_3(u, v)$ — поверхность Эрмита, построенная по заданным координатам угловых точек и заданным производным в них.

Поверхности, затягивающие сетку кривых заплатами Кунса



Пусть задан остав поверхности, состоящий из двух семейств кривых в обоих параметрических направлениях, которые образуют сетку — т.е. каждая кривая одного семейства пересекает в одной и только одной точке каждую кривую другого семейства. Различные кривые одного и того же семейства не пересекаются. Обозначим заданную таким образом сетку кривых через

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, 0), \dots, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, m) &— первое семейство; \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(0, v), \dots, \mathbf{r} = \mathbf{r}(n, v) &— второе семейство. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $0 \leq u \leq n$, $0 \leq v \leq m$. Тогда радиус-вектор точки пересечения i -й кривой первого семейства с j -й кривой второго семейства будет равен $\mathbf{r}(i, j)$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$.

Поверхности, затягивающие сетку кривых заплатами Кунса

Остов, состоящий из сетки кривых (5), можно затянуть поверхностью, состоящей из заплат, затягивающих каждую отдельную ячейку сетки и гладко сопрягающихся между собой. В качестве таких заплат могут выступать поверхности Кунса. Получается следующая поверхность:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & (\varphi_1(\omega) \quad \varphi_2(\omega) \quad \varphi_3(\omega) \quad \varphi_4(\omega)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(i, v) \\ \mathbf{r}(i+1, v) \\ \mathbf{r}_u(i, v) \\ \mathbf{r}_u(i+1, v) \end{pmatrix} + \\ & + (\varphi_1(\xi) \quad \varphi_2(\xi) \quad \varphi_3(\xi) \quad \varphi_4(\xi)) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, j) \\ \mathbf{r}(u, j+1) \\ \mathbf{r}_v(u, j) \\ \mathbf{r}_v(u, j+1) \end{pmatrix} - \\ & - (\varphi_1(\omega) \quad \varphi_2(\omega) \quad \varphi_3(\omega) \quad \varphi_4(\omega)) \times \\ & \times \begin{pmatrix} \mathbf{r}(i, j) & \mathbf{r}(i, j+1) & \mathbf{r}_v(i, j) & \mathbf{r}_v(i, j+1) \\ \mathbf{r}(i+1, j) & \mathbf{r}(i+1, j+1) & \mathbf{r}_v(i+1, j) & \mathbf{r}_v(i+1, j+1) \\ \mathbf{r}_u(i, j) & \mathbf{r}_u(i, j+1) & \mathbf{r}_{uv}(i, j) & \mathbf{r}_{uv}(i, j+1) \\ \mathbf{r}_u(i+1, j) & \mathbf{r}_u(i+1, j+1) & \mathbf{r}_{uv}(i+1, j) & \mathbf{r}_{uv}(i+1, j+1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi) \\ \varphi_2(\xi) \\ \varphi_3(\xi) \\ \varphi_4(\xi) \end{pmatrix}, \\ & \omega = u - i; \quad \xi = v - j; \quad 0 \leq u \leq n; \quad 0 \leq v \leq m. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь $\omega, \xi \in [0, 1]$ — местные параметры в данной ячейке сетки.

Поверхности, затягивающие сетку кривых заплатами Кунса

Для вычисления радиуса-вектора поверхности с помощью формулы (6), необходимо задать производные на кривых сетки в трансверсальном направлении к этим кривым. Это можно сделать, например, по следующим формулам:

$$\mathbf{r}_u(i, v) = \frac{\mathbf{r}(i+1, v) - \mathbf{r}(i-1, v)}{2}; \quad \mathbf{r}_v(u, j) = \frac{\mathbf{r}(u, j+1) - \mathbf{r}(u, j-1)}{2}$$

