

Resolução numérica e aplicação do Problema Restrito de Três Corpos para simulação da órbita de Plutão no sistema Sol-Netuno-Plutão

1st Renan Augusto de Souza Leite
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Federal de São Paulo
São José dos Campos, Brasil
rleite@unifesp.br

Resumo—O Problema Restrito de Três Corpos é um problema interdisciplinar, que inclui ideias de equações diferenciais, dinâmica orbital, mecânica celeste, lei da gravitação e cálculo numérico. Por ser um problema muito abrangente ele pode ser considerado um ótimo recurso pedagógico para introduzir e ensinar os temas citados anteriormente em uma aplicação no mundo real. Neste trabalho será introduzido o Problema Restrito de Três Corpos e serão resolvidas as equações diferenciais usando o método numérico de Runge-Kutta de 4º ordem para representar a órbita de Plutão.

Index Terms—Problema restrito de três corpos, mecânica celeste, órbitas, equação diferencial, astronomia, Kepler, Plutão

I. INTRODUÇÃO

A astronomia está presente na sociedade humana desde as civilizações antigas. Muitos povos tratavam astros como divindades, usavam suas posições para se orientar, para formar calendários e para saberem se a época em que estavam era boa para plantio e colheita. Com base no conhecimento desses fatos podemos afirmar que a astronomia é uma dos campos científicos mais antigos da nossa civilização, se não for o mais antigo.

A mecânica celeste é uma área dentro da astronomia encarregada de estudar o movimento de corpos celestes, sejam eles naturais ou não. Esta área faz uso da mecânica clássica e dos conhecimentos de gravitação para estudar e prever o movimento de astros. A mecânica celeste moderna que temos hoje teve início nos trabalhos do alemão Johannes Kepler (1571-1630) com as obras *Astronomia Nova*, publicado em 1609, e *Harmonia do Mundo*, publicado em 1619. Nestas duas obras Kepler publica o que mais tarde seriam conhecidas como as Leis de Kepler, que são leis descritivas do movimento planetário ao redor do sol. Isaac Newton (1643-1727) demonstrou matematicamente as leis de Kepler e as usou para basear sua ideia sobre a gravitação, tudo descrito em sua célebre obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* [3], publicado em 1687.

Na Obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* Newton também formulou pela primeira vez o "Problema dos n-corpos". Este problema trata da predição do movimento de partículas (ou corpos celestes) portadoras de massa que

interagem entre si através da atração gravitacional de cada uma. Este problema possui uma solução mais simples para quando $n = 2$, mas para $n > 2$ as soluções ficam mais complexas e caóticas, não possuindo solução geral na forma fechada como para a situação com dois corpos, e devido a isso se faz necessário o uso de métodos numéricos para resolver.

Um caso especial do problema dos n-corpos é o caso quando $n = 3$, que é conhecido como Problema dos Três Corpos. Essa instância não tem solução analítica e frequentemente é solucionado por métodos numéricos. Esse caso especial recebeu muita atenção da comunidade científica durante os anos, principalmente na sua eficácia em descrever objetos do mundo real.

Há ainda um caso especial do Problema dos Três Corpos, que é chamado de Problema dos Três Corpos Restrito. A diferença deste para o caso completo é que no problema restrito a massa do terceiro corpo é desprezível, tendo sua influência nos outros dois corpos desprezada também e reduzindo o problema a solução de um problema de dois corpos. Normalmente no problema restrito considera-se o movimento orbital dos dois corpos com massas significativas, chamados também de primários, como sendo movimentos circulares. Este problema especial foi e é muito estudado por conseguir modelar partículas do mundo real, sendo usado principalmente para o estudo do sistema Sol-Terra-Lua, mas podendo também ser usado para modelar o movimento de um satélite terrestre que sofre ação gravitacional da Terra e da Lua.

II. METODOLOGIA

A. Problema dos Três Corpos

Dada a contextualização do problema anteriormente, podemos defini-lo e descrevê-lo matematicamente. A descrição pode ser dada por: dados três corpos de massa m_1 , m_2 e m_3 , determinar os valores futuros da velocidade \dot{r} e da posição r em qualquer momento de tempo, sabendo que os corpos exercem mútua influência gravitacional uns sobre os outros.

