

Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»

Лекция 4 «В-сплайны и В-сплайновые поверхности. NURBS-кривые»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

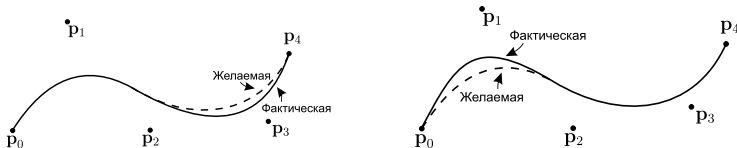


МГТУ им. Н.Э. Баумана

5 апреля 2023 г.

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *В-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, В-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, В-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома В-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, В-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является большая сложность В-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

В кривой Безье глобальное влияние каждой опорной точки p_i на всю кривую происходит из-за того, что каждая из функций B_i^n не равна нулю на всем интервале $(0;1)$. Если бы вместо функций Бернштейна выступали функции с локальными носителями, существенно меньшими, чем область определения параметра кривой t , то удалось бы локализовать влияние отдельной точки на всю кривую.



Поэтому поставим задачу следующим образом. Пусть даны контрольные точки $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$. Определим кривую $\mathbf{r}(t)$ по формуле

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n N_i(t) \mathbf{p}_i, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad (1)$$

где $N_i(t)$ — набор кусочно-полиномиальных функций, таких, что

1. $N_i(t) = 0$ при $t \notin [a_i, b_i] \subset [t_{\min}, t_{\max}]$;
2. $N_i(t)$ линейно независимы и образуют базис.
3. $\sum_{i=0}^n N_i(t) = 1$ для каждого $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$.

Последнее условие вводится для того, чтобы в случае совпадения всех контрольных точек кривая превращалась бы в ту же точку.

Решение поставленной задачи даётся В-кривыми (сокр. от базисные — basis). В-кривые обобщают кривые Безье.

Общее выражение для расчёта координат точек В-сплайна:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \mathbf{p}_i, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

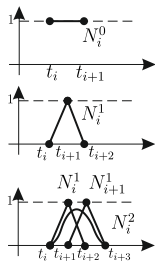
В 1972 г. Кокс (Cox) и де Бур (de Boor) предложили использовать функции N_i^k , определяемые рекурсивно:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad 0 \leq i < n + k + 1$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t).$$

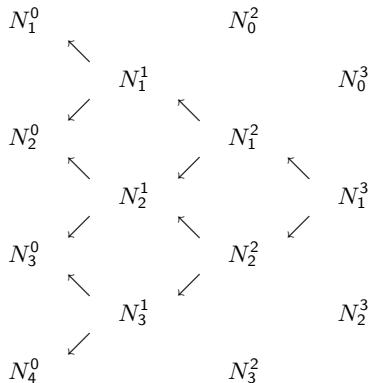
(2)

Функции N_i^k называют базисными функциями. Каждая точка t_i называется **узлом** (knot). Узлы определяют области, внутри которых функции сопряжения имеют ненулевые значения. Полный набор используемых узлов $\{t_0, \dots, t_{n+k+1}\}$ называется **вектором узлов** (knot vector). Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что $t_i \leq t_{i+1}$. В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны нулю, тогда говорят о кратности узлов.



Свойства базисных функций

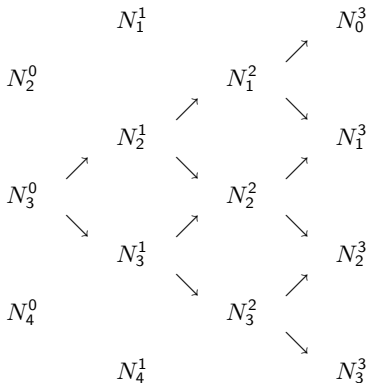
Свойство локальности: каждая базисная функция $N_i^k = 0$, если $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$.



N_1^3 — комбинация значений функций N_1^0, N_2^0, N_3^0 и N_4^0 . Таким образом, функции N_1^3 отличны от нуля только для значений $t \in [t_1, t_5)$.

Свойства базисных функций

В любом заданном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ могут быть отличны от нуля только $k + 1$ функций: N_{i-k}^k, \dots, N_i^k .



