

Модуль 1 «Математические модели геометрических  
объектов»  
Лекция 3 «Сплайновые кривые и поверхности Безье.  
Рациональные сплайны»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,  
ауд.:930а(УЛК)  
моб.: 8-910-461-70-04,  
email: azaharov@bmstu.ru

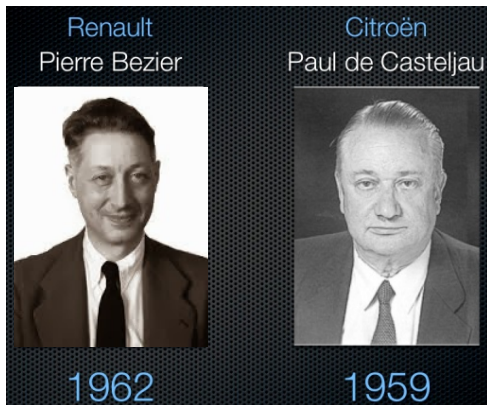


МГТУ им. Н.Э. Баумана

29 марта 2023 г.

# Сплайновые кривые Безье

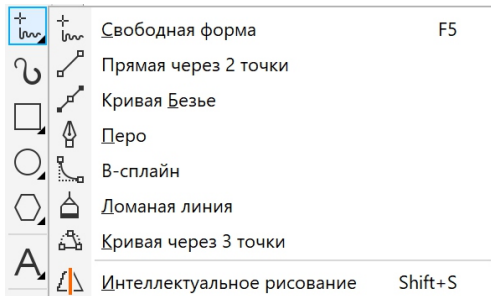
Данный метод аппроксимации сплайнами был разработан французским математиком и физиком Полем де Фаже де Кастельжо (Paul de Faget de Casteljau) и запатентован французским инженером Пьером Безье (Pierre Bézier) в 1962 году. Эти кривые были включены в качестве составных частей в системе поверхностного моделирования UNISURF для совершенствования дизайна автомобильных кузовов.



# Сплайновые кривые Безье

*Кривые Безье (Bezier curve)* имеют ряд свойств, делающих их крайне полезными и удобными при разработке кривых и поверхностей. Кроме того, их также легко реализовать. По этим причинам сплайны Безье широко используются в различных системах автоматизированного проектирования, в универсальных графических пакетах и пакетах рисования и живописи.

Участок кривой Безье можно подобрать по любому числу контрольных точек, хотя в некоторых графических пакетах число контрольных точек ограничено четырьмя. Степень кривой Безье определяется числом контрольных точек.



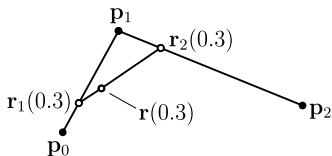
# Создание параболы с помощью линейной интерполяции по трем точкам

В алгоритме де Кастельжо для вычисления точки квадратичного сплайна  $r(t)$  используются три точки:  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ . Выберем некоторое значение параметра  $0 \leq t \leq 1$ , например  $t = 0.3$ , после чего определим местонахождение точки  $r_1(t)$ , находящейся на  $t$ -й части пути вдоль прямой, соединяющей точки  $p_0$  и  $p_1$ . Подобным же образом определим точку  $r_2(t)$  на  $t$ -й части пути между конечными точками  $p_1$  и  $p_2$  (при том же самом  $t$ ). Эти новые точки определяются выражениями:

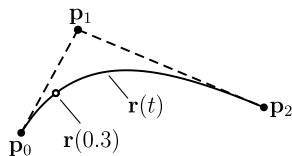
$$\begin{aligned} r_1(t) &= (1 - t)p_0 + tp_1; \\ r_2(t) &= (1 - t)p_1 + tp_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Повторим для вновь полученных точек процесс линейной интерполяции (вновь при том же самом значении  $t$ ): найдем точку  $r(t)$ , лежащую на  $t$ -й части пути между точками  $r_1(t)$  и  $r_2(t)$ :

$$r(t) = (1 - t)r_1(t) + tr_2(t). \quad (2)$$



a)