A descrição matemática geral do problema dos três corpos é dada pelas seguintes três equações diferenciais ordinárias (EDOs), que enunciam o movimento dos corpos:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \quad (3)$$

Onde G é a constante gravitacional, \vec{r}_i é o vetor posição e $\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ é o vetor aceleração dos corpos. É importante destacar também que $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ indica a norma do vetor e pode ser entendido também como a distância entre \vec{r}_i e \vec{r}_j .

A resolução deste problema requer a integração de um sistema constituído por nove equações diferenciais de segunda ordem, o que equivale a um sistema de ordem dezoito. Entretanto, é possível reduzir a ordem do sistema para doze, mas estes resultados não serão abordados neste trabalho, que é mais focado no problema restrito dos três corpos. Para mais informações referentes ao problema dos três corpos e a resolução das EDOs, consultar a referência [8].

B. Problema dos Três Corpos Restrito

Neste caso especial temos corpos de massa m_1 e m_2 , que são chamados de corpos primários, e um outro corpo com massa m_3 , que pode ser considerada desprezível por ser extremamente pequena comparada às massas m_1 e m_2 .

O problema restrito pode ser definido com partir das seguintes restrições:

- 1) A massa m_3 pode ser considerada nula.
- 2) As órbitas dos corpos primários são circulares em volta do centro de gravidade de todo o sistema.
- 3) O terceiro corpo se move no plano orbital dos corpos primários.

A primeira restrição implica que o terceiro corpo não exerce qualquer influência gravitacional nos outros dois, o que nos leva a considerá-lo ausente, reduzindo o problema restrito a um problema de dois corpos, que possui solução menos complexa. A simplificação matemática advinda da segunda restrição ocorre devido às órbitas circulares, as quais mantêm um raio constante e uma velocidade angular constante. Por fim, a última restrição resulta em uma significativa simplificação do problema, uma vez que sua descrição completa passa a ser bidimensional.

Podemos então usar as equações diferenciais 1, 2 e 3 para representar o problema restrito, mas levando em consideração as restrições. Com isso são obtidas as seguintes equações:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \quad (6)$$

Estas novas equações nos dizem que primeiro é determinado o movimentos dos dois primeiros corpos e os resultados obtidos são usados para estudar o movimento do segundo corpo.

O problema restrito dos três corpos tem variações com relação à forma da órbita dos corpos primários. Há estudos sobre formas elípticas e formas circulares. Neste trabalho será adotado o estudo das formas circulares, que já está consolidado na comunidade científica com maior quantidade de estudos e também é menos complexo comparado aos estudos com formas elípticas.¹

1) Descrição matemática do problema restrito: Estabelecido que será usada a variação com órbitas circulares, considere b e a como os raios das órbitas de m_1 e m_2 , respectivamente. Vamos considerar também $X - Y$ como o sistema de coordenadas inercial e $\bar{x} - \bar{y}$ o sistema de coordenada não inercial onde os corpos primários giram com velocidade angular ω .

No sistema inercial as coordenadas de m_1 e m_2 serão (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , e a coordenada de m_3 como sendo apenas (X, Y) . Neste sistema o movimento dos corpos primários é dado por:

$$X_1 = b \cos(\omega t); \quad Y_1 = b \sin(\omega t) \quad (7)$$

$$X_2 = -a \cos(\omega t); \quad Y_2 = -a \sin(\omega t) \quad (8)$$

Abaixo uma representação dos sistemas de coordenadas junto com os corpos m_1 , m_2 e m_3 .

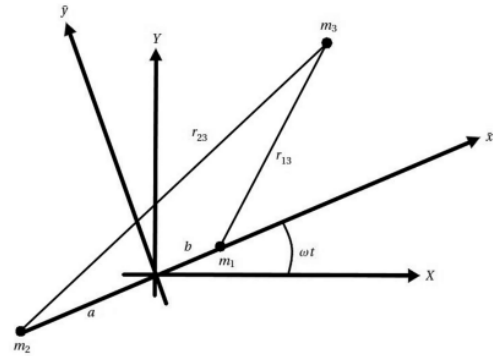


Figura 1. (X, Y) como sistema inercial e $\bar{x} - \bar{y}$ como não inercial.