при $1 \leq u \leq n-1$; $1 \leq v \leq m-1$ (для внутренних линий сетки) и

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(0, v) &= 2\mathbf{r}(1, v) - 2\mathbf{r}(0, v) - \mathbf{r}_u(1, v); \\ \mathbf{r}_u(n, u) &= 2\mathbf{r}(n, v) - 2\mathbf{r}(n-1, v) - \mathbf{r}_u(n-1, v); \\ \mathbf{r}_v(u, 0) &= 2\mathbf{r}(u, 1) - 2\mathbf{r}(u, 0) - \mathbf{r}_v(u, 1); \\ \mathbf{r}_v(u, m) &= 2\mathbf{r}(u, m) - 2\mathbf{r}(u, m-1) - \mathbf{r}_v(u, m-1) \end{aligned} \tag{7}$$

для крайних линий сетки.

Геометрически это означает, что производная $\mathbf{r}_u(i, v)$ в произвольной точке $\mathbf{r}(i, v)$ внутренней линии сетки полагается пропорциональной вектору, соединяющему точки $\mathbf{r}(i-1, v)$ и $\mathbf{r}(i+1, v)$ на соседних с ней линиях сетки, отвечающие тому же значению параметра v , что и данная точка. Аналогичное утверждение справедливо и для производной $\mathbf{r}_v(u, j)$. Так же как и в случае кубических сплайнов Эрмита, формулы (7) обеспечивают равенство нулю третьих производных поверхности на границе в трансверсальном к граничной кривой направлении.

Поверхности треугольной формы



Рассмотрим теперь криволинейные поверхности треугольной формы. Для треугольных областей в двухмерном пространстве удобно использовать барицентрические координаты, которые имеют треугольную область определения параметров.

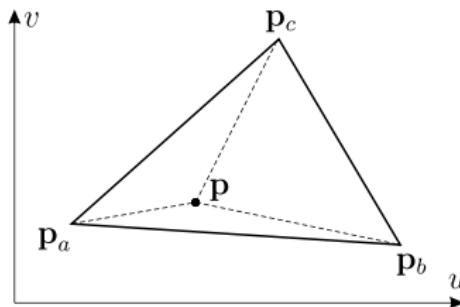
Барицентрические координаты на плоскости

Пусть заданы не лежащие на одной прямой три точки, радиус-векторы которых обозначим через $\mathbf{p}_a = [u_a, v_a]^T$, $\mathbf{p}_b = [u_b, v_b]^T$ и $\mathbf{p}_c = [u_c, v_c]^T$. Положение любой другой точки $\mathbf{p} = [u, v]^T$ можно описать с помощью точек \mathbf{p}_a , \mathbf{p}_b и \mathbf{p}_c равенством

$$\mathbf{p} = a\mathbf{p}_a + b\mathbf{p}_b + c\mathbf{p}_c, \quad (8)$$

где коэффициенты a , b , c определены с точностью до множителя. Для полной определённости потребуем, чтобы их сумма была равна единице. Тогда значения коэффициентов a , b , c , соответствующие декартовым координатам u и v , найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ au_a + bu_b + cu_c &= u, \\ av_a + bv_b + cv_c &= v. \end{aligned} \quad (9)$$

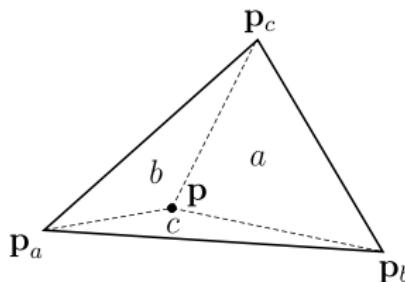


Барицентрические координаты на плоскости

Если решить СЛАУ (9) то можно заметить, что барицентрические координаты произвольной точки $\mathbf{p} = [u, v]^T$ равны отношению ориентированной площади треугольника, полученного из треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$ заменой соответствующей вершины точкой \mathbf{p} , к площади треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$.

Во многих случаях для описания положения точки в двухмерном пространстве удобно перейти от координат u и v к трем барицентрическим координатам, которыми являются коэффициенты a , b , c .

