

# Домашнее задание №1 «Математические модели геометрических объектов»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,  
ауд.: 930а(УЛК)  
моб.: 8-910-461-70-04,  
email: azaharov@bmstu.ru

1 мая 2023 г.

## 1 Описание.

Во всех заданиях обязательно использование библиотеки **WebGL** для вывода графики. Результатом работы программ должен являться вывод заданного количества точек сплайна. Теория и формулы для построения сплайнов содержатся в лекциях.

По результатам выполнения домашнего задания необходимо написать отчёт и выслать его преподавателю. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Формулировку задания.
2. Основные формулы, которые использовались для выполнения задания.
3. Рисунки с результатами работы программы и кратким комментарием, что на них изображено.
4. Часть кода программы, в которой выполняются основные построения.

## 2 Задания

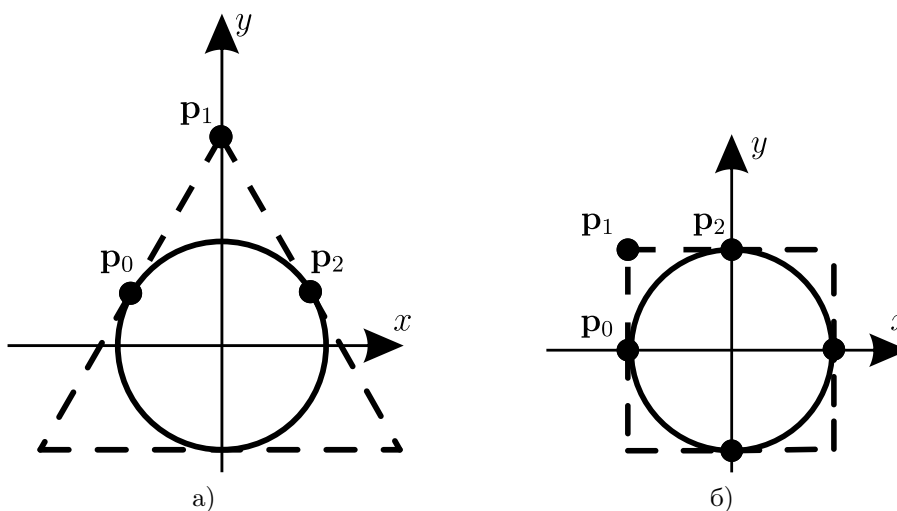


Рис. 1: Окружность, рассматриваемая как совокупность трёх или четырёх дуг

**Авилов:** Написать программу, визуализирующую две пересекающиеся параметрические поверхности.

Можно использовать программу `surfaceIntersection.zip` в разделе программ д.з. № 2, в которой нужно построить два линейных поверхностных сплайна как в л.р. № 2.

**Арефьева:** На рис 1а приведена окружность, вписанная в равносторонний треугольник. Одну треть этой окружности можно нарисовать с помощью рационального сплайна Безье на базе точек  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  и весов:  $h_0 = h_2 = 1$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}$ . Тогда окружность целиком может быть нарисована как совокупность трёх дуг, причём каждая из них базируется на трёх точках. Для заданного положения центра окружности и её радиуса рассчитайте координаты контрольных точек и нарисуйте эту окружность с помощью рациональных сплайнов Безье. Используйте программу `circle.zip`.

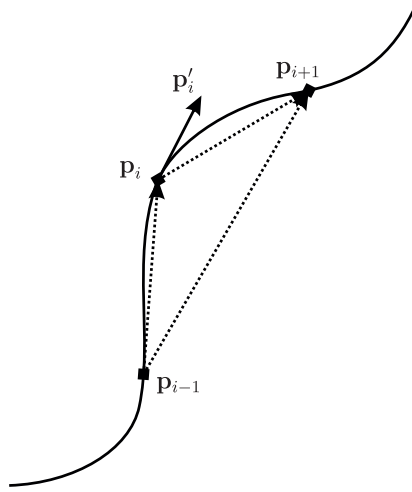


Рис. 2: Задание касательных векторов на основе значений соседних контрольных точек

**Бородин:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна на кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам:

$$\mathbf{p}'_i = s_{i+1} \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_i \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{s_i + s_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $s_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$ ,  $s_{i+1} = |\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$  — расстояния между соседними точками (рис. 2). А касательные вектора на краях сплайна получаются из условия, что в этих точках третьи производные радиус-вектора обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_0 &= 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}'_1, \\ \mathbf{p}'_n &= 2(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}) - \mathbf{p}'_{n-1}. \end{aligned}$$

Используйте программу л.р. № 1.