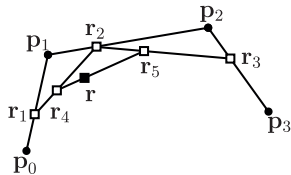
После непосредственной подстановки уравнения (1) в уравнение (2) получим:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)^2 \mathbf{p}_0 + 2t(1 - t) \mathbf{p}_1 + t^2 \mathbf{p}_2. \quad (3)$$

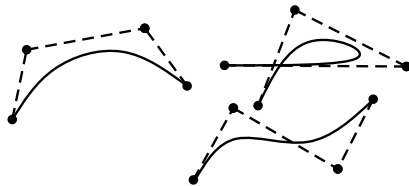
Параметрическая форма кривой  $\mathbf{r}(t)$  является квадратичной относительно  $t$ , то есть эта кривая является параболой. Очевидно, что эта кривая проходит через точку  $\mathbf{p}_0$  при  $t = 0$  и через точку  $\mathbf{p}_2$  при  $t = 1$ .

# Кубические кривые Безье

Многие графические пакеты предлагают только функции отображения кубических сплайнов. Это даёт разумную гибкость проектирования, не требуя увеличения расчётов, необходимых при использовании полиномов более высоких порядков. Кубические кривые Безье определяются четырьмя контрольными точками  $p_0, p_1, p_2, p_3$ . Для фиксированного значения  $t$  точка  $r_1$  помещается на  $t$ -й части пути между точками  $p_0$  и  $p_1$ ; таким же образом размещаются точки  $r_2$  и  $r_3$ . Затем точка  $r_4$  помещается на  $t$ -й части пути от точки  $r_1$  до точки  $r_2$ , и аналогично, точка  $r_5$ . Наконец, искомая точка  $r$  ляжет на  $t$ -й части пути от точки  $r_4$  до точки  $r_5$ . Если это проделать для каждого значения  $0 \leq t \leq 1$ , то будет сформирована кривая Безье  $r(t)$ , которая стартует в точке  $p_0$ , «притягивается» к точкам  $p_1$  и  $p_2$  и финиширует в точке  $p_3$ .



в)



г)

Рис.: Кривая Безье на базе четырёх точек

# Кубические кривые Безье

Четырёхточечная кривая Безье имеет следующий параметрический вид:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0(1-t)^3 + \mathbf{p}_1 3t(1-t)^2 + \mathbf{p}_2 t^2 3(1-t) + \mathbf{p}_3 t^3, \quad (4)$$

и является кубическим полиномом относительно  $t$ .

Стыковочные функции для кубических кривых Безье имеют вид

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3.$$

Их легко запомнить, поскольку они совпадают с членами разложения выражения  $[(1-t) + t]^3$ , полученными после приведения подобных членов:

$$((1-t) + t)^3 = (1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3.$$

Из этого равенства непосредственно следует важное свойство этих полиномов: *при любом  $t$  их сумма равна единице*:

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(t) = 1. \quad (5)$$

В конечных точках первые производные по параметру кубической кривой Безье равны

$$\mathbf{r}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2).$$

Вторые производные по параметру равны

$$\mathbf{r}''(0) = 6(\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{r}''(1) = 6(\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

# Кубические кривые Безье

Форма стыковочных функций определяет, как контрольные точки влияют на форму кривой при  $0 \leq t \leq 1$ . При  $t = 0$  единственной отличной от нуля стыковочной функцией является  $B_0^3(t) = 1$ . При  $t = 1$  единственной ненулевой функцией является  $B_3^3(t) = 1$ . Т.о., кубическая кривая Безье всегда начинается в контрольной точке  $\mathbf{p}_0$  и заканчивается в контрольной точке  $\mathbf{p}_3$ . Другие функции,  $B_1^3$  и  $B_2^3$ , влияют на форму кривой в промежуточных значениях параметра  $t$ , так что получающаяся кривая притягивается к точкам  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Стыковочная функция  $B_1^3$  имеет максимум при  $t = 1/3$ ,  $B_2^3$  достигает максимума при  $t = 2/3$ .

Все четыре стыковочные функции не равны нулю во всем диапазоне изменения параметра  $t$  между контрольными точками. Т.о., кривые Безье не допускают *локального контроля* за формой кривой. Если переместить любую из контрольных точек, изменится вся кривая.

