1、$y^{(n)}=f(x)$　　特征：右边只有x

求解：逐阶积分 反向卷心菜

$$\boxed{eg: y'''=e^{2x}+\cos x}$$

解：$y''=\int(e^{2x}+\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}+\sin x+C_1$

$y'=\int(\frac{1}{2}e^{2x}+\sin x+C_1)dx$

$=\frac{1}{4}e^{2x}-\cos x+C_1x+C_2$

$y=\frac{1}{8}e^{2x}-\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$

2、$y''=f(x,y')$　　特征：右边含x，而不含y

求解：换元降阶　设 $y'=P(x)$

$y''=P'(x)$

$\therefore P'(x)=f(x,P)$ $\Rightarrow$ 一阶可求，最后把y换回来即可

3、$y''=f(y,y')$　　特征：不含x（x用隐函数给出），有y''，y'，y

求解：换元降阶

设 $y'=p(y)$　　对x求导

$y''=\frac{dp}{dx}$

$=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'$

$=p\cdot\frac{dp}{dy}$

$\therefore p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 一阶（分离）

例2. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy'\\ y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=3\end{cases}$

解：设 $y'=p$ ，$y''=p'$

$\therefore (1+x^2)p' = 2xp$

$\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx$

边积分边求常数

$\int\frac{1}{p}dp = \int\frac{2x}{1+x^2}dx$

$\ln p = \ln(1+x^2) + \ln C$

$p = C(1+x^2)$

$y' = C(1+x^2)$

$\therefore y = Cx + \frac{C}{3}x^3 + C_1$

$\therefore \begin{cases} C_1 = 1 \\ C = 3 \end{cases}$

$\therefore y = 3x + x^3 + 1$

$\boxed{\text{求解：} yy'' - y'^2 = 0}$ →二阶

解：设 $y'=p$ ，$y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ $\left(y''=(y')'=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\cdot\frac{dp}{dy}=p\cdot\frac{dp}{dy}\right)$

代回式子

$y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$

$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$

当 $p=0$ 时，$y'=0$，$y=C$

当 $\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0$ 时，$y\frac{dp}{dy}=p$

$\int\frac{1}{p}dp = \int\frac{1}{y}dy$

积两次得出结论

$\therefore p = C_1 y$

$\Downarrow$

$\therefore y' = C_1 y$

$\int\frac{1}{y}dy = \int C_1 dx$

$\therefore y = C_2 e^{C_1 x}$

例5. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件,得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^y$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $\quad 1 - e^{-y} = x$