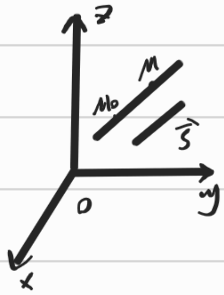
1、方向向量：

平行于已知直线的非零向量 $\vec{s}=\{m,n,p\}$ （法向量 $\vec{n}=\{a,b,c\}$）



$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{s}=\{m,n,p\}$$

2、点向式

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad \text{（连等式）}$$

注：$m、n、p$ 中最多会出现两个 0

下方是 0 的时候，上方一定是 0

3、参数式

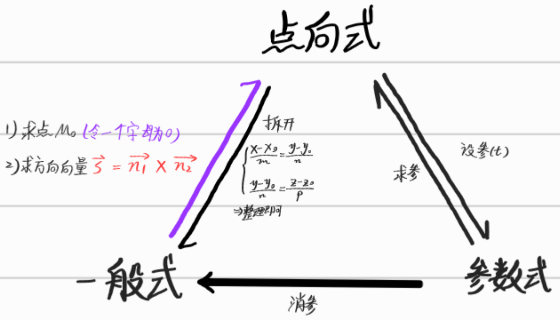
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad \text{（t是参数）}$$

4、一般式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 & (\pi_1) \\ & \nparallel \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 & (\pi_2) \end{cases} \quad \text{（不唯一）}$$

使得点向式还到一般式很大概率还回去不一样

5、三种形式之间的关系



例1. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$ ← 一般式

解：令 $z=0$，$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\therefore M_0(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},0)$

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\{4,-1,-3\}$$

$\therefore \dfrac{x+\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ ← 点向式

$\therefore \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+4t \\ y=\frac{2}{3}-t \\ z=-3t \end{cases}$ （t是参数） ← 参数式

二、线面关系

1、线与线的关系（不考虑异面）

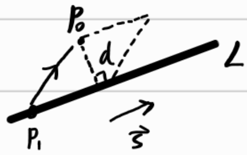
位置
- 平行　$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} // \vec{s_2}$
- 相交
  - 斜交：夹角（方向向量的夹角 φ，通常取锐角）$\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$
  - 垂直 ⊥：$\vec{s_1}\perp\vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0$

2、直线 l 与平面 π 的关系

位置
- 重合，直线 l 在平面上
- 平行，$l // \pi$，$\vec{s}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0$ $(Am+Bn+Cp=0)$
- 相交
  - 斜交：$\sin\varphi=\cos(\vec{s},\vec{n})=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$
  - A　B　C

垂直 $\perp$：$\vec{s} \parallel \vec{n}$ $\left(\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\right)$

补充：1、点到直线的距离



$l: \frac{x-1}{2}=\frac{x-3}{4}=\frac{z+5}{7}=$

$$\left.\begin{aligned} S_{\square} &= |\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s}| \\ &= 底 \times 高 = |\vec{s}| \cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

1) 在 l 上取点

2) 求 $\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s}$

3) 代入公式

例：求 $P_0(1,3,5)$ 到直线 $l \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 的距离

解：令 $y=0$，$\cdots$ $P_1(1,0,0)$

$\therefore \overrightarrow{P_1P_0} = \{0,3,5\}$

$$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{1,3,5\}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \{0,5,-3\}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{0+25+9}}{\sqrt{1+25+9}} = \cdots$$

2、平面束方程：设出所求平面，利用平面的性质求 $\lambda, \mu \cdots$

设直线 l：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$

过直线 l 的平面方程为

$$\begin{cases} \lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \\ \Rightarrow (\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z=0 \\ \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \end{cases}$$

表示过交线 l 的平面束方程

例3 求过直线$\begin{cases}2x-3y+z=0\\3x+y-9=0\end{cases}$且与向量

$a=\{1,2,5\}$ 平行 的平面方程。

解：设所求平面方程为

$\lambda(2x-3y+z)+3x+y-9=0$

$\therefore (2\lambda+3)x+(1-3\lambda)y+\lambda z-9=0$

$\vec{n}=\{2\lambda+3,1-3\lambda,\lambda\}$

代回去

$\vec{a}=\{1,2,5\}$

$(2\lambda+3)+2(1-3\lambda)+5\lambda=0$

$\therefore \lambda=-5$

$\therefore -7x+16y-5z+9=0$