附录 I

初等数学常用公式

一、代数

1. 绝对值

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

2. 指数

设 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$m,n\in\mathbf{Z}$，则

(1) $a^0=1$；　(2) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　(3) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；　(4) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(5) $(ab)^n=a^nb^n$；　(6) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$；　(7) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,(a>0,\ n\neq 0)$.

3. 对数

设 $a>0$，$a\neq 1$，$m>0$，$m\neq 1$，$x>0$，$y>0$，则

(1) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$；　(2) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；　(3) $\log_a x^b=b\log_a x$；

(4) $\log_a x=\dfrac{\log_m x}{\log_m a}$；　(5) $a^{\log_a x}=x$，$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

4. 排列组合

(1) $A_n^m=n(n-1)\cdots[n-(m-1)]=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，约定 $0!=1$.

(2) $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$.　(3) $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(4) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.　(5) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

5. 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$.

6. 因式分解

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(4) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

7. 数列的前 n 项和

(1) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $|q|\neq 1$.

(2) $a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$.

(3) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(4) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(5) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

二、三角函数

1. 度与弧度

$1°=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.017\,453\text{rad}$，$1\text{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57°17'44.8''$.

2. 平方关系

$\sin^2x+\cos^2x=1$.　$\tan^2x+1=\sec^2x$.　$\cot^2x+1=\csc^2x$.

3. 两角的和差公式

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$.

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$.

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$.

4. 和差化积公式

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.　$\sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$.

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.　$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

5. 积化和差公式

$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$.　$\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$.

$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$.　$\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$.

6. 倍角公式和半角公式

$\sin 2x=2\sin x\cos x$.　$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$.

$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$. $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$.

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$. $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

7. 万能公式

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.\quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

8. 三角形边角关系

(1)正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

(2)余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

三、几何

1. 常用的面积和体积公式

(1)三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

(2)梯形面积 $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$，其中 a,b 为上下底，h 为梯形的高.

(3)圆周长 $l=2\pi r$，圆弧长 $l=\theta r$，其中 r 为圆半径，θ 为圆心角. 圆面积 $S=\pi r^2$.

扇形面积 $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}r^2\theta$，其中 r 为圆半径，θ 为圆心角，l 为圆弧长.

(4)圆柱体体积 $V=\pi r^2 h$，侧面积 $S=2\pi rh$，全面积 $S=2\pi r(h+r)$，其中 r 为圆柱底面半径，h 为圆柱的高.

(5)圆锥体体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$，侧面积 $S=\pi rl$，其中 r 为圆锥的底面半径，l 为母线的长.

(6)球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，表面积 $S=4\pi r^2$，其中 r 为球的半径.

2. 平面解析几何

(1)距离与斜率

①两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

②直线 P_1P_2 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

(2)直线的方程

①点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$.

②斜截式：$y=kx+b$.

③两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

④截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(ab\neq 0)$.

⑤一般式：$Ax+By+C=0$，其中 A,B 不同时为零.

(3)两直线的夹角

设两直线的斜率分别为 k_1 和 k_2，夹角为 θ，则 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$.

(4)点到直线的距离

点 $P_1(x_1,y_1)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(5)二次曲线

圆：方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为 (a,b)，半径为 r.

抛物线：①当方程为 $y^2=2px$ 时，焦点为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，准线为 $x=-\dfrac{p}{2}$；

②当方程为 $x^2=2py$ 时，焦点为 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，准线为 $y=-\dfrac{p}{2}$；

③当方程为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 时，顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

椭圆：方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$.

双曲线：方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$.

附录 Ⅱ

高等数学常用公式

一、导数的基本公式

(1) $(C)'=0$.

(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$.

(4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(7) $(\sin x)'=\cos x$.

(8) $(\cos x)'=-\sin x$.

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$.

(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(16) $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

二、不定积分基本公式

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$.

(2) $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C\,(n\neq -1)$.

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

(4) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C\,(a>0,a\neq 1)$.

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$.

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

(10) $\int \tan x\sec x\mathrm{d}x=\sec x+C$.

(11) $\int \cot x\csc x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$.

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$.

(14) $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C$.

(15) $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$.

(16) $\int \sec x dx=\ln|\tan x+\sec x|+C$.

(17) $\int \csc x dx=\ln|\cot x-\csc x|+C$.

(18) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a>0)$.

(19) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C(a>0)$.

三、简易积分公式

1. 含有 $a+bx(b\neq 0)$ 的积分

(1) $\int \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$.

(2) $\int (a+bx)^u dx=\frac{1}{b(u+1)}(a+bx)^{u+1}+C(u\neq -1)$.

(3) $\int \frac{x}{a+bx}dx=\frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|)+C$.

2. 含有 $\sqrt{a+bx}(b\neq 0)$ 的积分

(1) $\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C$.

(2) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}+C$.

(3) $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{105b^3}(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}+C$.

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}dx=\frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx}+C$.

3. 含有 $x^2\pm a^2(a>0)$ 的积分

(1) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

(2) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$.

(3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

4. 含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

(1) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

(2) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

(3) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$.

5. 含有 $\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$ 的积分

(1) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

(2) $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

(3) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C.$

6. 含有$\sqrt{a^2-x^2}$ ($a>0$)的积分

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(2) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(3) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C.$

7. 含有三角函数的积分($ab\neq 0$)

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$　　(2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

(3) $\int \tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$　　(4) $\int \cot x\,dx=\ln|\sin x|+C=-\ln|\csc x|+C.$

(5) $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$

(6) $\int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

(7) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C.$　　(8) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C.$

(9) $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C.$　　(10) $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C.$

(11) $\int \sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$　　(12) $\int \cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

8. 定积分

设 $m,n\in\mathbf{N}^+$，则

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$；　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$

(5) $\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n;\end{cases}$

(6) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}(n\text{ 为大于 1 的正奇数}),\ I_1=1,\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(n\text{ 为正偶数}),\ I_0=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$