На интервале $[t_3, t_4)$ единственной функцией, отличной от нуля, является функция N_3^0 . Следовательно, единственные кубические функции, отличные от нуля на $[t_3, t_4)$ — это функции N_0^3, \dots, N_3^3 .

Алгоритм вычисления базисных функций В-сплайна

В силу последнего свойства, при вычислении базисных функций N^k в точке t , важно уметь находить индекс i в векторе узлов, при котором выполняется соотношение $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Отдельно стоит рассмотреть случай вычисления значения i при максимально возможном значении параметра $t = t_{n+1}$. В этом случае, параметр i следует принять равным n , т.е. расширить область $t \in [t_n, t_{n+1}]$ в которой функция $N_n^0 = 1$.

В общем случае для вычисления значения i можно использовать алгоритмы линейного или бинарного поиска.

Алгоритм вычисления базисных функций В-сплайна

Листинг алгоритма бинарного поиска индекса i :

```
/// \param [in] n,k,t,knot_vector
/// \return i
findSpan(n,k,t,knot_vector)
{
    if (t == knot_vector[n + 1])
        return n; /* Special case */

    /* Do binary search */
    low = k;    high = n + 1;
    mid = (low + high) / 2;
    while ((t < knot_vector[mid]) || (t >= knot_vector[mid + 1])) {
        if (t < knot_vector[mid])
            high = mid;
        else
            low = mid;
        mid = (low + high) / 2;
    }

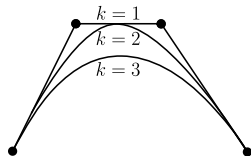
    return mid;
}
```


Алгоритм вычисления базисных функций В-сплайна

Приведем листинг алгоритма для вычисления ненулевых базисных функций N_{i-k}^k, \dots, N_i^k :

```
/// \param [in] i,t,k,knot_vector
/// \param [out] N (массив базисных функций, нумерация с нуля!)
basisFunc(i,t,k,knot_vector,N)
{
    N[0] = 1.0;
    for (j = 1; j <= k; j++) {
        left[j] = t - knot_vector[i + 1 - j];
        right[j] = knot_vector[i + j] - t;
        saved = 0.0;
        for (r = 0; r < j; r++) {
            temp = N[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
            N[r] = saved + right[r+1]*temp;
            saved = left[j-r]*temp;
        }
        N[j] = saved;
    }
}
```

- ▶ Полиномиальная кривая имеет степень k и непрерывность C^{k-1} .
- ▶ Диапазон параметра t делится на $n + k + 1$ подынтервалов $n + k + 2$ значениями, заданными в векторе узлов.
- ▶ Если значения узлов обозначить $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+k+1}\}$, получающийся В-сплайн определяется только в промежутке $[t_k, t_{n+1})$, т.к. только в этом промежутке $\sum_{i=0}^n N_i^k(t) = 1$.
- ▶ Каждый участок сплайна определяется $k + 1$ контрольными точками.
- ▶ Локальная коррекция: любая контрольная точка \mathbf{p}_i может влиять на форму кривой $\mathbf{r}(t)$ только на интервале $[t_i, t_{i+k+1})$.
- ▶ При движении вдоль кривой, функции $N_i^k(t)$ действуют подобно переключателям. Когда t проходит мимо узла t_{i+k+1} в векторе узлов, функция N_i^k (и, соответственно, точка \mathbf{p}_i) выключаются, поскольку становится равной нулю, и включаются следующие.
- ▶ Чем меньше степень кривой, тем ближе она подходит к контрольным точкам. Кривые высоких порядков более гладкие.



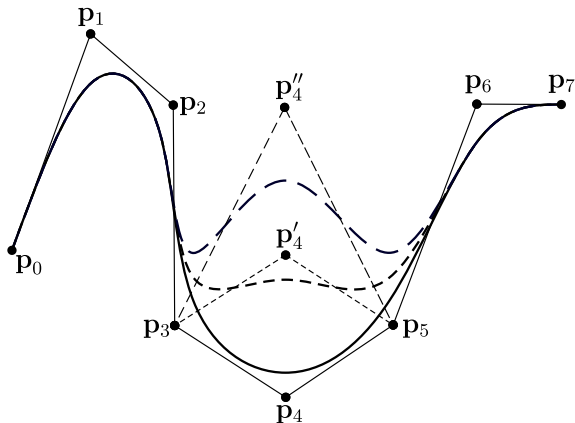
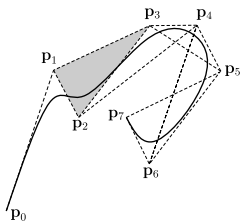


Рис.: Локальная коррекция В-сплайна.

