1、一阶线性微分方程

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

$Q(x)$ —— 自由项 $\begin{cases} =0 & \text{一阶线性齐次方程} \\ \neq 0 & \text{一阶线性非齐次方程} \end{cases}$

也可以变成 $x(y)' + P(y)x = Q(y)$

2、一阶线性齐次方程

$$y' + P(x)y = 0$$

$$y_{齐通} = Ce^{-\int p(x)dx}$$ (公式直接用)(齐次的通解公式)

3、一阶线性非齐次方程

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad (C \neq 0)$$

$$y_{非通} = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$ (套公式直接用)非齐次通解

$\Downarrow$ 转化

$$y_{非通} = Y_{齐通} + y_{非特}$$

$$y_{非通} = \underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

4、步骤

① 写出 $P(x)$ $Q(x)$

② 算 $e^{-\int p(x)dx}$

③ 代公式

例：$dy \quad 2y \quad (x+1)^{\frac{5}{2}}$

方一 解：∵ $P(x) = -\frac{2}{x+1}$

$Q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$$

$$\therefore y = (x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}(x+1)^{-2}dx + C\right]$$

$$= (x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx + C\right]$$

$$= (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right]$$

$$= C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$$

方二 另解：∵ $P(x) = -\frac{2}{x+1}$

$Q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

step1 ∴ $Y_{齐通} = Ce^{\int \frac{2}{x+1}dx}$

$= Ce^{2\ln(x+1)}$

$= C(x+1)^2$

常数变易法 ⇒ C变C(x)

step2 设 $y = C(x)(x+1)^2$ 导

$y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$

step3 ∴ $C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)\cdot(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

$C'(x)(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

$C'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ 化简得出 $C'(x)$

step4 $C(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

step5 ∴ $y = (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right]$

step 1：找 $Y_{齐通}$ (代公式)

step 2：变易常数 $y = C(x)\cdot ?$

step 3：代 y 入原方程，找 $C'(x)$

step 4：积分 $C'(x)$ 得 $C(x)$

step 5：代 $C(x)$ 入 step 2

5、伯努利方程

I.定义：形如 $y'+P(x)y = Q(x)\cdot y^n$ （$n\neq 0, 1$ 的方程）

II.求解：换元 $z=y^{1-n}$

$\downarrow$

$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

$\boxed{\text{求方程 } \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2 \text{ 的通解}}$

解：$\because n=2$

$\therefore$ 设 $z=y^{-1}$

$\therefore$ 原方程变为

直接套公式

$z'-\frac{1}{x}z=-a\ln x$

$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -a\ln x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}+C\right]$

$=x\left[\int -a\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+C\right]$

$=x\left[-\frac{1}{2}a\ln^2 x+C\right]$

$\therefore \frac{1}{y}=x\left[-\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right]$

step 1：定 n 并换元 $z=y^{1-n}$

step 2：代入 ※ 得一阶线性非齐次

step 3：代入非通

step 4：还原 $z=y^{1-n}$

$$(2)\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x^2}{2y},\\ y(1)=1.\end{cases}$$

解：$y' - \frac{1}{2x} y = \frac{x^2}{2} \cdot y^{-1}$

$\therefore n = -1$

$\therefore z = y^2$

$\therefore z' - \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot z = 2 \cdot \frac{x^2}{2}$

即 $z' - \frac{1}{x} \cdot z = x^2$

$$z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} + C \right]$$

$$= x \left[\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + C \right]$$

$$= x \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

$\therefore y^2 = x \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$

$\therefore 1 = \frac{1}{2} + C$

$\therefore C = \frac{1}{2}$

$\therefore y^2 = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x$