Podemos usar as equações anteriores para fazer substituições na equação 6 afim de obter as equações de movimento de m_3 :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -Gm_1 \left[\frac{m_1(X - b \cos(\omega t))}{r_{13}^3} + \frac{m_2(X + a \cos(\omega t))}{r_{23}^3} \right] \quad (9)$$

¹Falar de órbitas circulares significa falar que os corpos primários possuem órbitas circulares em volta do centro de massa comum aos dois.

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -Gm_1 \left[\frac{m_1(Y - b \sin(\omega t))}{r_{13}^3} + \frac{m_2(Y + a \sin(\omega t))}{r_{23}^3} \right] \quad (10)$$

Onde:

$$r_{13} = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \quad (11)$$

e

$$r_{23} = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \quad (12)$$

Essas são as equações para o sistema com referencial inercial. Para o referencial não inercial um pouco mais de manipulação e cálculo é necessário, e para fins de simplificação e para não desviar tanto do objetivo deste artigo, será mostrado a seguir as equações de movimento de m_3 com o referencial não inercial. Para o leitor que quiser ver o desenvolvimento completo, consultar as referências [1] e [9].

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -Gm_1 \frac{(\bar{x} - b)}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{(\bar{x} + a)}{r_{23}^3} + 2\omega \frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{x}\omega^2 \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = -Gm_1 \frac{m_1 \bar{y}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{m_2 \bar{y}}{r_{23}^3} - 2\omega \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{y}\omega^2 \quad (14)$$

Nestas equações, o terceiro termo é a chamada pseudoforça de Coriolis e o quarto termo é a força centrífuga. Estas equações podem ser um tanto simplificadas e tornadas ainda mais gerais. Podemos fazer as equações independerem das massas específicas de m_1 e m_2 , da velocidade angular ω e da distância entre m_1 e m_2 . Para isso, vamos fazer a unidade de massa ser $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, que representa a massa reduzida do sistema. Faremos $\mu = m_2$ e $m_1 = 1 - \mu$. A unidade de comprimento faremos $a + b = 1$. Vamos considerar a unidade de tempo como sendo $\frac{1}{\omega}$ e a constante gravitacional $G = 1$.

Após a modificação dos parâmetros temos novas EDOs, agora mais gerais e que independem de alguns dados. As equações são:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\bar{x} - \mu}{r_{13}^3} - \mu \frac{\bar{x} + 1 - \mu}{r_{23}^3} + \bar{x} + 2 \frac{d\bar{y}}{dt} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\bar{y}}{r_1^3} - \mu \frac{\bar{y}}{r_2^3} + \bar{y} - 2 \frac{d\bar{x}}{dt} \quad (16)$$

onde

$$r_{13} = \sqrt{(\bar{x} - \mu)^2 + \bar{y}^2} \quad (17)$$

e

$$r_{23} = \sqrt{(\bar{x} + 1 - \mu)^2 + \bar{y}^2} \quad (18)$$

As equações de movimento de m_3 estão dadas por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Para facilitar o cálculo numérico da solução vamos reduzi-las a equações de

primeira ordem utilizando as substituições $\frac{d\bar{x}}{dt} = u$ e $\frac{d\bar{y}}{dt} = v$. Com esta simplificação, as equações assumem as formas de:

$$\frac{du}{dt} = -(1 - \mu) \frac{\bar{x} - \mu}{r_{13}^3} - \mu \frac{\bar{x} + 1 - \mu}{r_{23}^3} + \bar{x} + 2v \quad (19)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = -(1 - \mu) \frac{\bar{y}}{r_1^3} - \mu \frac{\bar{y}}{r_2^3} + \bar{y} - 2u \quad (20)$$

onde

$$r_1 = \sqrt{(\bar{x} - \mu)^2 + \bar{y}^2} \quad (21)$$

e

$$r_2 = \sqrt{(\bar{x} + 1 - \mu)^2 + \bar{y}^2} \quad (22)$$

2) Pontos de Lagrange: O famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) estudou o problema dos três corpos e descobriu três pontos de equilíbrio para um corpo sob a influência gravitacional de outros dois corpos massivos, ou seja, pontos onde as forças gravitacionais dos dois corpos primários e a força centrífuga se equilibram e se anulam. Anos mais tarde, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) descobriu outros dois pontos, e a junção dos cinco pontos de equilíbrio são conhecidos como pontos de Lagrange ou pontos de libração. Todos os pares de corpos celestes possuem seus cinco pontos de Lagrange, que são chamados de L1, L2, L3, L4 e L5.