Помимо локального контроля В-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

- ▶ Кривые на базе В-сплайнов аффинно инвариантны. Для преобразования В-сплайн кривой мы просто преобразуем каждую контрольную точку и генерируем новую кривую.
- ▶ В-сплайн кривая является выпуклой комбинацией своих контрольных точек и поэтому лежит внутри их выпуклой оболочки. Возможно более сильное утверждение: при любом значении $t \in [t_k, t_{n+1}]$ только $k + 1$ функций В-сплайна «активны» (то есть отличны от нуля). В этом случае кривая должна лежать внутри выпуклой оболочки не более $k + 1$ последовательных активных контрольных точек.
- ▶ В-сплайн кривые обеспечивают линейную точность: если $k + 1$ последовательных контрольных точек коллинеарны, то их выпуклая оболочка будет прямой линией, и кривая будет захвачена внутрь её.
- ▶ В-сплайн кривые уменьшают колебания: В-сплайн кривая не пересекает никакую линию чаще, чем её контрольный полигон.



Выпуклые оболочки для
квадратичной В-сплайн кривой

Аналогично случаю вычисления производной от кривой Безье, производная В-сплайна записывается через уравнение В-сплайна, порядок которого на единицу меньше исходного. Если параметр t лежит между узловыми значениями t_l и t_{l+1} , то производная от В-сплайна имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_{i=l-k+1}^l N_i^{k-1}(t) \mathbf{p}_i^1, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{p}_i^1 = k \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+k} - t_i}. \quad (4)$$

Правая часть уравнения (3) имеет форму уравнения В-сплайна, поэтому можно предполагать, что производные более высоких порядков могут быть получены рекурсивным применением формулы (3). Так, производная порядка m от В-сплайна имеет вид:

$$\frac{d^m \mathbf{r}(t)}{dt^m} = \sum_{i=l-k+m}^l N_i^{k-m}(t) \mathbf{p}_i^m, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{p}_i^m = (k - m + 1) \frac{\mathbf{p}_i^{m-1} - \mathbf{p}_{i-1}^{m-1}}{t_{i+k+1-m} - t_i}. \quad (6)$$

Равномерные периодические В-сплайны

Разные методы задания узловых значений позволяют получить разные функции сопряжения и, соответственно, разные кривые. Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* В-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:

$$\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}.$$

Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:

$$\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}.$$

Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Равномерные В-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции. Следовательно, для заданных значений n и k все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_i^k(t) = N_{i+1}^k(t + \Delta t) = N_{i+2}^k(t + 2\Delta t), \quad (7)$$

где Δt — интервал между соседними значениями узлов.

Пример. Равномерные квадратичные В-сплайны

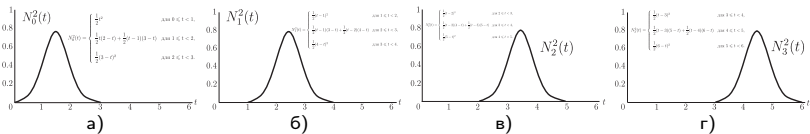


Рис.: Периодические стыковочные функции равномерного В-сплайна

Проиллюстрируем стыковочные функции В-сплайнов для равномерного целого вектора узлов при $k + 1 = n = 3$. Вектор узлов должен содержать $n + k + 2 = 7$ значений узлов: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Каждая из четырёх стыковочных функций захватывает $k + 1 = 3$ подынтервалов. Используя рекуррентные формулы (2), получаем первую стыковочную функцию $N_0^2(t)$. Следующая функция N_1^2 получается с использованием соотношения (7) при подстановке $t - 1$ вместо t в N_0^2 и смещения начального положения t на 1 в сторону увеличения. Подобным образом, оставшиеся две периодические функции получают последовательным смещением N_1^2 вправо. Первая контрольная точка умножается на стыковочную функцию N_0^2 . Следовательно, изменение положения первой контрольной точки влияет только на форму кривой до $t = 3$. Аналогично последняя контрольная точка влияет на форму сплайновой кривой в интервале, где определена N_3^2 .