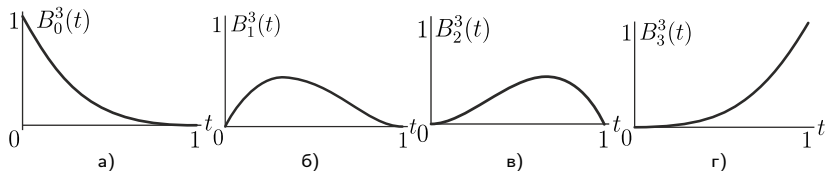


Рис.: Четыре стыковочные функции Безье для кубических кривых



Рассмотрим теперь общий случай  $n + 1$  контрольных точек, положения которых обозначим через  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , где  $i$  меняется от 0 до  $n$ . Данные точки собираются в вектор положений  $\mathbf{r}(t)$ , который описывает путь аппроксимирующей полиномиальной функции Безье между  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_n$ .

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad \mathbf{r}\left(\frac{t - t_0}{t_n - t_0}\right), \quad t_0 \leq t \leq t_n. \quad (6)$$

Стыковочные функции Безье  $B_i^n(t)$  являются *полиномами Бернштейна* (*Bernstein polynomials*)

$$B_i^n(t) = C_n^i t^i (1 - t)^{n-i}, \quad (7)$$

где параметры  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  — это биномиальные коэффициенты.

Для получения последовательных значений биномиальных коэффициентов можно использовать рекурсивные вычисления:

$$C_n^i = \frac{n - i + 1}{i} C_n^{i-1}$$

при  $i \leq n$ . Кроме того, стыковочная функция Безье удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

где  $B_0^0(t) = 1$ ,  $B_i^n(t) \equiv 0$ , если  $i < 0$  или  $i > n$ .

Часто приходится вычислять не только значения координат точек, лежащих на кривой, но и значения первой производной, а также и производных более высокого порядка. Например, производные первого и второго порядка могут потребоваться для определения кривизны кривой. Производная первого порядка необходима также для вычисления точки пересечения кривых по итерационному методу Ньютона—Рафсона. Несложно показать, что выражение для производной кривой Безье имеет следующий вид

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-i-1} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i). \quad (8)$$

Заменяв  $\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$  на  $\mathbf{a}_i$  выразим формулу (8) в виде

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \mathbf{a}_i. \quad (9)$$

Правая часть формулы (9), если забыть о множителе  $n$ , стоящем перед знаком суммирования, представляет собой уравнение кривой Безье, заданной точками  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ .

Формула (9) может использоваться для рекурсивного определения производных более высоких порядков, поскольку её правая часть совпадает по форме с уравнением кривой Безье. Отсюда выражение для второй производной имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \mathbf{b}_i, \quad (10)$$

где  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i$ .

Продолжая дифференцировать уравнение (10), мы будем тем же путём получать уравнения для производных более высоких порядков. Таким образом, мы можем показать, что производные порядка  $l$  в начальной и конечной точках определяются положением первых (или последних)  $l+1$  задающих точек. Это свойство очень удобно при соединении двух кривых Безье, если требуется удовлетворить требованию непрерывности высших производных в точке соединения.

## Свойства кривых Безье: интерполяция в конечных точках

Кривая Безье  $\mathbf{r}(t)$  на базе контрольных точек  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  в общем случае не проходит через все свои контрольные точки; иначе говоря, не интерполирует их. Однако, легко показать, что она всегда проходит через первую и последнюю точки  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_n$ :

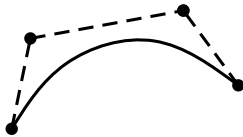
$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_n. \quad (11)$$

Благодаря этому свойству дизайнер, вводя последовательность точек, в точности знает, где кривая Безье будет начинаться и где заканчиваться. Касательная в начале кривой параллельна линии, соединяющей первые две контрольные точки, а касательная в конце кривой идет по линии, соединяющей последние две точки:

$$\mathbf{r}'(0) = n(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}). \quad (12)$$