O sistema Sol-Terra tem seus cinco pontos de Lagrange, e o sistema Sol-Terra-Lua tem cinco pontos diferentes. No sistema Sol-Terra (e em todos os pares de corpos) L1, L2 e L3 ficam numa linha imaginária que perpassa os dois corpos massivos. L1 fica dentro da órbita da Terra, L2 fica fora dela e L3 fica no lado oposto do Sol. Já os pontos L4 e L5 estão localizados atrás e na frente da órbita do objeto de menor massa, formando um triângulo equilátero com os dois objetos maiores. Abaixo está uma representação do sistema e dos pontos.

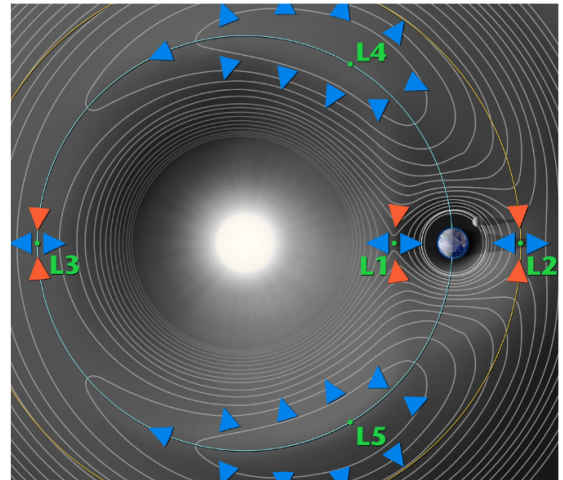


Figura 2. Pontos de Lagrange resultantes da interação do Sol com a Terra. Fonte: NASA, 2023.

A descoberta destes pontos foi de suma importância para o desenvolvimento da mecânica celeste e para a exploração espacial, pois permitiu que satélites e telescópios fossem colocados nesses pontos para os mais diversos motivos. Um exemplo é o telescópio espacial SOHO (Solar and Heliospheric Observatory), que foi lançado em 1995 para estudar o Sol. SOHO está estacionado em L1. Outro telescópio famoso, o Telescópio Espacial James Webb, está estacionado em L2.

Os pontos L4 e L5 são conhecidos por serem mais estáveis que os outros três, de forma que um objeto nesses pontos tendem a ficar por muito tempo, além de poderem até serem orbitados por outros corpos, como é o caso de asteróides troianos de planetas.

C. Introdução ao Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é uma das mais poderosas e precisas técnicas para resolver equações diferenciais numericamente. Este método é famoso principalmente pela sua forma em quarta ordem, que é muito precisa. A ideia básica do método de Runge-Kutta de quarta ordem é usar a informação sobre a taxa de variação em vários pontos dentro de um intervalo de tempo para estimar o próximo valor da função.

Dada uma EDO:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (23)$$

Basicamente, calcula-se quatro coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 usando a seguinte fórmula:

$$k_1 = h \times f(t_n, y_n) \quad (24)$$

$$k_2 = h \times f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (25)$$

$$k_3 = h \times f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (26)$$

$$k_4 = h \times f(t_n + h, y_n + k_3) \quad (27)$$

Onde h é o tamanho do passo e t_n e y_n são valores conhecidos no tempo t_n . Após o cálculo dos coeficientes calculamos a aproximação por Runge-Kutta com

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (28)$$

Onde y_{n+1} é a aproximação em $y(t_{n+1})$. Após isso, incrementamos o tempo, com $t_{n+1} = t_n + h$. Os passos são repetidos até que se atinja um valor determinado.