Пример. Равномерные квадратичные В-сплайны

Поскольку диапазон получающейся полиномиальной кривой принадлежит промежутку от $t_k = 2$ до $t_{n+1} = 4$, начальную и конечную позицию кривой можно определить, вычислив стыковочные функции в этих точках:

$$\mathbf{r}(2) = 0.5(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1), \quad \mathbf{r}(4) = 0.5(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

Т.о., кривая начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними.

Вычисляя производные стыковочных функций, получаем:

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{r}'(4) = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2.$$

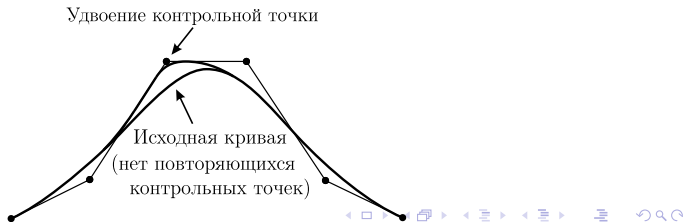
Параметрическая касательная кривой в начале параллельна линии, соединяющей первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки.



Рис.: Квадратный периодический В-сплайн, построенный по четырём контрольным точкам на плоскости xy . Кривая проходит через середины ребер контрольного полигона

Равномерные периодические В-сплайны

В предыдущем примере было отмечено, что квадратичная кривая начинается между первыми двумя и заканчивается между двумя последними контрольными точками. Полученный результат справедлив для квадратичных периодических В-сплайнов, подобранных по любому числу различных контрольных точек. Вообще, для полиномов высокого порядка начальная и конечная точки являются взвешенным средним k контрольных точек. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз. При задании кратности k выпуклые оболочки, окружающие эту точку состоят из ребер контрольного полигона, поэтому кривая «захватывается» этим ребром на протяжении одного диапазона полиномов. Аналогичного действия можно добиться, увеличивая кратность значения в векторе узлов. Однако это приводит к уменьшению непрерывности на 1 при каждом повторе узлового значения.



Открытые равномерные В-сплайны

Данный класс В-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными В-сплайнами. Иногда он считается частным случаем равномерного В-сплайна, а иногда он относится к неравномерным В-сплайнам. Для *открытых равномерных* В-сплайнов, или просто *открытых* В-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются $k + 1$ раз. Примеры открытых равномерных целочисленных вектора узлов:

$$\begin{aligned} \{0, 0, 1, 2, 3, 3\} & \quad \text{для } k = 1 \text{ и } n = 3, \\ \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\} & \quad \text{для } k = 3 \text{ и } n = 4. \end{aligned}$$

Данные векторы можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \{0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1\} & \quad \text{для } k = 1 \text{ и } n = 3, \\ \{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\} & \quad \text{для } k = 3 \text{ и } n = 4. \end{aligned}$$

Для любых значений параметров k и n открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq i \leq k, \\ i - k & \text{для } k + 1 \leq i \leq n, \\ n - k + 1 & \text{для } n < i \leq n + k + 1. \end{cases}$$

При этом первым $k + 1$ узлам присваивается значение 0, а последние $k + 1$ узлов имеют значение $n - k + 1$.

Открытые равномерные В-сплайны

Открытые равномерные В-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. При $n = k$ открытые В-сплайны совпадают со сплайнами Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Это означает, что

$$N_i^k(t) = B_i^n(t),$$

где $i = 0, \dots, n$.