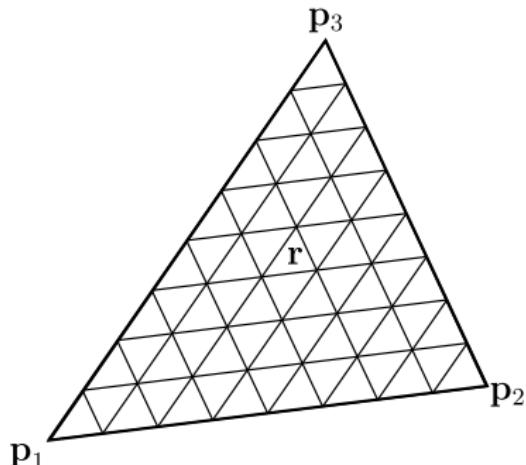
Если точка \mathbf{p} лежит внутри треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$, то её барицентрические координаты неотрицательные. Если точка \mathbf{p} совпадает с вершиной треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$, то две её барицентрические координаты равны нулю. Если точка \mathbf{p} принадлежит стороне треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$ или лежит на её продолжении, то одна барицентрическая координата точки равна нулю. Если точка \mathbf{p} лежит вне треугольника $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \mathbf{p}_c$, то, по крайней мере, одна барицентрическая координата точки отрицательна.



Билинейная треугольная поверхность

Одной из простейших треугольных поверхностей является плоская треугольная поверхность, построенная по трем точкам. Эта поверхность представляет собой треугольный аналог билинейной поверхности. Пусть область определения параметров поверхности ограничена треугольником с вершинами в точках p_1, p_2, p_3 . Введем барицентрические координаты a, b, c . Радиус-вектор r плоской треугольной поверхности, построенной по трем вершинам p_1, p_2, p_3 опишем векторной функцией трёх параметров a, b, c :

$$\mathbf{r}(a, b, c) = a\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2 + c\mathbf{p}_3, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1, \quad 0 \leq c \leq 1. \quad (10)$$



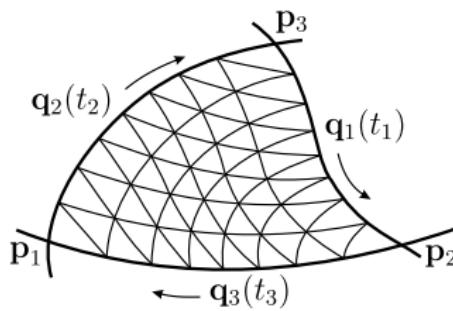
Треугольная поверхность на трёх кривых

Рассмотрим три кривые $q_1(t_1)$, $q_2(t_2)$, $q_3(t_3)$ попарно пересекающиеся в точках p_1 , p_2 , p_3 , причём $q_1(0) = p_3$, $q_1(1) = p_2$, $q_2(0) = p_1$, $q_2(1) = p_3$, $q_3(0) = p_2$, $q_3(1) = p_1$.

Радиус-вектор поверхности, построенной по данным трем кривым, опишем векторной функцией трёх барицентрических координат a , b , c

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(a, b, c) = & a (q_3(1 - b) + q_2(c) - p_1) + \\ & b (q_1(1 - c) + q_3(a) - p_2) + c (q_2(1 - a) + q_1(b) - p_3) \end{aligned} \quad (11)$$

где $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$. Радиус-вектор, фактически, зависит от двух параметров, так как $a + b + c = 1$. Края поверхности (11) совпадают с кривыми, по которым она построена: при $c = 0$, $b = 1 - a$ вектор $\mathbf{r}(a, 1 - a, 0) = q_3(a)$, при $a = 0$, $c = 1 - b$ вектор $\mathbf{r}(0, b, 1 - b) = q_1(b)$, при $b = 0$, $a = 1 - c$ вектор $\mathbf{r}(1 - c, 0, c) = q_2(c)$. Поверхность (11) является треугольным аналогом линейной поверхности Кунса (4).