Вторые производные кривых Безье по параметру в конечных точках равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(0) &= n(n-1)[(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)], \\ \mathbf{r}''(1) &= n(n-1)[(\mathbf{p}_{n-2} - \mathbf{p}_{n-1}) - (\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

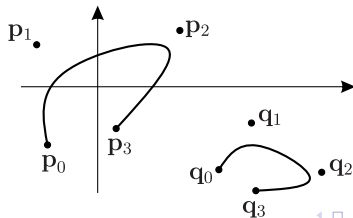


## Свойства кривых Безье: аффинная инвариантность

Предположим, что мы хотим преобразовать точку  $\mathbf{r}(t)$  на кривой Безье, заданную уравнением (6), в новую точку  $\mathbf{q}(t)$ , используя аффинное преобразование  $\mathbf{T}$  (представленное матрицей  $3 \times 3$  в двумерном случае и матрицей  $4 \times 4$  — в трёхмерном). Тогда  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}(t)$ . Для определения точки  $\mathbf{q}(t)$  требуется преобразовать только контрольные точки (всего один раз) и затем использовать эти контрольные точки в той же самой форме Бернштейна, чтобы получить преобразованную кривую Безье для любого значения  $t$ ! Это значит, что

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^n (\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_i) B_i^n(t). \quad (14)$$

Аффинная инвариантность означает, что преобразованная кривая идентична кривой, построенной на базе преобразованных контрольных точек.

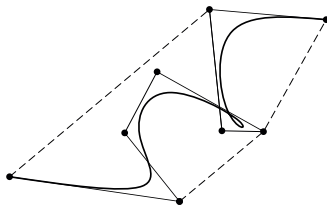


## Свойства кривых Безье: свойство выпуклой оболочки

Ещё одно важное свойство кривой Безье заключается в том, что вся она лежит внутри выпуклой оболочки, сформированной контрольными точками. Это следует из того факта, что все стыковочные функции Безье положительны, и их сумма всегда равна 1:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1,$$

т.е. любая точка кривой является взвешенной суммой контрольных точек. Свойство выпуклой оболочки также непосредственно следует из того факта, что каждая точка на кривой является результатом линейной интерполяции двух точек, которая образует их линейную комбинацию.



**Рис.:** Хотя восемь контрольных точек образуют самопересекающийся контрольный полигон, кривая Безье будет плавно проходить между двумя концевыми точками, никогда не выходя за пределы выпуклой оболочки.

## Свойства кривых Безье: свойство невозрастания колебаний

Кривые Безье не могут «колебаться» больше, чем это делает их контрольный полигон. Точнее, ни одна прямая линия (или, в трёхмерном случае, ни одна плоскость) не может иметь с кривой Безье больше пересечений, чем она имеет с контрольным полигоном этой кривой. Это свойство пригодится дизайнерам кривых при наметке контрольного полигона: они могут с уверенностью предсказать, что результирующая кривая Безье не будет сильно извиваться или демонстрировать дополнительные отклонения и извивы. (В отличие, например, от интерполяционных сплайнов высокого порядка, которые могут приводить к непредсказуемым флуктуациям.)

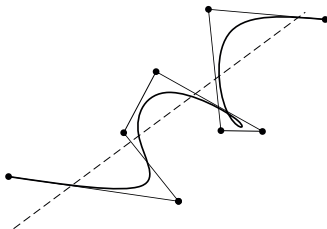
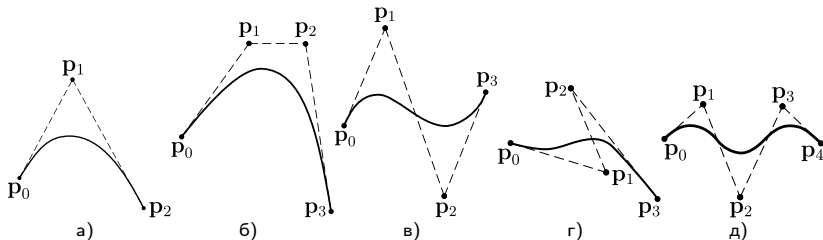


