

1. 定义: 形如 $y' = f(x) \cdot g(y)$ 的方程

特征: 含 x 的表达式与含 y 的表达式之积(商)

2. 求解:

(1) $y' \rightarrow \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$

(2) 分离: $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) \cdot dx$

(3) 积分 $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) \cdot dx$

$$G(y) = F(x) + C$$

例1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$

两边积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx$

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$

或 $\ln|y| = x^3 + \ln|C|$

即 $\ln|y| = \ln e^{x^3+C_1} \Rightarrow y = \pm e^{x^3+C_1}$

令 $C = \pm e^{C_1}$

$y = C e^{x^3}$

(C 为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解 $y=0$)

说明: 在求解过程中
每一步不一定是同解
变形, 因此可能增、
减解.

$y \neq 0$
使 $y=0$ 缺失

找回

把上面的 $y=0$ 找回来了

另解:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx$$

$$\ln y = x^3 + \ln C$$

$$\therefore y = C e^{x^3}$$

直接不用管 y 的绝对值
< 考试这么做 >

只要未知函数前有 \ln , 则另一侧转化成 $\ln e^n$ 来做

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy dx + (x^2 + 1) dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

解: 分离变量得 $\frac{1}{y} dy = -\frac{x}{x^2+1} dx$

$$\therefore \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\therefore \ln y = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln C$$

$$\therefore \ln y + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \ln C$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1} \cdot y) = \ln C$$

$$\therefore y\sqrt{x^2+1} = C \quad (C \text{ 为任意值})$$

当初始条件 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$

$$\therefore y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3、求 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 的通解

表示对x求导

$$\text{解: } e^{-y} dy = e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C$$

$$\text{即 } (e^x + C)e^y + 1 = 0 \quad (C < 0)$$

另解: 设 $x+y=U$, 则 $U' = x+y'$

$$\therefore U' - 1 = e^{x+y}$$

$$\therefore U' = 1 + e^U$$

$$\therefore \frac{dU}{dx} = 1 + e^U$$

$$\int \frac{1}{1+e^U} dx = \int dx$$

$$\int \frac{dU}{1+e^U} = x + C$$

$$U - \ln(1+e^U) = x + C$$

所求通解: $\ln(1+e^{x+y}) = y - C$ (C 为任意值)

$$\int \frac{(1+e^U) - e^U}{1+e^U} = dU$$

