一、空间曲线方程

1、一般方程

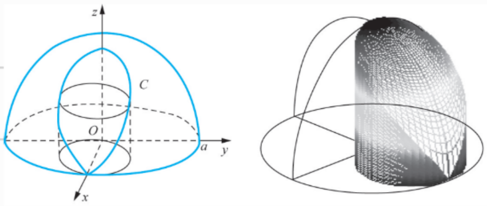
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

转化

1) 利用其中一个圆的 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$

2) 代入得 z

3) 终得 $\begin{cases} x=\cdots \\ y=\cdots \\ z=\cdots \end{cases}$



eg: $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} & ① \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 & ② \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$ ③

将③代入①得 $z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}$

综上 $\begin{cases} x=\frac{a}{2}\cos\theta+\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta} \end{cases}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$

2、参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

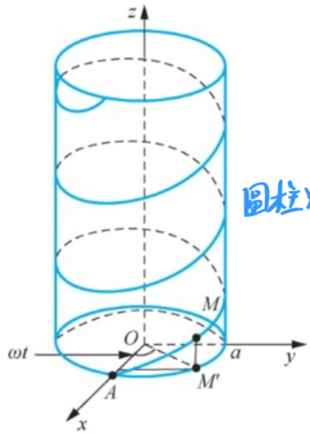
例 8.28 螺旋线是实际中常用的曲线，例如：平头螺丝钉的螺纹就是螺旋线．螺旋线的运动轨迹如图 8.32 所示．空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，点 M 的轨迹即为螺旋线．试建立其数学模型．

解 取时间 t 为参数，建立直角坐标系．设 $t=0$ 时，动点在 x 轴上点 $A(a,0,0)$ 处，经过 t 时间，动点由 A 运动到点 $M(x,y,z)$．点 M 在 xOy 平面的投影为 $M'(x,y,0)$．由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以 $\angle AOM'=\omega t$，$M'M=vt$，从而得螺旋线方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \\ z=vt. \end{cases}$$

令 $\theta=\omega t$，$b=\dfrac{v}{\omega}$，螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta. \end{cases}$$



圆柱螺旋线

图 8.32

当 $\theta=2\pi$ 时，点 M 就上升固定的高度为 $h=2\pi b$，这个高度在工程技术上叫作螺距．

二、空间曲线在坐标面上的投影

1、投影曲线

(1) 明确向什么地方投影 (eg: (xOy))

(2) 消掉 z，$H(x,y)=0$ // z 柱面

(3) 写出投影曲线

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

2.投影的区域

(1) 明确向什么地方投影 (eg: (XOY))

(2) 消掉 Z，$H(x,y)=0$ // Z柱面

(3) 写出投影区域

$$\begin{cases} H(x,y)\le 0 \\ z=0 \end{cases}$$

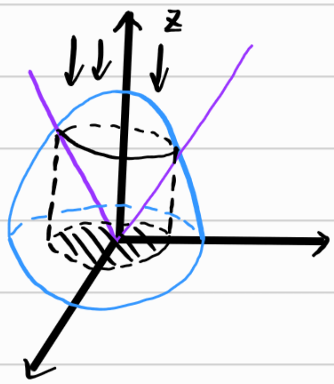
eg: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & ① \\ x^2+y^2-2z-2y=-1 & ② \end{cases}$

①-②得 $z=1-y$ ③

将③代入①得 $x^2+y^2+(1-y)^2=1$

综上 $\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

eg: $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$



解：由 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=1$

∴ 投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

投影区域为 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$