Рис.: Свойство невозрастания колебаний кривых Безье

## Свойства кривых Безье: зависимость степени от числа точек

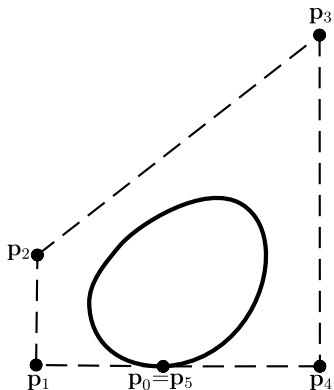


**Рис.:** Примеры двумерных кривых Безье, сгенерированных по трем, четырём и пяти контрольным точкам.

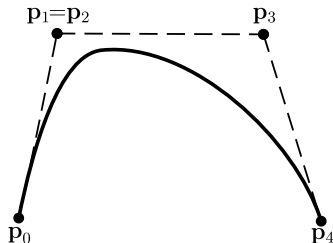
В большинстве случаев кривая Безье — это полином, степень которого на единицу меньше заданного числа контрольных точек: три точки определяют параболу, четыре — кубическую кривую и т.д. При определённом положении контрольных точек, однако, получаются вырожденные полиномы Безье. Например, кривая Безье, сгенерированная тремя контрольными точками, лежащими на одной прямой, является прямым отрезком. Если бы это было не так, то это означало бы, что кривая Безье выходит за пределы выпуклой оболочки точек. Наконец, кривая Безье для набора контрольных точек с совпадающими координатами представляет собой одну точку.



# Методы проектирования с использованием кривых Безье



а) Замкнутая кривая Безье, положение последней контрольной точки выбирается равным положению первой



б) Ввод нескольких контрольных точек с одинаковыми координатами равносильно присвоению большего весового коэффициента этой точке

Кривую Безье можно подобрать по любому числу контрольных точек, но это требует расчета полиномиальных функций большой степени. Если необходимо сгенерировать сложные кривые, их проще сформировать стыковой несколькими участками Безье меньшей степени.

# Методы проектирования с использованием кривых Безье

Использование меньших участков кривых Безье также улучшает локальный контроль над формой кривой. Чтобы получить непрерывность участков кривой первого порядка, контрольные точки  $\mathbf{p}'_0$  и  $\mathbf{p}'_1$  следующего участка кривой нужно выбрать на той же прямой линии, что и контрольные точки  $\mathbf{p}_{n-1}$  и  $\mathbf{p}_n$  предыдущего участка. Если первый участок кривой имеет  $n$  контрольных точек, а следующий —  $n'$ , тогда касательные к кривым можно согласовать, разместив контрольную точку в положении

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_n + \frac{n}{n'} (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}).$$

Чтобы облегчить размещение  $\mathbf{p}'_1$ , можно потребовать только геометрической непрерывности и поместить  $\mathbf{p}'_1$  где-либо на линии между  $\mathbf{p}_{n-1}$  и  $\mathbf{p}_n$ .

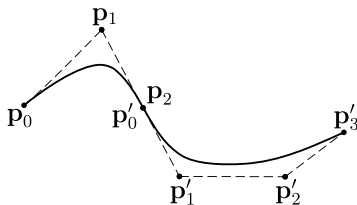
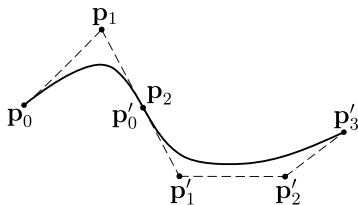


Рис.: Кусочно-гладкая аппроксимация, сформированная двумя участками кривой Безье

# Методы проектирования с использованием кривых Безье

Чтобы получить непрерывность в  $C^2$ , нужно по уравнению (13) согласовать вторые производные по параметру двух соседних участков кривой Безье. В результате в дополнение к фиксированному положению  $p'_0$  и  $p'_1$  (что необходимо для непрерывности  $C^0$  и  $C^1$ ) определяется положение контрольной точки  $p'_2$ . В то же время, требование непрерывности второго порядка участков кривой Безье может быть излишне ограничивающим. Особенно это касается кубических кривых, которые могут иметь только четыре контрольные точки на участок. В этом случае непрерывность второго порядка полностью определяет (фиксирует) положения первых трех контрольных точек и оставляет незафиксированной только одну точку, которую можно использовать для настройки формы сегмента кривой.