D. Implementação em Python para mostrar a órbita de Plutão

Primeiro foram importadas as bibliotecas *numpy* [13] e *matplotlib* [14]. A primeira é uma das bibliotecas mais famosas para trabalhar com arrays multidimensionais e dados de muitos tipos. A segunda é utilizada para geração de gráficos em Python.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Listing 1. Bibliotecas

Após importar as bibliotecas, foram implementadas as EDOs mostradas em 23 e 27, junto com os valores de r_1 e r_2 presentes em 21 e 22.

```
def EDOs(x, y, u, v, mu):
    r1 = np.sqrt((x - mu)**2 + y**2)
    r2 = np.sqrt((x + 1 - mu)**2 + y**2)
    fu = -(1 - mu)*(x - mu) /
    r1**3 - mu*(x + 1 - mu) / r2**3 + x + 2*v

    fv = -(1 - mu)*y / r1**3 - mu*y / r2**3 +
    y - 2*u
    return np.array([u, v, fu, fv])
```

Listing 2. EDOs

Definidas as EDOs, foi criada uma função que representa o método de Runge-Kutta que está nas equações de (23) até (28).

```
def runge_kutta_step(x, y, u, v, mu, dt):
    k1 = dt * EDOs(x, y, u, v, mu)
    k2 = dt * EDOs(x + 0.5 * k1[0], y + 0.5 * k1[1],
    u + 0.5 * k1[2], v + 0.5 * k1[3], mu)

    k3 = dt * EDOs(x + 0.5 * k2[0], y + 0.5 * k2[1],
    u + 0.5 * k2[2], v + 0.5 * k2[3], mu)

    k4 = dt * EDOs(x + k3[0], y + k3[1], u + k3[2], v
    + k3[3], mu)

    x_new = x + (k1[0] + 2 * k2[0] + 2 * k3[0] + k4
    [0]) / 6
    y_new = y + (k1[1] + 2 * k2[1] + 2 * k3[1] + k4
    [1]) / 6
    u_new = u + (k1[2] + 2 * k2[2] + 2 * k3[2] + k4
    [2]) / 6
    v_new = v + (k1[3] + 2 * k2[3] + 2 * k3[3] + k4
    [3]) / 6
    return x_new, y_new, u_new, v_new
```

Listing 3. EDOs

Em seguida foram definidas condições iniciais baseadas na referência [1], junto com o incremento temporal e o número de passos do método de Runge-Kutta, que foi escolhido como 5000. Além disso, foram criadas listas para armazenar os resultados.

```
# Condições iniciais
x = -0.60739559520
y = -0.77749682650
u = 0.10833422340
v = -0.08463997159
mu = 0.00005250000

# Incremento temporal
dt = 0.2

# Numero de passos
num_steps = 5000

# Listas para armazenar os resultados
x_vals = [x]
y_vals = [y]
```

Listing 4. Condições iniciais

Feito isso, resolvemos as EDOs usando o método de Runge-Kutta com o código abaixo:

```
# Resolvendo com o metodo de Runge-Kutta
for _ in range(num_steps):
    x, y, u, v = runge_kutta_step(x, y, u, v, mu, dt)
    x_vals.append(x)
```

```

5 y_vals.append(y)
6
7 x_vals_ua = np.array(x_vals) * 30
8 y_vals_ua = np.array(y_vals) * 30

```

Listing 5. Resolução das EDOs

O loop for é chamado para iterar o tanto de vezes igual ao número de passos, ou seja, 5000. Dentro do loop, a função de Runge-Kutta é chamada para calcular o próximo estado do sistema. Ela recebe as coordenadas e velocidades atuais, além do parâmetro μ , e o incremento de tempo dt . Ela retorna as novas coordenadas e velocidades. As coordenadas calculadas são adicionadas nas listas 'x_vals' e 'y_vals'. Após o loop, essas listas são convertidas em arrays numpy e multiplicadas por 30. Essa multiplicação ocorre devido a escala do problema. Se não fosse feita, o gráfico não sairia correto. O número 30 foi usado por que é a distância em UA entre Netuno e o Sol.