**Волков:** Напишите программу, выполняющую интерполяцию кубическими В-сплайнами с заданными производными на концах. Используйте программу `curve.zip` в которой выбирайте краевые условия первого типа.

**Давыдов:** Напишите программу построения естественного кубического сплайна кривой. Используйте краевые условия пятого типа и программу л.р. № 1.

**Дробот:** Напишите программу построения естественного кубического сплайна кривой. Используйте краевые условия первого типа и программу `curve.zip`.

**Каргополов:** Используя любой способ построения окружности с помощью NURBS-кривых, описанных в вариантах у студентов Зунг, Шон или Минь, создайте NURBS-поверхность усеченного конуса, ось которого параллельна одной из координатных осей. Координаты центра основания, радиусы и высота задаются как параметры в программе. На рис. 7 показан один из вариантов задания контрольных точек и характеристического многогранника для построения поверхности цилиндра. Для построения NURBS-поверхности, вдоль осевого направления усеченного конуса используйте В-сплайн первой степени и вектор узлов  $[0, 0, 1, 1]$ . Используйте программу л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

**Маркевич:** Написать программу, визуализирующую две пересекающиеся параметрические поверхности.

Можно использовать программу `surfaceIntersection.zip` в разделе программ д.з. № 2, в которой нужно построить два линейных поверхностных сплайна как в л.р. № 2.

**Михайлов:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам (рис. 2):

$$\mathbf{p}'_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

А касательные вектора на краях сплайна получаются из условия, что в этих точках третьи производные радиус-вектора обращаются в нуль:

$$\mathbf{p}'_0 = 2 \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{h_0} - \mathbf{p}'_1, \quad \mathbf{p}'_n = 2 \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{h_{n-1}} - \mathbf{p}'_{n-1}.$$

Используйте шаблон программы л.р. № 1.

**Насыбуллина:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам (рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_i = & \mathbf{p}_{i-1} \frac{t_i - t_{i+1}}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} + \mathbf{p}_i \frac{2t_i - t_{i-1} - t_{i+1}}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})} + \\ & + \mathbf{p}_{i+1} \frac{t_i - t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Производные на краях сплайна являются заданными величинами. Используйте программу `curve.zip` в которой выбирайте краевые условия первого типа.

**Натальина:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам (рис. 2):

$$\mathbf{p}'_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Производные на краях сплайна являются заданными величинами. Используйте программу `curve.zip` в которой выбирайте краевые условия первого типа.

**Овчинникова:** На рис 16 приведена окружность, вписанная в квадрат. Одну четверть этой окружности можно нарисовать с помощью рационального сплайна Безье на базе точек  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  и весов:  $h_0 = h_2 = 1$ ,  $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тогда окружность целиком может быть нарисована как совокупность четырёх дуг, причём каждая из них базируется на трёх точках. Для заданного положения центра окружности и её радиуса рассчитайте координаты контрольных точек и нарисуйте эту окружность с помощью рациональных сплайнов Безье. Используйте программу `circle.zip`.

**Парамонов:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам (рис. 2):

$$\mathbf{p}'_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

А касательные вектора на краях сплайна получаются из условия, что в этих точках вторые производные радиус-вектора обращаются в нуль:

$$\mathbf{p}'_0 = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{h_0} - \frac{1}{2} \mathbf{p}'_1, \quad \mathbf{p}'_n = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{1}{2} \mathbf{p}'_{n-1}.$$

Используйте шаблон программы л.р. № 1.

