

I、复合联结词

- 排斥或: $p \vee q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- 与非式: $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg (p \wedge q)$
- 或非式: $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$

II、真值函数

问题：含 n 个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

答案为 2^{2^n} 个，为什么？

定义 称定义域为 $\{00\cdots 0, 00\cdots 1, \cdots, 11\cdots 1\}$ ，值域为 $\{0,1\}$ 的函数是 **n 元真值函数**，定义域中的元素是长为 n 的0,1串. 常用 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 表示 F 是 n 元真值函数.

共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

III、命题公式与真值函数

对于任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A ，都存在惟一的一个 n 元真值函数 F 为 A 的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如: $p \rightarrow q, \neg p \vee q, (\neg p \vee q) \vee (\neg (p \rightarrow q) \wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

$p \ q$	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
$p \ q$	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

4. 联结词的全功能集

定义 在一个联结词的集合中, 如果一个联结词可由集合中的其他联结词定义, 则称此联结词为**冗余的联结词**, 否则称为**独立的联结词**.

定义 设 S 是一个联结词集合, 如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示, 则称 S 是**联结词全功能集**.

说明:

若 S 是联结词全功能集, 则任何命题公式都可用 S 中的联结词表示.

若 S_1, S_2 是两个联结词集合, 且 $S_1 \subseteq S_2$. 若 S_1 是全功能集, 则 S_2 也是全功能集.

\neg, \vee 联结词的全功能集实例

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

$$\begin{cases} p \vee q \Leftrightarrow \neg \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q \\ p \wedge q \Leftrightarrow \neg \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg (p \rightarrow \neg q) \\ p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg (q \rightarrow p)) \end{cases}$$

以上联结词都是联结词的全功能集

而 $\{\vee\}, \{\wedge\}$ 等则不是联结词全功能集.