Например, при кубическом открытом В-сплайне ($k = 3$) и четырёх контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого В-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

Неравномерные В-сплайны

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. Для *неравномерных* В-сплайнов можно выбирать несколько одинаковых внутренних значений узлов и неравномерное размещение значений узлов. Например, внутренние значения могут быть пропорциональны длинам ребер между вершинами многоугольника:

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq i \leq k, \\ \left(\frac{\left(\frac{i-k}{n-k+1} \right) c_{i-k+1} + \sum_{j=1}^{i-k} c_j}{\sum_{j=1}^n c_j} \right) (n-k+1) & \text{для } k+1 \leq i \leq n, \\ n-k+1 & \text{для } n < i \leq n+k+1, \end{cases}$$

где $c_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$.

Неравномерные В-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным В-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить её форму при помощи дополнительных контрольных точек.

Объединение кривых Безье в один В-сплайн

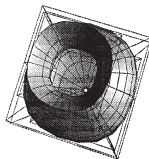
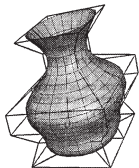
Рассмотрим проблему объединения двух или более кривых Безье в один В-сплайн. Пусть имеется две кривые Безье второй степени $r_0(t)$ и $r_1(t)$, определённые с помощью контрольных точек p_0, p_1, p_2 и p'_0, p'_1, p'_2 . Требуется объединить эти кривые в одну кривую $r(t)$, которая состоит из $r_0(t)$, за которой следует $r_1(t)$. То есть $r(t) = r_0(t)$ для $0 \leq t \leq 1$ и $r(t) = r_1(t)$ для $1 \leq t \leq 2$. Это можно сделать с помощью квадратичного В-сплайна $r(t)$ с узловым вектором $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и с шестью контрольными точками $p_0, p_1, p_2, p'_0, p'_1, p'_2$. Обычно две кривые Безье образуют единую непрерывную кривую, то есть $p_2 = p'_0$. В этом случае $r(t)$ совпадает с В-сплайном, у которого вектор узлов равен $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и который строится по пяти контрольным точкам $p_0, p_1, p_2, p'_1, p'_2$.

Это правило можно обобщить. Если есть три кривые Безье второй степени, которые образуют одну непрерывную кривую, то они эквивалентны квадратичному В-сплайну с вектором узлов $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$. Аналогичным образом можно построить В-сплайн по любому числу квадратичных кривых Безье, непрерывно стыкующихся между собой.

Формулировка В-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию В-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных В-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v), \quad (8)$$

где \mathbf{p}_{ij} задают положения $(n + 1)$ на $(m + 1)$ контрольных точек. Поверхность можно построить по выбранным значениям степеней полиномов k и l . Для каждого параметра u и v также выбираются значения векторов узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций. В-сплайновые поверхности имеют почти все те же свойства, что и составляющие их В-сплайны.



На рисунке показан другой вид, откуда становится ясно, что данная поверхность не является поверхностью вращения.

Достаточно часто возникает необходимость вычисления производных В-сплайновой поверхности:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}.$$

Продифференцируем выражение (8) по u и v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} &= \sum_{j=0}^m \frac{d}{du} \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{i,j} N_i^k(u) \right) N_j^l(v), \\ \frac{\partial \mathbf{r}(t, v)}{\partial \tau} &= \sum_{i=0}^n \frac{d}{dv} \left(\sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} N_j^l(v) \right) N_i^k(u), \end{aligned}$$

Производную В-сплайна можно вычислить по формуле (3).

Аналогично случаю рациональных кривых Безье, контрольные точки рационального В-сплайна указываются с использованием однородных координат. Функции сопряжения применяются именно к этим однородным координатам. Координаты точки рационального В-сплайна в однородном пространстве получаются по формулам:

$$x \cdot h = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) (h_i \cdot x_i); \quad (9)$$

$$y \cdot h = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) (h_i \cdot y_i); \quad (10)$$

$$z \cdot h = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) (h_i \cdot z_i); \quad (11)$$

$$h = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) h_i. \quad (12)$$

Уравнение рационального В-сплайна

Координаты точки в трёхмерном пространстве x , y и z получаются делением xh , yh и zh на h , поэтому уравнение рационального В-сплайна в векторном виде может быть записано следующим образом (поделим (9), (10) и (11) на (12)):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^n h_i N_i^k(t)} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i R_i^k(t), \quad (13)$$

где

$$R_i^k(t) = \frac{h_i N_i^k(t)}{\sum_{j=0}^n h_j N_j^k(t)}$$

— базисные функции рационального В-сплайна.