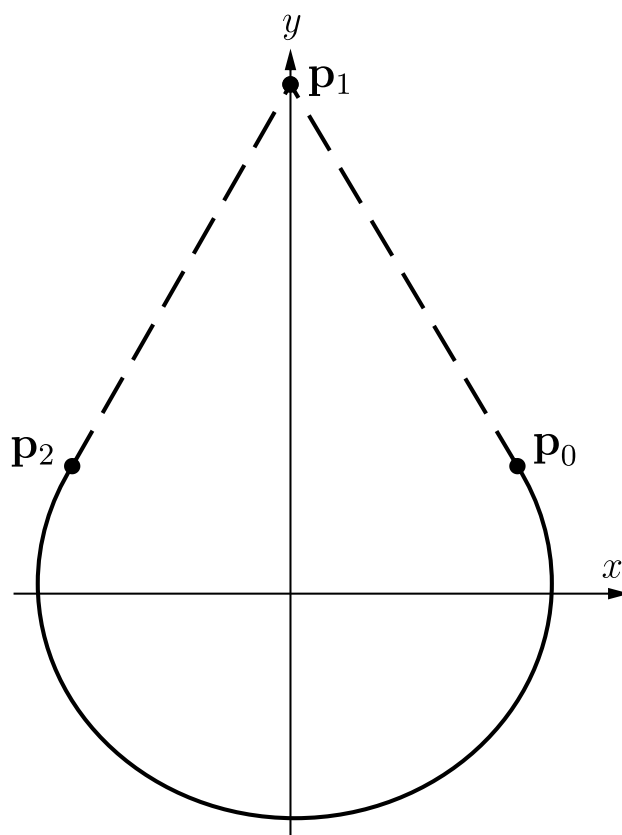


Рис. 3: Дуга единичной окружности размером  $240^\circ$ , построенная с помощью NURBS-кривой с отрицательным значением веса

**Пунегов:** Напишите программу для построения дуги единичной окружности размером  $240^\circ$  с помощью NURBS-кривой с центром в начале координат (рис. 3) на базе точек  $\mathbf{p}_0 = (a, \frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{p}_1 = (0, 2)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (-a, \frac{1}{2})$ , где  $a = \cos 30^\circ$ , и весов:  $h_0 = h_2 = 1$ ,  $h_1 = -\frac{1}{2}$ . Узловой вектор имеет следующий вид:  $\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ . Используйте программу `unitCircle.zip`.

**Сазонкин:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам:

$$\mathbf{p}'_i = s_i \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_{i+1} \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{s_i + s_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $s_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$ ,  $s_{i+1} = |\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$  — расстояния между соседними точками (рис. 2). Производные на краях сплайна являются заданными величинами. Используйте программу `curve.zip` в которой выбирайте краевые условия первого типа.

**Сорокина:** Напишите программу построения эрмитового кубического сплайна кривой для случая, когда касательные вектора во внутренних точках рассчитываются по формулам:

$$\mathbf{p}'_i = s_{i+1} \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_i \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i}{s_i + s_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $s_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$ ,  $s_{i+1} = |\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$  — расстояния между соседними точками (рис. 2). Производные на краях сплайна являются заданными величинами. Используйте программу `curve.zip` в которой выбирайте краевые условия первого типа.

**Степанов:** Напишите программу построения естественного кубического сплайна поверхности. Используйте краевые условия пятого типа и шаблон программы л.р. № 2.



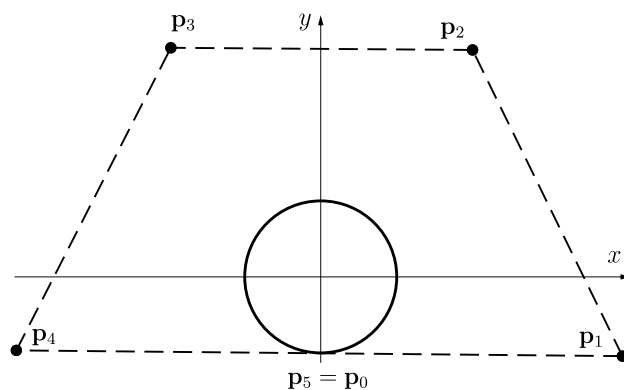


Рис. 4: Окружность, построенная с помощью рациональной кривой Безье

**Цисарь:** Напишите программу для построения единичной окружности с помощью рациональной кривой Безье с центром в начале координат (рис. 4) на базе точек  $\mathbf{p}_0 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{p}_1 = (4, -1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (2, 3)$ ,  $\mathbf{p}_3 = (-2, 3)$ ,  $\mathbf{p}_4 = (-4, -1)$ ,  $\mathbf{p}_5 = (0, -1)$  и весов:  $h_0 = h_5 = 5$ ,  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$ . Используйте программу `unitCircle.zip`.

