极限也存在运算法则

求极限方法
- ① 洛必达（上下导）
  - 可多次求导
  - 注意用等价无穷小替换
  - 适当外移去常数
  - ↑ 0/0 型 ↓ 先用等价无穷小化简
- ② 正常方法
  - 分子分母同除以 n 的最高次方
  - 抓大头（分母的最高次方的系数）
  - 有理化 $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ 还可以用上下同时除 n 的次方化成 $\sqrt{A+\frac{1}{n}}$，n 的极限知道，就可以化简了
  - 同除以底数绝对值大的 n 次方

判断极限的存在：夹逼准则

eg: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{n^2+n} & & \frac{n}{n^2+n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \times n & & \times n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{mini} & \Longrightarrow \text{得极限} \Longleftarrow & \text{max} \end{array}$$

重要极限 I：

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$$

重要极限II： $\lim\limits_{\Delta\to0} = (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$

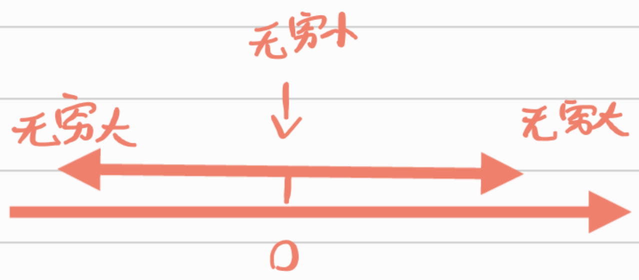
$\lim\limits_{\Delta\to0} = [1+\frac{1}{\Delta}]^{\Delta} = e$　　$\lim\limits_{\Delta\to0} = [1-\frac{1}{\Delta}]^{\Delta} = e^{-1}$

$$\boxed{\lim 底数^{指数} = e^{\lim 指数(底数-1)}}$$

无穷小

“越小阶越高”

- 高阶无穷小　$=0$　　$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小
- 低阶无穷小　$=\infty$
- 同阶无穷小　$=C$
- 等价无穷小　$=1$
- k阶无穷小　$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C$



等价无穷小的替换

$\left.\begin{matrix}\sin x\\ \arcsin x\\ \tan x\end{matrix}\right\} \Rightarrow x$

$\left.a^x-1\right\} \Rightarrow x\ln a$

$$\left.\begin{array}{l}\arctan x \\ \ln(1+x) \\ e^x - 1\end{array}\right\} \Rightarrow x$$

$\sec x - 1 \Leftrightarrow 1 - \cos x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}$

$(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{n}$

连续性

做题利用这个

- 连续 左=中=右 $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$
- 左连续 $f_- x = f x$
- 右连续 $f_+ x = f x$

$\Updownarrow$ 注意区分 做题时

可导的 $f'_-(x) = f'_+(x)$

间断点

- 第一类间断点 左右都有
  - 可去间断点 $f(0^-) = f(0^+)$
  - 左≠右 跳跃间断点
- 第二类间断点 左右只有一个且一个或两个是$\pm\infty$ 无穷间断点
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在 且 $f(x)$无限振荡 振荡间断点

零点存在性定理

诱导公式去做

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{4n^2+2n})$.

加一个周期,值不变

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{4n^2+2n} - 2n\pi)$ 有理化

$\lim \sin\left(\frac{2n\pi^2}{\ldots}\right)$

$$=\lim\sin\left(\frac{[illegible]}{\pi\sqrt{4n^2+2n}+2n\pi}\right)$$

上下同除

$$=\lim\sin\left(\frac{2\pi^2}{\pi\sqrt{4+\frac{2}{n}}+2\pi}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=1$$

☐

函数在一点连续 = 这一点的极限=函数值

$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = A$ 当 $f(x)\to 0$ 时，$g(x)$ 也一定 $\to 0$

不然无法得出结果