$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)d(x)$$

保序性 [a,b]上 $f(x) \geq 0$ $\quad \int_a^b f(x)dx \geq 0$

⇓

推论 [a,b]上 $f(x) \leq g(x)$ $\quad \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$

定积分中值定理 $\underbrace{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)}$

(介值定理)

⇓

用来去除积分号

$f(x)$在[a,b]上连续，存在一点ξ满足

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

估值定理 [a,b]上$f(x)$连续，M最大值 m最小值

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

⇓

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\Downarrow\; f(\xi)} \leq M$$

⇓

理解为 $f(x)$在[a,b]上的平均值

牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

定积分换元公式 注意要变

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

定积分分部积分法

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

例 5.19 求定积分 $\int_0^1 x\arctan x\,dx$.

解 $\int_0^1 x\arctan x\,dx = \int_0^1 \arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\arctan x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

广义积分

把范围扩展到 $\pm\infty$

当 $F(\pm\infty)$ $\begin{cases} \text{存在} & \text{广义积分×××收敛} \\ \text{不存在} & \text{广义积分×××发散} \end{cases}$

瑕积分

b是一个瑕点

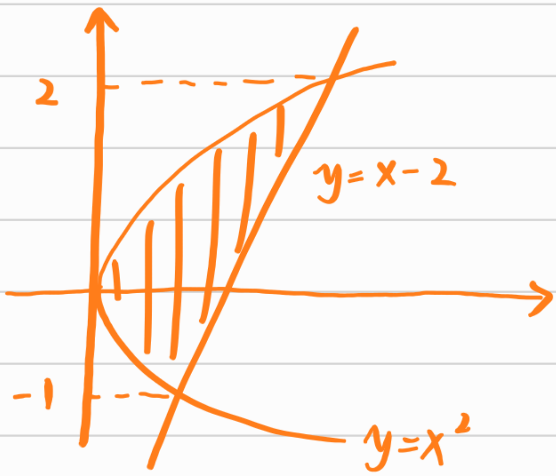
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

接着用牛顿-莱布尼茨公式

$= F(b^-) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

eg: $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0) \Rightarrow x=a$ 就是一个瑕点



$$S=\int_{x小}^{x大}(y_{上}-y_{下})\,dx$$

$$S=\int_{y小}^{y大}(x_{右}-x_{左})\,dy$$

$$=\int_{-1}^{2}[(y+2)-y^2]\,dy$$

e f

绕 $x=a$ 旋转，y最小值为c，最大值为d

远离轴的 $x=f(y)$ 靠近的 $x=g(y)$

$$V=\int_c^d \pi[f(y)-a]^2dy-\int_e^f \pi[g(y)-a]^2dy$$