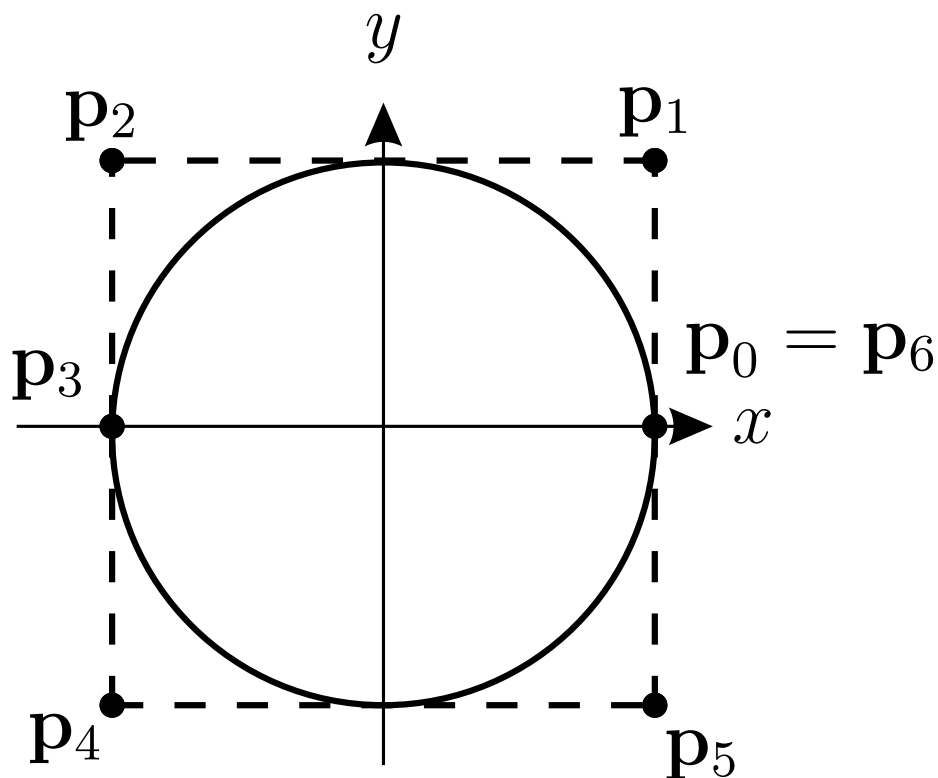


Рис. 5: NURBS-окружность, построенная на базе 7 контрольных точек, расположенных на границе описанного квадрата

**Зунг:** Напишите программу построения окружности с помощью NURBS-кривой на базе семи контрольных точек, лежащих на границе описанного квадрата (рис. 5). Узловой вектор имеет следующий вид:  $[0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4]$ . Контрольных точки имеют веса:  $h_0 = h_3 = h_6 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h_4 = h_5 = \frac{1}{2}$ . Используйте программу `circle.zip`.

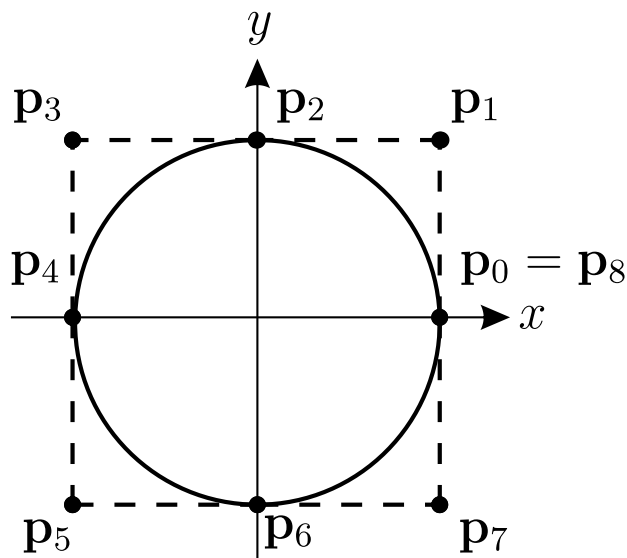


Рис. 6: NURBS-окружность, построенная на базе 9 контрольных точек, расположенных на границе описанного квадрата

**Шон:** Напишите программу для построения окружности с помощью NURBS-кривой на базе девяти контрольных точек, лежащих на границе описанного квадрата (рис. 6). Узловой вектор имеет следующий вид:  $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4\}$ . Веса контрольных точек равны  $h_i = 1$ , если  $i$  — чётное и  $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , если  $i$  — нечётное. Используйте программу `circle.zip`.