Feito os cálculos, é hora de plotar o gráfico que nos mostra como Plutão orbita o sol. Para isso, usamos a biblioteca matplotlib.

```

1 # Plotando os resultados
2 x_netuno, y_netuno = 30, 0
3 plt.figure(figsize=(10,10),frameon=False)
4 plt.scatter(0,0,s=400,label='Sol',color='orange')
5 plt.scatter(x_netuno, y_netuno, s=200, label='Netuno',
6             , color='red')
7 plt.plot(x_vals_ua, y_vals_ua)
8 plt.xlim(-60,60)
9 plt.ylim(-60,60)
10 plt.title('Órbita de Plutão (Runge-Kutta)')
11 plt.xlabel('x')
12 plt.ylabel('y')
13 plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
14 plt.legend()
15 plt.show()

```

Listing 6. Gráfico

Primeiro foram definidas as coordenadas de Netuno, que está a 30 UA do sol, posicionado em (0, 0). Os dois comandos 'plt.scatter' adiciona Sol e Netuno no gráfico. O comando 'plt.plot' adiciona uma linha no gráfico conectando todos os pontos calculados pra Plutão usando o método de Runge-Kutta. Os comandos posteriores definem aspectos estéticos e adiciona rótulos e legendas no gráfico.

III. RESULTADOS

Abaixo está o resultado da compilação do código, que resulta em um belo gráfico mostrando a órbita de Plutão ao redor do Sol.

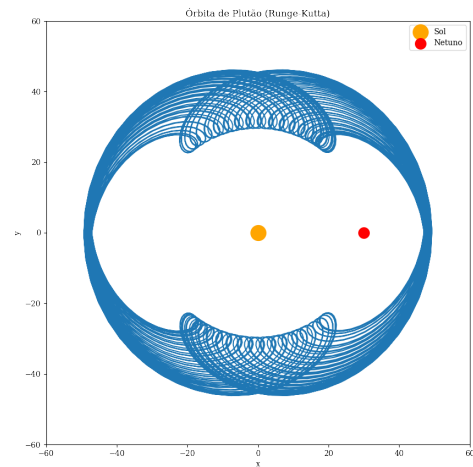


Figura 3. Órbita de Plutão representada em azul.

Plutão é um planeta anão que é diferente dos outros planetas do sistema solar, devido a sua inclinação orbital em relação ao plano da eclíptica ($i = 17, 1417^\circ$). A cada 248 anos Plutão passa 20 anos mais próximo do sol que Netuno. Isso significa que em algum momento Plutão cruza a órbita de Netuno. Pensando nisso surge a questão: em algum momento eles podem se colidir?

A resposta é não. Isso acontece devido a um fenômeno de ressonância orbital. Esse fenômeno faz com que corpos próximos um do outro exerçam influência gravitacional sobre o outro. Esta condição garante que, no momento em que Plutão está à mesma distância heliocêntrica de Netuno, sua longitude está a quase 90 graus de distância da de Netuno. A ressonância entre esses planetas é de 3:2, o que significa que a cada 3 órbitas que Netuno faz ao redor do Sol, Plutão faz duas. Foi descoberto também que no periélio (momento em que o planeta está mais próximo do sol) Plutão está em um local acima do plano orbital de Netuno em 18 UA. A distância mínima entre Plutão e Netuno, cerca de 17 UA, ocorre quando esse planeta anão está no afélio.

Com o gráfico podemos perceber a natureza caótica da órbita de Plutão. Ele, além de ter órbita mais inclinada quando comparada aos outros planetas, tem órbita excêntrica.² A excentricidade de Plutão tem o valor de 2.488³, maior que a do resto dos planetas do sistema solar.

IV. CONCLUSÃO

Com este trabalho pudemos aplicar o método de Runge-Kutta em um problema do mundo real com resultados que estão de acordo com a literatura acadêmica já estabelecida, o

²Diz-se órbita excêntrica quando a órbita de um planeta ou corpo celeste se desvia do padrão de ser um círculo perfeito. Quanto mais diferente de um círculo mais excêntrica a órbita.

³Quanto mais próxima de 0 mais circular é a órbita de um corpo celeste. Valores maiores que 0 e menores que 1 representam órbitas mais elípticas, enquanto excentricidade igual a 1 tem forma parabólica e maior que 1 forma hiperbólica.

que demonstra a precisão do método para resolver equações diferenciais ordinárias. Para este trabalho, a técnica de solução numérica escolhida foi essa, mas outros métodos como o de Euler e Cauchy também podem ser usados, produzindo ainda resultados coesos. O leitor interessado pode usar o código em Python usado neste trabalho utilizando outros corpos celestes como parâmetros, desde que sejam ajustados corretamente. Também pode usar outras condições iniciais e verificar a consonância com o gráfico gerado. Para isso, uma alternativa pode ser usar as coordenadas e dados disponibilizados pelo JPL Horizons On-Line Ephemeris System (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>) [15].