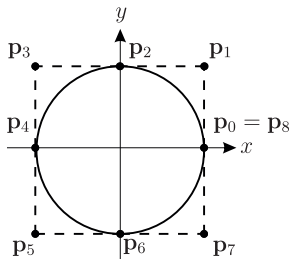
Если всем весовым коэффициентам будут присвоены одинаковые ненулевые значения (например, 1), получим стандартный В-сплайн, поскольку в таком случае $R_i^k(t) \equiv N_i^k(t)$ для всех i .

Свойства рациональных В-сплайнов

Рациональные В-сплайны и их базисы это обобщение нерациональных В-сплайнов и базисов. При $h_i \geq 0$ для всех i они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних. В частности:

- ▶ каждая функция рационального базиса положительна или равна нулю для всех значений параметра, т.е. $R_i^k \geq 0$;
- ▶ $\sum_{i=0}^n R_i^k(t) \equiv 1$ для $t \in [t_k, t_{n+1}]$;
- ▶ при $k > 0$ каждая функция $R_i^k(t)$ имеет ровно один максимум;
- ▶ рациональный В-сплайн степени k имеет непрерывность C^{k-1} ;
- ▶ максимальная степень рационального В-сплайна равна количеству контрольных точек минус 1;
- ▶ рациональный В-сплайн обладает свойством уменьшения вариации;
- ▶ если $t \in [t_i, t_{i+1})$, то $\mathbf{r}(t)$ находится в пределах выпуклой оболочки, составленной из контрольных точек $\mathbf{p}_{i-k}, \dots, \mathbf{p}_i$;
- ▶ свойство локальности $R_i^k(t) = 0$ для $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$. Если $t \in [t_i, t_{i+1})$ только функции R_{i-k}^k, \dots, R_i^k являются ненулевыми;
- ▶ аффинная и перспективная инвариантность: применяемое к кривой преобразование можно свести к преобразованию только ее контрольных точек;
- ▶ свойство уменьшения вариации: прямая или плоскость пересекают сплайн не большее количество раз чем контрольный полигон сплайна.

Представление единичной окружности



С помощью рациональных квадратичных В-сплайнов можно сразу целиком построить окружность или какое-либо другое коническое сечение. Т.е. с их помощью можно сшить отдельные дуги, представляемые с помощью рациональных сплайнов Безье. Это возможно сделать множеством способов, например, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек, причём начальная и конечная вершины должны совпадать в одной из середин. Узловой вектор можно задать в следующем виде: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Обычно в пакетах графической разработки для построения рациональных В-сплайнов используются неравномерные представления вектора узлов. Данные сплайны называются «NURBS» (Nonuniform Rational B-splines — неравномерные рациональные В-сплайны). NURBS с 1983 г. являются стандартом IGES. IGES — это стандарт обмена проектной информацией между системами автоматизированного проектирования, а также между ними и системами автоматизированного производства. Рациональные В-сплайны реализованы аппаратно в некоторых графических рабочих станциях.

Распространим понятие NURBS-кривых на NURBS-поверхности, для чего используем декартово произведение:

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{ij} \mathbf{p}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}, \quad (14)$$

где \mathbf{p}_{ij} — векторы задающих точек с компонентами x_{ij} , y_{ij} и z_{ij} , а h_{ij} — однородные координаты задающих точек.

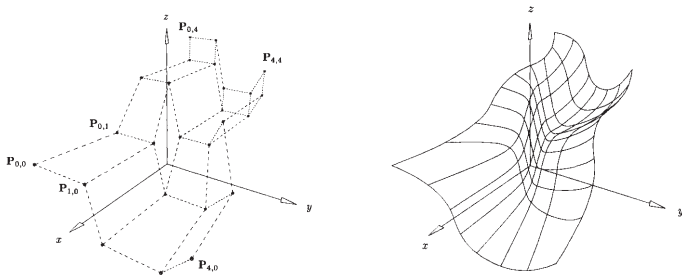


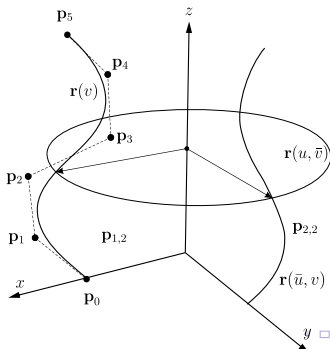
Рис.: Биквадратичная NURBS поверхность, $h_{11} = h_{12} = h_{21} = h_{22} = 10$, остальные веса равны 1. Узловой вектор: $\{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$