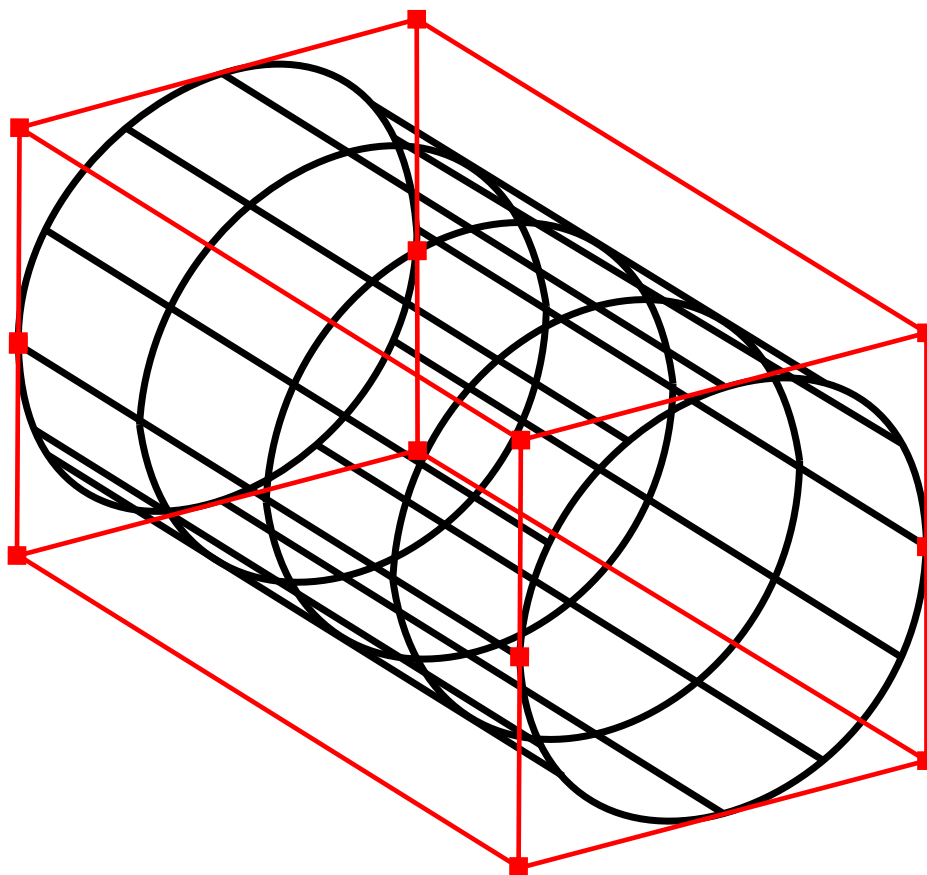


Рис. 7: Цилиндрическая NURBS-поверхность

**Тан:** Воспользовавшись любым способом построения окружности с помощью NURBS-кривых, описанных в вариантах у студентов Зунг, Шон или Минь, напишите программу построения NURBS-поверхности цилиндра, ось которого параллельна одной из координатных осей. Координаты центра основания, радиус и высота цилиндра должны задаваться как параметры в программе. На рис. 7 показан один из вариантов задания контрольных точек и контрольного полиэдра для построения этой поверхности. Для построения этой NURBS-поверхности, вдоль осевого направления цилиндра используйте В-сплайн первой степени и вектор узлов  $[0, 0, 1, 1]$ . Воспользуйтесь программой л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

