1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

定义 若等价式A↔B是重言式，则称A与B等值，记作A⇔B，并称A⇔B是等值式

说明：定义中，A,B,⇔均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现.

例如，在 $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$中，r为左边公式的哑元.

用真值表可验证两个公式是否等值

请验证：$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

$p\rightarrow(q\rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p\rightarrow q)\rightarrow r$

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等值，但当命题变项较多时，工作量很大.证明公式等值的另一个方法是:

利用已知的等值式通过代换得到新的等值式.

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程
2. 等值演算的基础：
   (1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性
   (2) 基本的等值式
   (3) 置换规则（见3）
3. 置换规则
   设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式
   若 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$

基本等值式

双重否定律	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
幂等律	$A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$. $A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

应用举例

一、证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\land q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\lor(\neg q\lor r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\lor r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\land q)\lor r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\land q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

今后在注明中省去置换规则

注意：用等值演算能直接证明两个公式不等值吗？

应用举例

二、证明两个公式不等值

例3　证明：　$p\to(q\to r)\ \not\Leftrightarrow\ (p\to q)\to r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是：找到一个赋值使一个成真,另一个成假.

方法一　真值表法

方法二　观察赋值法．容易看出000，010等是左边的成真赋值，是右边的成假赋值.

方法三　用等值演算先化简两个公式，再观察.

应用举例

三、判断公式类型

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

解 $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

问：最后一步为什么等值于1？

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

解 $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式.如101是它的成真赋值,000是它的成假赋值.

总结：*A*为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

*A*为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一,应尽量使演算短些

1.4 范式

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式

析取范式与合取范式

（1）文字:命题变项及其否定的总称

（2）简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

（3）简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

（4）析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式

（5）合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

析取范式与合取范式(续)

（6）**范式**:析取范式与合取范式的总称

（7）**公式*A*的析取范式**: 与*A*等值的析取范式

（8）**公式*A*的合取范式**: 与*A*等值的合取范式

说明：

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式吗？

形如 $p\wedge\neg q\wedge r, \neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式是哪一种范式？为什么？

命题公式的范式

定理 (范式存在定理)

任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

公式的范式存在，但不惟一，这是它的局限性

求公式的范式举例

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去$\to$）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例

(2) $B=(p\to\neg q)\to r$

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

极小项与极大项

定义 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i（$1\le i\le n$）个文字出现在左起第i位上，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

说明：

n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项

2^n个极小项（极大项）均互不等值

用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.

极小项与极大项(续)

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取（合取）范式：与A等值的主析取（合取）范式

定理（主范式的存在唯一定理)任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是惟一的.

求公式的主范式的步骤

主析取范式和主合取范式的求法：

(1) 先通过等值推演将所给的命题公式化为析取范式（合取范式）；

(2) 若某个简单合取式（简单析取式）A中既不含变项p_i，又不含变 项$\neg p_i$，则通过：

$$A \Leftrightarrow A \wedge 1 \Leftrightarrow A \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (A \wedge p_i) \vee (A \wedge \neg p_i)$$

或： $A \Leftrightarrow A \vee 0 \Leftrightarrow A \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (A \vee p_i) \wedge (A \vee \neg p_i)$

补齐变项。

(3) 消去重复变项，即用m_i,M_i分别代替$m_i \vee m_i$,$M_i \wedge M_i$。

求公式的主范式

例6 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,　　　（析取范式）　　①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$,　　　　　　　②

求公式的主范式(续)

r

$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$（主析取范式）

求公式的主范式(续)

(2) 求A的主合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$,　　（合取范式）　①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$,　　②

求公式的主范式(续)

$q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

一、求公式的成真赋值和成假赋值

设公式A含n个命题变项，A的主析取范式有s个极小项，则A有s个成真赋值，它们是极小项下标的二进制表示，其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$,

其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111,

其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

二、判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$的主合析取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的应用

三、判断两个公式是否等值

例7 用主析取范式判断下述两个公式是否等值：

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明：

由公式*A*的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

用公式*A*的真值表求*A*的主范式.

主范式的应用

四、解决实际问题

例8 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察，需满足下述条件：

（1）若A去，则C必须去；

（2）若B去，则C不能去；

（3）A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解　记 p:派A去，　q:派B去, r:派C去

$(1)\ p\to r,\quad (2)\ q\to\neg r,\quad (3)\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$

$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$

$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

1.5 联结词全功能集

- 复合联结词
  - 排斥或
  - 与非式
  - 或非式
- 真值函数
- 联结词全功能集

复合联结词

排斥或: $p \forall q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

与非式: $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg (p \wedge q)$

或非式: $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$

真值函数

问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

答案为 2^{2^n}个，为什么？

定义 称定义域为{00…0, 00…1, …, 11…1}，值域为{0,1}的函数是n元真值函数，定义域中的元素是长为n的0,1串. 常用F:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 表示F是n元真值函数.

共有 2^{2^n}个n元真值函数.

命题公式与真值函数

对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如：$p \rightarrow q$, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 等都对应表中的$F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

联结词的全功能集

定义 在一个联结词的集合中，如果一个联结词可由集合中的其他联结词定义，则称此联结词为冗余的联结词，否则称为独立的联结词.

例如, 在联结词集{$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$}中，由于

$$p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q,$$

所以，$\rightarrow$为冗余的联结词; 类似地，$\leftrightarrow$也是冗余的联结词.

又在{$\neg$, $\wedge$, $\vee$}中，由于$p\wedge q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$，

所以，$\wedge$是冗余的联结词. 类似地，$\vee$也是冗余的联结词.

联结词的全功能集

定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词全功能集.

说明：

若S是联结词全功能集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.

若S_1, S_2是两个联结词集合，且$S_1 \subseteq S_2$. 若S_1是全功能集, 则S_2也是全功能集.

联结词的全功能集实例

(1) $S_1=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3=\{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4=\{\neg, \vee\}$

(5) $S_5=\{\neg, \rightarrow\}$

以上联结词都是联结词的全功能集

而$\{\vee\}$,$\{\wedge\}$等则不是联结词全功能集.