Благодаря общности и гибкости NURBS-поверхности стали пользоваться популярностью. Поскольку B-сплайны являются частным случаем NURBS-поверхностей (при $h_{i,j} = 1$), можно использовать единый алгоритм для создания обширного семейства поверхностей. NURBS поверхности обладают большинством свойств, присущих B-сплайновым поверхностям и NURBS-кривым. NURBS поверхности позволяют точно описывать квадратичные поверхности, такие как цилиндр, конус, сфера, параболоид и гиперболоид. Поэтому дизайнеру вместо инструментария, состоящего из большого числа различных алгоритмов для создания поверхностей, потребуется всего один метод.

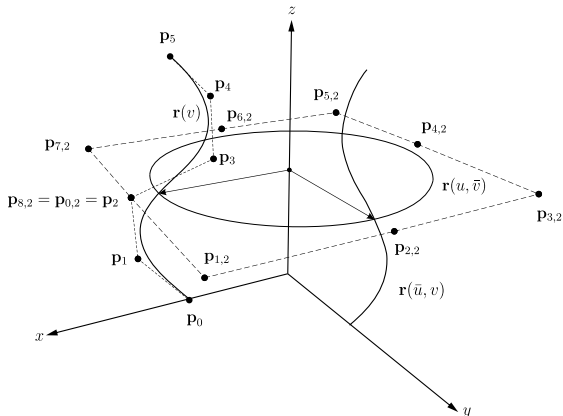
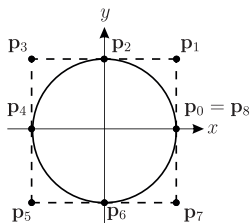
Построение поверхностей вращения

Пусть задана рациональная NURBS-кривая $\mathbf{r}(v) = \sum_{j=0}^m R_j^l(v) \mathbf{p}_j$ с вектором узлов $\{v_0, \dots, v_{n+l+1}\}$. Пусть эта кривая, называемая образующей, вращается вокруг некоторой оси. Рассмотрим случай, когда кривая $\mathbf{r}(v)$ лежит в плоскости xz и поворачивается на угол 360° вокруг оси z . Построим поверхность вращения $\mathbf{r}(u, v)$ со следующими свойствами:

- ▶ при фиксированном $u = \bar{u}$, $\mathbf{r}(\bar{u}, v)$ является кривой $\mathbf{r}(v)$, повернутой на некоторый угол вокруг оси z .
- ▶ при фиксированном $v = \bar{v}$, $\mathbf{r}(u, \bar{v})$ является окружностью в плоскости xy с центром на оси z .



Построение поверхностей вращения



Вспользуемся представлением окружности с помощью NURBS-кривой, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек с узловым вектором: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Тогда искомая поверхность будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^m h_{ij} \mathbf{p}_{ij} N_i^2(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^m h_{ij} N_i^2(u) N_j^l(v)}. \quad (15)$$

Контрольные точки и веса определяются следующим образом:

для $i = 0$: $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{0j} = \mathbf{p}_j$.

Поскольку $\mathbf{r}(u, v)$ является окружностью в плоскости xy , все точки \mathbf{p}_{ij} при фиксированном j и $0 \leq i \leq 8$ должны образовывать квадрат, лежащий в плоскости xy с центром на оси z , ширина которого определяется положением контрольной точки \mathbf{p}_j . Веса точек получаются с помощью произведений весов образующей кривой h_j и весов окружности h_i , т.е.:

$$h_{0,j} = h_j, h_{1,j} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h_j, h_{2,j} = h_j, h_{3,j} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)h_j, \dots, h_{8,j} = h_j.$$

По параметру u вектор узлов равен $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$, а по параметру v — $\{v_0, \dots, v_{n+l+1}\}$.