一阶常系数线性微分方程

$y' + P(x)y = Q(x)$

- $Q(x) = 0$ 齐次 $\Rightarrow y_{齐通} = Ce^{-\int P(x)dx}$
- $Q(x) \neq 0$ 非齐次 $\Rightarrow y_{非通} = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

二阶常系数 ____ 微分方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$Y_{非通} = Y_{齐通} + y^*_{非特}$

- $f(x) = 0$ 齐次 $\Rightarrow$ 特征方程 $ar^2 + bx + c = 0$ （r 即特征根）
  - $\Delta > 0$　$Y_{齐} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$　（r 不等）
  - $\Delta = 0$　$Y_{齐} = (C_1 + C_2x)e^{rx}$　（r 相等）
  - $\Delta < 0$　$Y_{齐} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$　（r 无解）
    $r = \alpha \pm \beta i$
- $f(x) \neq 0$ 非齐次
  - $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ （$x^m e^{\lambda x}$） $\Longrightarrow y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \Longrightarrow Q_m(x)$ & y^*
    - $k=0$　λ 不是特征根　$\lambda \neq r_1 \neq r_2$
    - $k=1$　λ 是单根　$\lambda = r_1 \neq r_2 \,/\, \lambda = r_2 \neq r_1$
    - $k=2$　λ 是重根　$\lambda = r_1 = r_2$
    - step 1：看 $P_m(x)$ 的 m 是多少　eg：$P_m(x) = x^2 \Rightarrow m = 2$
    - step 2：设 $Q_m(x)$ 的值　eg：$m=1$，x 的 1 次方，设 $Q_m(x) = ax + b$；$m=2$，x 的 2 次方，设 $Q_m(x) = ax^2 + bx + c$；$m = \cdots$
    - step 3：将 $Q_m(x)$、k、λ 代 y^*
    - step 4：将 y^* 代入原方程求各未知量，得 y^* 的准确式子
  - $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx] \Longrightarrow y^* = x^k e^{\lambda x}[R^1_m(x)\cos wx + R^2_m(x)\sin wx] \Rightarrow R^{12}_m(x)$ & y^*
    - step 1：看 $R_m(x)$ 的 m 是多少
    - step 2：确定 w 的值
    - step 3：设 $R_m(x)$ 的值　eg：$m=1$，x 的 1 次方，设 $R^1_m(x) + R^2_m(x) = [a\cos wx + b\sin wx]$；$m = 2 \cdots$
    - step 4：将 $R_m(x)$、k、λ 代入 y^*
    - step 5：将 $f(x)$ 整理成 $x^k e^{\lambda x}[\alpha\cos wx + \beta\sin wx]$ 的形式
    - step 6：将 y^* 代入方程左边，整理为 $[\theta\cos wx + \phi\sin wx]$ 的形式
    - step 7：作 $\begin{cases}\theta = a + b + \cdots \\ \phi = c + d + \cdots\end{cases}$ 求出各未知量
    - step 8：得出 y^*