Примеры использования треугольной поверхности на трёх кривых

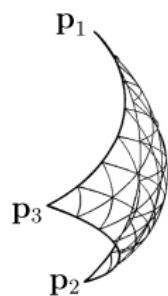


Рис.: Треугольная поверхность, построенная на трёх одинаковых дугах окружностей

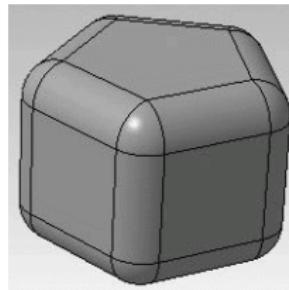
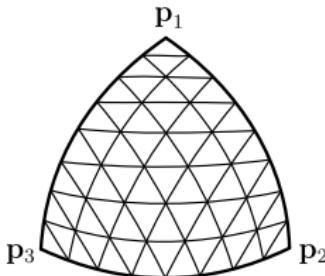
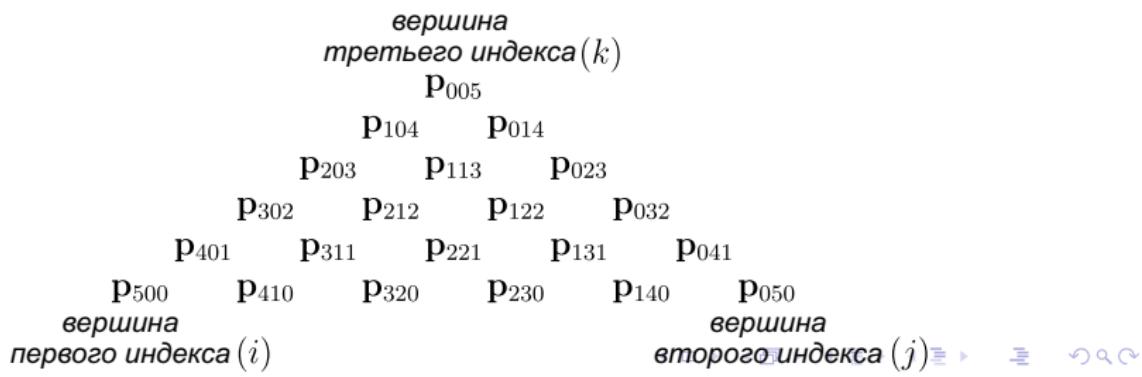


Рис.: Треугольная поверхность, построенная на трёх взаимно ортогональных дугах в четверть окружности, описывает часть сферической поверхности.

Треугольные поверхности Безье

Рассмотрим треугольные аналоги поверхности Безье. Пусть имеется совокупность некоторых контрольных точек p_{ijk} , образующих треугольную сетку. Точки расположены в виде треугольника, причём вдоль каждой стороны треугольника расположено одинаковое число точек. Пусть это число равно $n + 1$. Общее число контрольных точек равно $(n + 1)(n + 2)/2$. Каждый из трёх индексов точки соответствует своей вершине треугольника. Чем ближе ряд, в котором лежат точки, к вершине, тем большее значение имеет индекс этой вершины. Индексы точки p_{ijk} означают целочисленное расстояние от неё до соответствующей стороны треугольника, измеренное количеством отделяющих рядов. Сумма индексов характеристической точки имеет постоянное значение

$$i + j + k = n. \quad (12)$$



Треугольные поверхности Безье

Радиус-вектор треугольной поверхности Безье, построенной по контрольным точкам \mathbf{p}_{ijk} , описывается формулой

$$\mathbf{r}(a, b, c) = \sum_{\substack{i, j, k=0, \\ i+j+k=n}}^n B_{ijk}^n(a, b, c) \mathbf{p}_{ijk}, \quad (13)$$

где $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$ — барицентрические координаты для которых $a + b + c = 1$. Трёхиндексные функции Бернштейна имеют вид

$$B_{ijk}^n(a, b, c) = \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k. \quad (14)$$

Трёхиндексные функции Бернштейна удовлетворяют равенствам

$$\sum_{\substack{i, j, k=0, \\ i+j+k=n}}^n B_{ijk}^n(a, b, c) = 1. \quad (15)$$

Трёхиндексные функции Бернштейна удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$B_{ijk}^n = a B_{i-1jk}^{n-1} + b B_{ij-1k}^{n-1} + c B_{ijk-1}^{n-1}. \quad (16)$$

Начнём вычисление с функции $B_{000}^0(a, b, c) = 1$.