**Рис.:** Кусочно-гладкая аппроксимация, сформированная двумя участками кривой Безье

# Поверхности Безье

Набор ортогональных кривых Безье можно использовать для проектирования поверхности объекта. Параметрическая векторная функция для поверхности Безье представляется декартовым (тензорным) произведением стыковочных функций Безье:

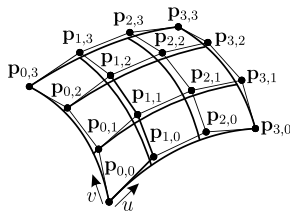
$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i(v) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v), \quad (15)$$

где  $\mathbf{p}_{i,j}$  задают положения

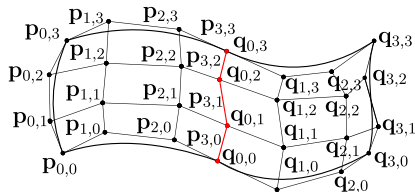
$(n+1) \times (m+1)$  контрольных точек;  $0 \leq u \leq 1$  и  $0 \leq v \leq 1$ . Каждый  $v$ -контур, например при  $v = v_0$ , является кривой Безье степени  $n$  относительно  $u$ .

Аналогично, каждый  $u$ -контур, например при  $u = u_0$ , является кривой Безье степени  $m$  относительно  $v$ . Таким образом, степень уравнения поверхности по  $u$  и  $v$  определяется количеством задающих точек в соответствующих направлениях.

Поверхности Безье имеют те же свойства, что и кривые Безье, и они являются удобным средством в приложениях интерактивного проектирования.



Уравнения поверхностей высоких степеней страдают теми же недостатками, что и уравнения кривых высоких степеней, поэтому при моделировании поверхностей обычно используются поверхности Безье степени 3 по  $u$  и  $v$ , точно так же как при моделировании кривых использовались кривые Безье степени 3. При необходимости смоделировать сложную поверхность приходится создавать несколько поверхностей Безье третьей степени и соединять их друг с другом. Поверхности должны соединяться таким образом, чтобы обеспечивалась непрерывность на границе, по которой осуществляется соединение. Это достигается наложением ограничений на задающие точки, расположенные слева и справа от границы. Ограничение состоит в том, что эти точки и граничная точка должны лежать на одной прямой линии. Если это требование выполняется, первая производная оказывается непрерывной во всех точках границы.



# Дифференцирование поверхности Безье

В системах геометрического моделирования часто возникает потребность в вычислении вектора нормали в произвольной точке поверхности. Например, для вычисления освещения необходимо определять угол между падающим светом и нормалью к поверхности в каждой её точке. Векторы нормали также используются для вычисления положения фрезы при обработке поверхности станком с ЧПУ. Дифференцируя выражение (15) по  $u$  и  $v$ , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} = \sum_{j=0}^m \frac{d}{du} \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{i,j} B_i^n(u) \right) B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{f}_j B_j^m(v),$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^n \frac{d}{dv} \left( \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{g}_i B_i^n(u),$$

где  $\mathbf{f}_j$  и  $\mathbf{g}_i$  вычисляются по формуле (9):

$$\mathbf{f}_j = \frac{d}{du} \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{i,j} B_i^n(u) \right) = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i u^i (1-u)^{n-i-1} \mathbf{a}_{i,j}, \quad \mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{p}_{i+1,j} - \mathbf{p}_{i,j};$$
$$\mathbf{g}_i = \frac{d}{dv} \left( \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} B_j^m(v) \right) = m \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j v^j (1-v)^{m-j-1} \mathbf{b}_{i,j}, \quad \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{p}_{i,j+1} - \mathbf{p}_{i,j}.$$

