# 离散结构

谭涛 QQ:358552082

# 课程安排

- 成绩构成=期末考试成绩+平时成绩
- 期末考试占70%
- 平时成绩占30%：平时成绩构成=考勤+作业

  其中考勤占平时成绩的40%

  作业占平时成绩的60%

# 课程主要内容

- 数理逻辑
- 集合论
- 图论
- 代数结构

# 数理逻辑部分

- 第1章  命题逻辑
- 第2章  一阶逻辑

# 第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.7 推理理论

# 1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 联结词
- 命题常项
- 命题变项

# 命题与真值

命题: 判断结果惟一的陈述句

命题的真值: 判断的结果

真值的取值: 真与假

真命题: 真值为真的命题

假命题: 真值为假的命题

注：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题

**例1** 下列句子中哪些是命题?

| | |
|---|---|
| (1) $\sqrt{2}$是无理数. | 真命题 |
| (2) $2+5=8$. | 假命题 |
| (3) $x+5>3$. | 真值不确定 |
| (4) 你有铅笔吗? | 疑问句 |
| (5) 这只兔子跑得真快呀! | 感叹句 |
| (6) 请不要讲话! | 祈使句 |
| (7) 我正在说假话. | 悖论 |

(3)~(7)都不是命题

# 命题的分类

**简单命题(原子命题)：**

简单陈述句构成的命题

**复合命题：**

由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题

# 简单命题符号化

用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ ($i \geq 1$）表示简单命题

用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

$p$: $\sqrt{2}$是有理数，则 $p$ 的真值为 0

$q$：2 + 5 = 7，则 $q$ 的真值为 1

# 联结词与复合命题

## 1.否定式与否定联结词“¬”

**定义** 设$p$为命题，复合命题 “非$p$”（或“$p$的否定”）称为$p$的**否定式**，记作$\neg p$，符号$\neg$称作**否定联结词**，并规定$\neg p$ 为真当且仅当$p$为假.

## 2.合取式与合取联结词“∧”

**定义** 设$p, q$为二命题, 复合命题“$p$并且$q$”(或“$p$与$q$”）称为$p$与$q$的**合取式**，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作**合取联结词**，并规定 $p\wedge q$为真当且仅当$p$与$q$同时为真.

注意：描述合取式的灵活性与多样性

分清简单命题与复合命题

例2 将下列命题符号化.

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令 $p$：王晓用功，$q$：王晓聪明，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $q \wedge \neg p$

令 $r$ : 张辉是三好学生，$s$ :王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 $t$ : 张辉与王丽是同学，$t$ 是简单命题 .

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是句子的主语成分，因而(5)中句子是简单命题.

## 3.析取式与析取联结词“$\vee$”

**定义** 设 $p, q$为二命题，复合命题“$p$或$q$”称作$p$与$q$的**析取式**，记作$p\vee q$，$\vee$称作**析取联结词**，并规定$p\vee q$为假当且仅当$p$与$q$同时为假.

**例3** 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.

(2) 2或3是素数.

(3) 4或6是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王晓红生于1991年或1992年.

解 令 $p$:2是素数, $q$:3是素数, $r$:4是素数, $s$:6是素数,

则 (1), (2), (3)分别符号化为:

$p \vee r$ , $p \vee q$, $r \vee s$,

它们的真值分别为 1, 1, 0, 均为相容或.

令 $t$ :小元元拿一个苹果，$u$:小元元拿一个梨,

则 (4) 符号化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

令$v$ :王晓红生于1991年, $w$:王晓红生于1992年,

则 (5) 既可符号化为 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可符号化为 $v \vee w$ , 为什么?

(4), (5) 为排斥或.

## 4.蕴涵式与蕴涵联结词“$\rightarrow$”

**定义** 设 $p,q$为二命题，复合命题 “如果$p$, 则$q$” 称作$p$与$q$的**蕴涵式**，记作$p\rightarrow q$，并称$p$是蕴涵式的**前件**，$q$为蕴涵式的**后件**. $\rightarrow$称作**蕴涵联结词**，并规定，$p\rightarrow q$为假当且仅当 $p$ 为真 $q$ 为假.

$p \to q$ 的逻辑关系：$q$ 为 $p$ 的必要条件

“如果 $p$，则 $q$”的不同表述法很多：

- 若 $p$，就 $q$
- 只要 $p$，就 $q$
- $p$ 仅当 $q$
- 只有 $q$ 才 $p$
- 除非 $q$, 才 $p$ 或 除非 $q$, 否则非 $p$,

当 $p$ 为假时，$p \to q$ 为真

常出现的错误：不分充分与必要条件

例4 设 $p$:天冷， $q$:小王穿羽绒服,

将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $\neg q \to \neg p$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(6) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $\neg p \to \neg q$

(7) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

注意： $p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）

## 5.等价式与等价联结词“↔”

**定义** 设$p$，$q$为二命题，复合命题 “$p$当且仅当$q$”称作$p$与$q$的**等价式**，记作$p \leftrightarrow q$，↔称作**等价联结词**. 并规定$p \leftrightarrow q$为真当且仅当$p$与$q$同时为真或同时为假.

说明:

(1) $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系:$p$与$q$互为充分必要条件

(2) $p \leftrightarrow q$为真当且仅当$p$与$q$同真或同假

例5 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$.

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数.

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起.

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲.

它们的真值分别为 1，0，1，0.

以上给出了5个联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算; 若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

注意：本书中使用的 括号全为圆括号.

# 1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 公式的分类

# 命题变项与合式公式

**命题常项**：简单命题

**命题变项**：真值不确定的陈述句

**定义 合式公式 (命题公式, 公式)** 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots, p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式

(2) 若$A$是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若$A$, $B$是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

# 公式的赋值

**定义** 给公式$A$中的命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$指定一组真值称为对$A$的一个**赋值**或**解释**

**成真赋值**: 使公式为真的赋值

**成假赋值**: 使公式为假的赋值

说明:

赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$之间不加标点符号，$\alpha_i$=0或1.

$A$中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给$A$赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$

$A$中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给$A$赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$

**含$n$个变项的公式有$2^n$个赋值.**

# 真值表

**真值表**: 公式$A$在所有赋值下的取值情况列成的表

**例6** 给出公式的真值表

$A= (q\to p) \wedge q\to p$ 的真值表

| $p \quad q$ | $q\to p$ | $(q\to p) \wedge q$ | $(q\to p) \wedge q\to p$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 |

例7 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

| $p$ $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $\neg(\neg p \vee q)$ | $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

## 例8 $C=(p\vee q)\rightarrow\neg r$ 的真值表

| $p$ $q$ $r$ | $p\vee q$ | $\neg r$ | $(p\vee q)\rightarrow\neg r$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 0 |

# 公式的类型

定义 设$A$为一个命题公式

(1) 若$A$无成假赋值，则称$A$为重言式(也称永真式)

(2) 若$A$无成真赋值，则称$A$为矛盾式(也称永假式)

(3) 若$A$不是矛盾式，则称$A$为可满足式

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

上例中$A$为重言式，$B$为矛盾式，$C$为可满足式

$A=(q\to p)\wedge q\to p$，$B=\neg(\neg p\vee q)\wedge q$，$C=(p\vee q)\to\neg r$