Далее получим $B_{100}^1(a, b, c) = a$, $B_{010}^1(a, b, c) = b$, $B_{001}^1(a, b, c) = c$.

Треугольные поверхности Безье

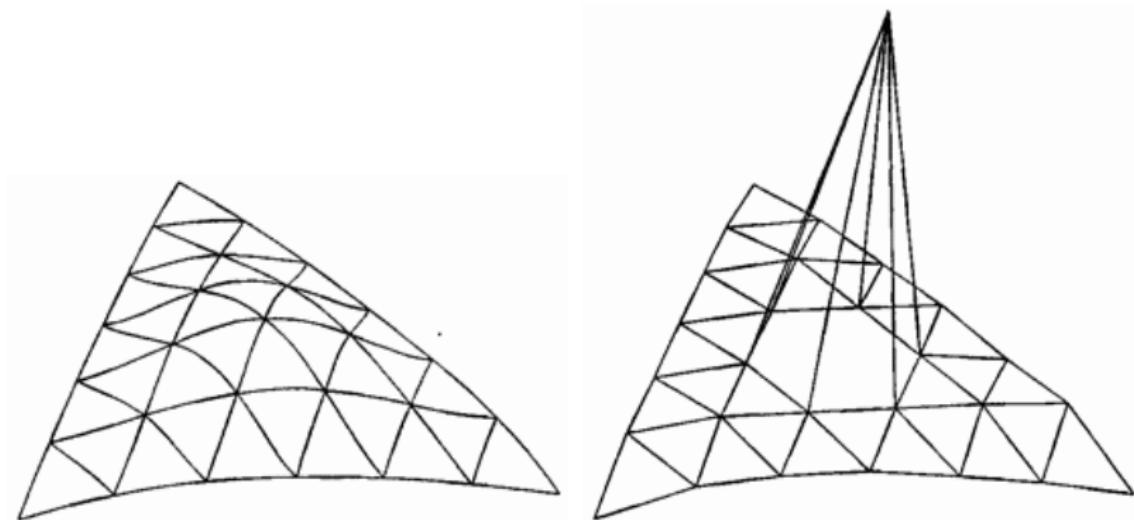


Рис.: Треугольная поверхность Безье, построенная по 7 точкам вдоль каждой стороны, и её характеристический многогранник

Треугольная рациональная поверхность Безье

Припишем каждой контрольной точке \mathbf{p}_{ijk} вес h_{ijk} и построим треугольную рациональную поверхность Безье

$$\mathbf{r}(a, b, c) = \frac{\sum_{\substack{i, j, k=0, \\ i+j+k=n}}^n B_{ijk}^n(a, b, c) h_{ijk} \mathbf{p}_{ijk}}{\sum_{\substack{i, j, k=0, \\ i+j+k=n}}^n B_{ijk}^n(a, b, c) h_{ijk}}, \quad (17)$$

где $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$, $a + b + c = 1$. Поверхность Безье (13) является частным случаем рациональной поверхности (17). Чем больше вес точки, тем ближе к ней проходит поверхность.

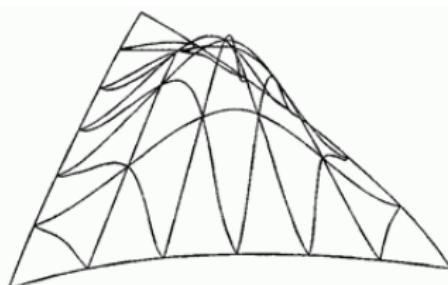


Рис.: Треугольная рациональная поверхность Безье с весом средней точки равным 5