До сих пор мы предполагали, что  $\mathbf{r}(t)$  представляет собой массив триад  $[x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ . При работе в двумерном пространстве триада заменяется парой  $[x(t) \ y(t)]^T$ , но все выведенные соотношения остаются неизменными. Точно так же соотношения не изменятся и в том случае, если мы перейдем к четырёммерным координатам. Контрольные точки  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i]$  можно следующим образом представить в пространстве однородных координат:  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]$ . Зададим теперь для каждой вершины  $\mathbf{p}_i$  некоторое значение однородной координаты  $h_i$ , которое можно использовать для изменения «веса» этой контрольной точки. Эти взвешенные контрольные точки можно использовать при формировании рациональной кривой Безье. Первые три компоненты полученной кривой будут представлять собой обычную кривую Безье взвешенных  $n + 1$  контрольных точек:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) h_i \mathbf{p}_i.$$

Компонент  $h$  представляет собой скалярный сплайн Безье, сформированный по множеству значений весовых коэффициентов:

$$h(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) h_i.$$

При использовании четырёх параметрических сплайнов в качестве составляющих набора однородных координат, значение  $h$  может оказаться не равным 1, и, следовательно, нужно будет при переходе к трёхмерному представлению точек использовать перспективное деление:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n h_i B_i^n(t)}. \quad (16)$$

Кривая (16) представляет собой рациональную кривую Безье степени  $n$ . Если веса всех вершин равны, то получим обычную кривую Безье, поскольку в таком случае знаменатель в уравнении (16) — это просто сумма стыковочных функций, которая равна 1. Т.о. рациональные кривые Безье являются обобщением стандартных кривых Безье. При  $h_i \geq 0$  для всех  $i$  они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних.



## Свойства рациональных сплайнов

Рациональные кривые дают дополнительные возможности при моделировании линий. Изменяя веса точек, мы изменяем форму кривой. На рис. приведены рациональные кривые Безье пятой степени, построенные по одним и тем же характеристическим точкам. Веса всех точек, кроме  $p_3$ , равны единице, а разные веса  $h_3$  точки  $p_3$  приведены на рисунке. При  $h_3 = 1$  рациональная кривая Безье совпадает с нерациональной. При увеличении  $h_3$  кривая приближается к  $p_3$ . Если вес точки отрицательный, то точка как бы отталкивает кривую от себя.

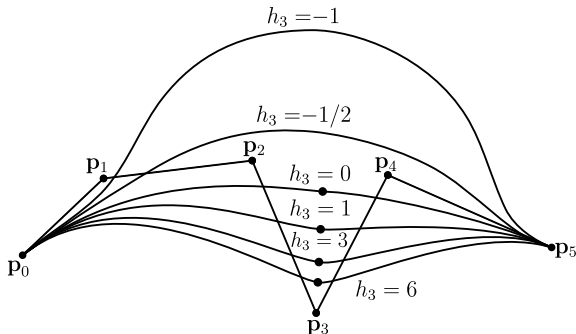
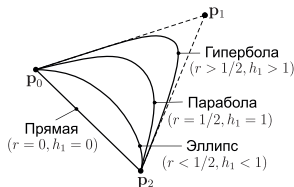


Рис.: Рациональные кривые Безье с различным весом точки  $p_3$

Рациональные сплайны имеют два важных преимущества перед нерациональными. Во-первых, они позволяют точно воспроизвести все конические сечения — окружность, эллипс, параболу и гиперболу. А также такие поверхности как цилиндры, конуса, сферы и т.д. Нерациональные сплайны (полиномы) могут только аппроксимировать такие геометрии, причём для точного приближения приходится использовать большое число контрольных точек, что требует значительных вычислительных ресурсов. Эта возможность позволяет графическим пакетам моделировать все формы кривых и поверхностей с помощью одного представления (рациональных сплайнов), не требуя для обработки различных форм большой библиотеки криволинейных функций.

Второе преимущество рациональных сплайнов заключается в том, что они инвариантны относительно проективных преобразований. Это более сильное условие, чем для нерационального сплайна, который инвариантен только относительно аффинного преобразования.