Os métodos numéricos são muito importantes na nossa sociedade por ajudarem a resolver muitos problemas complexos que surgem da modelagem matemática da natureza. Por estar intimamente relacionado com o mundo real, há muitos exemplos de aplicações que são interdisciplinares, como a mostrada neste trabalho. Com isso, pode-se pensar em mais métodos didáticos para ensinar cálculo numérico de forma que o problema abordado pareça mais palpável para o estudante e se relacione com o conhecimento que ele já tem do mundo. Além do ensino dos métodos numéricos, é possível também o ensino de programação utilizando problemas numéricos, que dão mais contexto ao conteúdo e torna a escrita de um código mais clara e pode ajudar na compreensão tanto da programação em si quanto de uma linguagem específica.

REFERÊNCIAS

- [1] MACEDO, Gabriel da Silva. Aplicação do Problema Restrito de Três Corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, [S. l.], v. 40, n. 4, p. 1-8, 21 maio 2018. DOI <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0083>. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbref/a/ngxHPwZ6bDbbhvPnnLQ8LL/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 26 set. 2023.
- [2] A.S.T. Pires, *Evolução das idéias da física* (Livraria da Física, São Paulo, 2011) 2ª ed.
- [3] <http://astro.if.ufrgs.br/newton/principia.pdf>. Acesso em: 30/11/2023.
- [4] PANNEKOEK, Anton. *A History of Astronomy*. [S. l.: s. n.], 1989.
- [5] HOFFMANN, Anderson. Uma introdução ao problema de N-Corpos. 2009. TCC (Bacharelado em Matemática e Computação Científica) - Universidade Federal de Santa Catarina, [S. l.], 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96586/Anderson.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [6] DIAS, Lúcia de Fátima. O problema restrito elíptico dos três corpos com colisão. 2007. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade Federal de Pernambuco, [S. l.], 2007. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/7317/1/arquivo8701_1.pdf
- [7] FRNKA, Richard. *The Circular Restricted Three-Body Problem*. 2010. Disponível em: http://jan.ucc.nau.edu/~ns46/student/2010/Frnka_2010.pdf
- [8] DOS PRAZERES, Roberta Fonseca. *Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos*. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, [S. l.], 2010.
- [9] WEBER, Bryan. *Orbital Mechanics & Astrodynamics*. [S. l.], 2020. Disponível em: <https://orbital-mechanics.space/intro.html>. Acesso em: 30 nov. 2023.
- [10] de Almeida Junior, A.K., de Almeida Prado, A.F.B. Comparisons between the circular restricted three-body and bi-circular four body problems for transfers between the two smaller primaries. *Sci Rep* 12, 4148 (2022). <https://doi.org/10.1038/s41598-022-08046-x>
- [11] KRÍŽEK, Michal. Numerical experience with the three-body problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 63, Issues 1-3, 1995, Pages 403-409, ISSN 0377-0427, [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(95\)00067-4](https://doi.org/10.1016/0377-0427(95)00067-4). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042795000674>
- [12] VALLE, Karine Nayara. *Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta*. 2012. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, [S. l.], 2012.
- [13] NUMPY. <https://numpy.org/>
- [14] MATPLOTLIB. <https://matplotlib.org/>
- [15] ZAVERI, Nihaal; MALHOTRA, Renu. Pluto's Resonant Orbit Visualized in 4D. *Research Notes of the AAS, The American Astronomical Society*, v. 5, n. 10, p. 1-235, out. 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.3847/2515-5172/ac3086>
- [16] PRADO, Antonio. *Trajетórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade*. 2001.
- [17] C. J., Cohen; E. C., Hubbard. Libration of the close approaches of Pluto to Neptune. *AJ*, [S. l.], v. 70, p. 1-10, fev. 1965.