1、定义：形如 $y'=f(x)\cdot g(y)$ 的方程

特征：含 x 的表达式与含 y 的表达式之积(商)

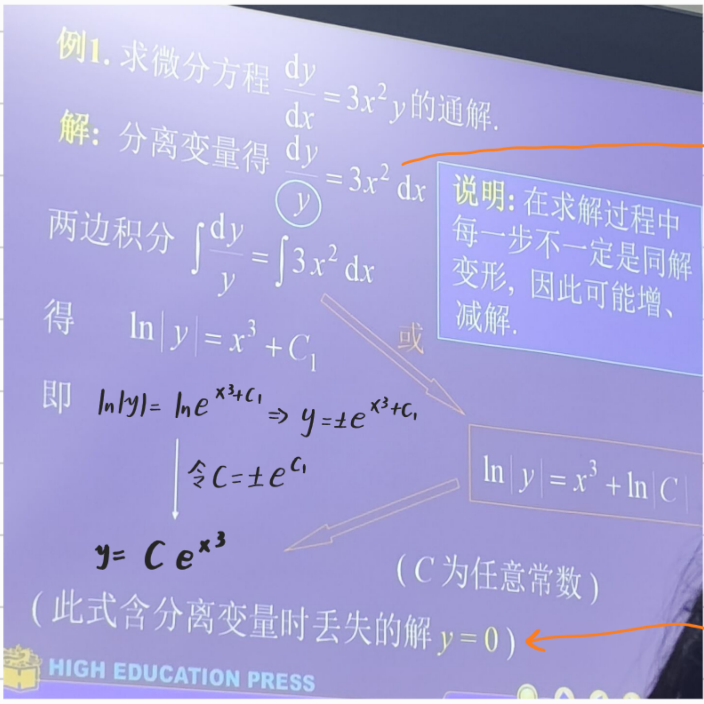
2、求解：

(1) $y' \to \frac{dy}{dx}$ 　　$\frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y)$

(2) 分离：$\frac{1}{g(y)}\,dy=f(x)\cdot dx$

(3) 积分 $\int\frac{1}{g(y)}\,dy=\int f(x)\cdot dx$

$$G(y)=F(x)+C$$



→ $y\neq 0$

使 $y=0$ 缺失

找回

把上面的 $y=0$ 找回来了

另解：

$\int\frac{1}{y}\,dy=\int 3x^2dx$

$\ln y=x^3+\ln C$

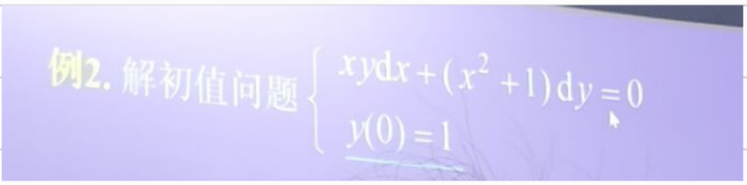
……

$\therefore y=Ce^{x^3}$

直接不用管 y 的绝对值

<考试这么做>

只要未知函数前有 ln，则另一侧变化成 $\ln e^{n}$ 来做



解：分离变量得 $\frac{1}{y}\,dy=-\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$\therefore \int\frac{1}{y}\,dy=-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$\therefore \ln y=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C$

$\therefore \ln y + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln C$

$\ln(\sqrt{x^2+1}\cdot y) = \ln C$

$\therefore y\sqrt{x^2+1} = C$ （C为任意值）

当初始条件 $y(0)=1$ 得 $C=1$

$\therefore y\sqrt{x^2+1} = 1$

例3、求 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 的通解

表示对x求导

解：$e^{-y}dy = e^{x}dx$

$-e^{-y} = e^{x}+C$

即 $(e^{x}+C)e^{y}+1=0$ $(C<0)$

另解：设 $x+y=u$，则 $u'=x+y'$

$\therefore u'-1 = e^{x+y}$

$\therefore u' = 1+e^{u}$

$\therefore \frac{du}{dx} = 1+e^{u}$

$\int \frac{1}{1+e^{u}}dx = \int dx$

$\int \frac{(1+e^{u})-e^{u}}{1+e^{u}} = du$

$\int \frac{du}{1+e^{u}} = x+C$

$u-\ln(1+e^{u}) = x+C$

所求通解：$\ln(1+e^{x+y}) = y-C$ （C为任意值