**Рис.:** Конические сечения, генерируемые с использованием различных значений весового коэффициента рационального сплайна  $h_1$

В качестве примера описания конических сечений рациональными сплайнами используем квадратный сплайн Безье. Присвоим весовым функциям следующие значения:  $h_0 = h_2 = 1$ ,  $h_1 = \frac{r}{1-r}$ ,  $0 \leq r < 1$  и представление рациональными кривыми Безье выглядит так:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 B_0^2(t) + [r/(1-r)]\mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + [r/(1-r)]B_1^2(t) + B_2^2(t)}.$$

Тогда можно получить различные конические сечения, используя различные значения параметра  $r$  без привлечения тригонометрических функций, как мы вынуждены были делать ранее.

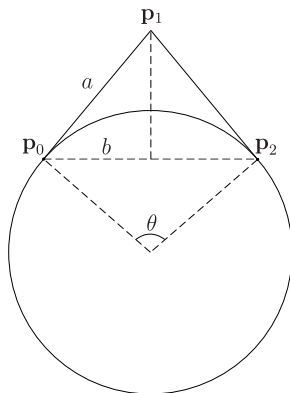
# Представления дуги единичной окружности

Предположим,

что контрольные точки  $p_0$  и  $p_2$  лежат на единичной окружности и разделены углом  $\theta$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ . Построим две прямые, касающиеся конического сечения в точках  $p_0$  и  $p_2$ . Обозначим точку их пересечения как  $p_1$ , которая может быть и бесконечно удалена, если  $\theta = 180^\circ$ . Пусть  $|p_1 - p_0| = |p_2 - p_1| = a$ ,  $|p_2 - p_0|/2 = b$ . Тогда меньшая дуга окружности от  $p_0$  до  $p_2$  может быть представлена рациональной квадратичной кривой Безье, у которой  $h_0 = h_2 = 1$ , а  $h_1 = \frac{b}{a} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

Заметим, что эта дуга находится внутри выпуклой оболочки, образуемой точками  $p_0$ ,  $p_1$  и  $p_2$ .

Если использовать для точки  $p_1$  отрицательное значение веса, т.е.  $h_1 = -\frac{b}{a} = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , то будет получена большая дуга окружности от  $p_0$  до  $p_2$ . В данном случае, получающийся сплайн выходит за пределы выпуклой оболочки контрольных точек.



При действии проективного преобразования на рациональную кривую в результате получается другая рациональная кривая, у которой контрольные точки и их весовые коэффициенты являются преобразованными версиями исходных значений.

Пусть преобразование определяется матрицей  $\mathbf{M}$  размерностью  $4 \times 4$ .

Обозначим строки матрицы  $\mathbf{M}$  через  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ . Тогда кривая  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}(t)$ , полученная путём применения преобразования к рациональной кривой из уравнения (16), идентична рациональной кривой на базе преобразованных контрольных точек  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i$ , а именно:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n h_i B_i^n(t)}, \quad (17)$$

со скорректированными весами

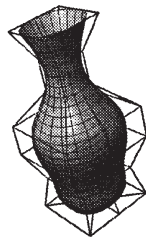
$$h_i = \tilde{h}_i (\mathbf{m}_4 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_i), \quad (18)$$

где  $\tilde{\mathbf{p}}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)$  — расширение  $\mathbf{p}_i$  на случай однородных координат,  $\tilde{h}_i$  — исходные весовые коэффициенты контрольных точек. Если преобразование является аффинным и последняя строка равна  $\mathbf{m}_4 = (0, 0, 0, 1)$  (перспективного искажения не происходит), то  $(\tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{m}_4) = 1$ , то есть веса корректировать не нужно.

Распространим понятие рациональных кривых Безье на рациональные поверхности Безье, для чего используем декартово произведение:

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{i,j} \mathbf{p}_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)}. \quad (19)$$

Для контроля формы поверхности дизайнер задаёт контрольный полиэдр на базе контрольных точек  $\mathbf{p}_{i,j}$ , а также веса  $h_{i,j}$ . У рациональных поверхностей как и у рациональных кривых, важны не абсолютные значения весов вершин, а относительные. Чем больше вес некоторой вершины по отношению к весам других вершин, тем ближе к этой вершине проходит поверхность. С помощью поверхностей Безье можно описывать части поверхностей второго порядка — эллипсоида, гиперboloида, параболоида или их частных случаев.



**Рис.:** Поверхности вращения используют способность рациональной кривой создавать истинные конические сечения