1、定义：形如 $y'=\varphi(\frac{y}{x})$ 的方程

eg：$y'=\frac{x-y}{x+y} \Rightarrow y'=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

$y^2+x^2y'=xy\cdot y'$

特征 含x、y的项 的次数相同（x的次数+y的次数）

$y'=v(x)'+(v)'x$

2、求解：换元

$$\left.\begin{array}{l}\text{step① 令 } v=\frac{y}{x}\\ \text{step② 则 } y=vx\\ \text{step③ } \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\end{array}\right\}\text{必备三板斧}$$

step④ 代入原方程得 $v+x\frac{dv}{dx}=\varphi(v)$

step⑤ 分离变量 $\frac{dv}{\varphi(v)-v}=\frac{dx}{x}$

step⑥ 两边积分 $\int\frac{dv}{\varphi(v)-v}=\int\frac{dx}{x}$

$$\boxed{\text{eg：} y'=\frac{xy-y^2}{x^2+2xy}}$$

解：原方程化为：

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\cdot\frac{y}{x}}$$

设 $\frac{y}{x}=v$ $y=v\cdot x$

$y'=v+xv'$

$v+xv'=\frac{v-v^2}{1-2v}$

$xv'=\frac{v^2}{1-2v}$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{1-2v}$$

$$\frac{1-2v}{v^2}dv=\frac{1}{x}dx$$

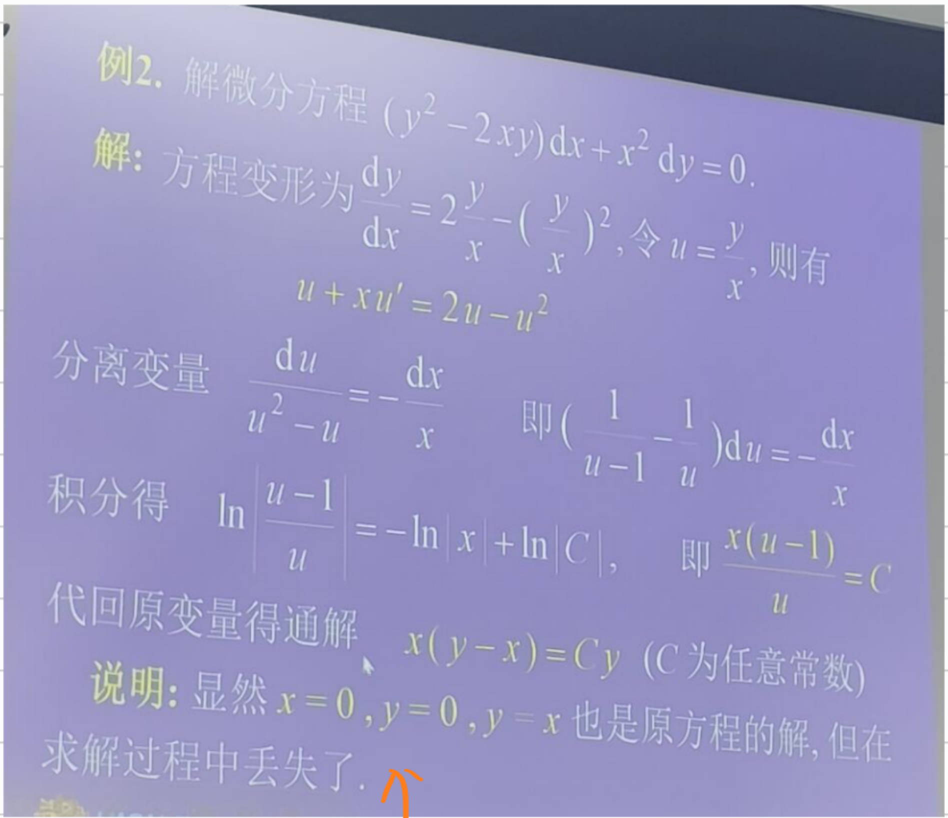
$$-\frac{1}{v}-2\ln v=\ln x+\ln C$$

$$-\frac{1}{v}=\ln C\cdot x\cdot v^2$$

$$Cxv^2=e^{-\frac{1}{v}}$$

$$\therefore Cx\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2=e^{-\frac{x}{y}}$$

$$\therefore C\,y^2=x\cdot e^{-\frac{x}{y}}$$



找回来就是把这3个带回去,相等就求出缺的解

⇓

通解不一定等于所有解 (线性的时候等于所有解)

⇓

做题注意看求"通解"还是"所有解(解微分方程)"

3、可化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$ $\Rightarrow$ 干掉常数

令 $x=X+h$，$y=Y+k$ $\Rightarrow$ x和X，y和Y只差了一个常数不影响 $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$$

两种情况讨论 ① $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ $\begin{cases} h=\cdots \\ k=\cdots \end{cases}$ 解出来代入就行

② $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ $a_1=\lambda a$ $b_1=\lambda a$

$$y'=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$$

$$U=ax+by$$

$$\frac{dU}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dU}{dx}=\left(\frac{U+c}{\lambda U+c_1}\right)b+a$$ 只有U $\int\cdots dU=\int dx$