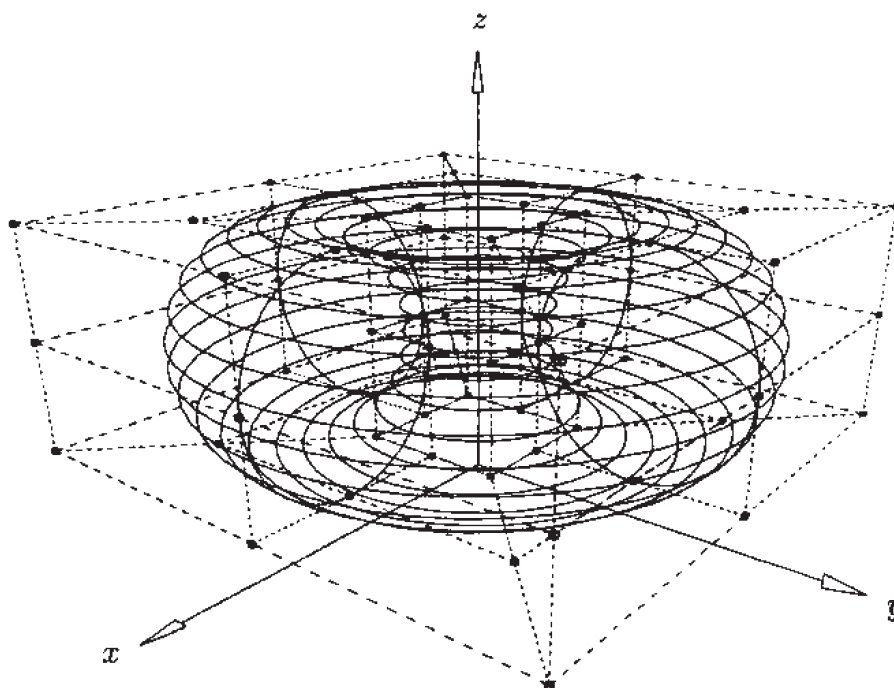


Рис. 8: Тороидальная NURBS-поверхность

**Вьет:** Используя любой из способов построения окружности с помощью NURBS-кривых, описанных в вариантах у студентов Зунг, Шон или Минь, напишите программу построения NURBS-поверхности тора, ось вращения которого параллельна одной из координатных осей и сечение которого имеет заданный радиус. На рис. 8 показан один из вариантов задания контрольных точек и контрольного полиэдра для построения этой поверхности. Используйте программу л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

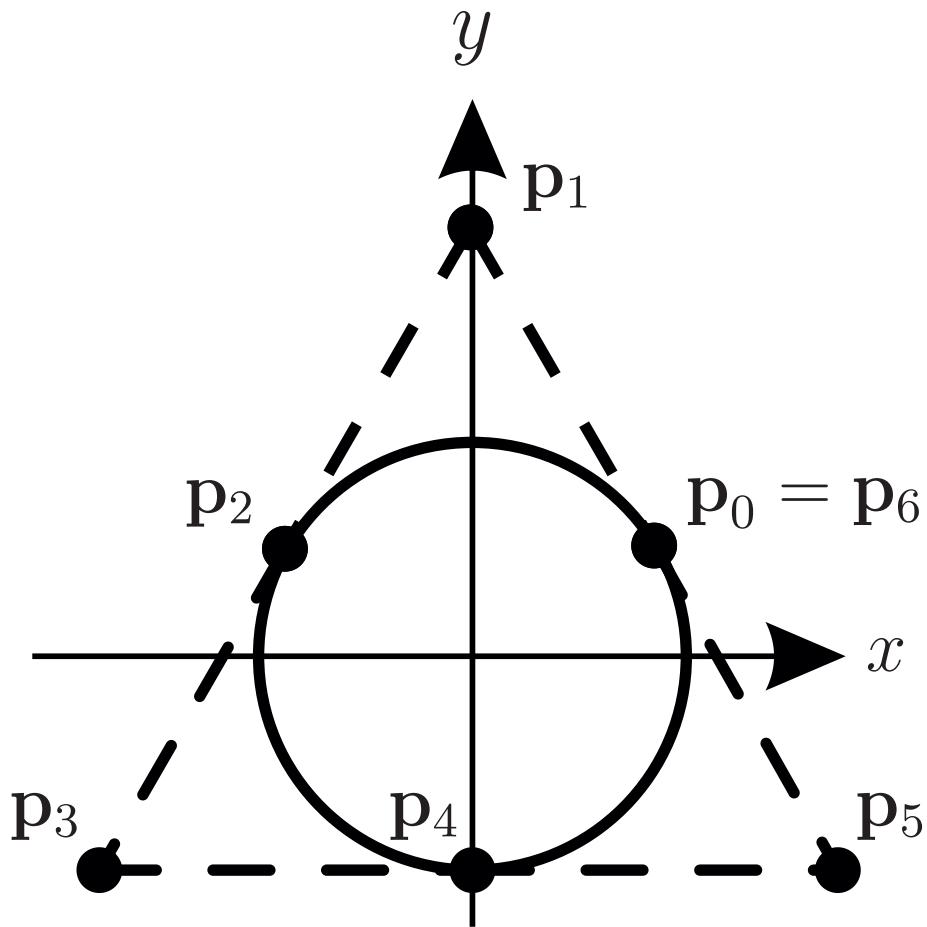


Рис. 9: NURBS-окружность, построенная на базе 7 контрольных точек, расположенных на границе описанного треугольника

**Минь:** Напишите программу для построения окружности с помощью NURBS-кривой на базе семи контрольных точек, лежащих на границе описанного треугольника (рис. 9). Узловой вектор имеет следующий вид:  $[0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3]$ . Веса контрольных точек  $h_i = 1$ , если  $i$  — чётное и  $h_i = \frac{1}{2}$ , если  $i$  — нечётное. Используйте программу `circle.zip`.