一、平面向量

1、法向量：垂直于平面的非零向量，记为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

2、点法式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

3、一般式方程：

$\Leftarrow$ ②推③

$$Ax+By+Cz=D$$ (找关系)　$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为平面的一个法向量

知3个独立条件：

例1. 求过三点 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$, $M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

点法式求解：解：$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,4,-6\}$

$$\overrightarrow{M_2M_3}=\{1,-1,5\}$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & 6\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=\{14,9,-1\}$$

$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$ 即 $14x+9y-z-15=0$

$\therefore$ 平面 Π 的方程是 $14x+9y-z-15=0$

一般式求解　解：设所求平面方程为 $Ax+By+Cz=D$

$$\therefore\begin{cases}2A-B+4C=D & ①\\ -A+3B-2C=D & ②\\ 2B+3C=D & ③\end{cases}$$ $\Leftarrow$ (将 M_1, M_2, M_3 代入得)

解之得：　$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\therefore ①-②: 3A-4B+6C=0\\ ③-②: A-B+5C=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3A-4B=-6C\\ A-B=-5C\end{cases}$

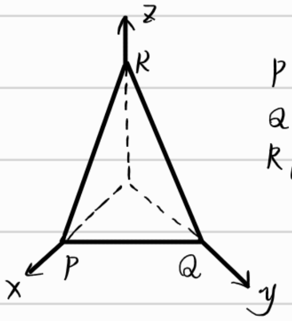
$$\therefore\begin{cases}A=-14C\\ B=-9C\\ D=-15C\end{cases}$$

$$\therefore -14Cx-9Cy+Cz=-15C$$

$$\therefore 14x+9y-z=15$$

4、截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\quad(a,b,c\neq 0)$$



$P(a,0,0)$　x 轴上截距是 a

$Q(0,b,0)$

$R(0,0,c)$

$V_{锥} = \frac{1}{3} S_{底} h = \frac{1}{6}|abc|$

二、几个特殊方程

$\pi: Ax+By+Cz=D$

1、$D=0 \Leftrightarrow$ 平面 π 过原点

y轴 z轴同理
$$\begin{cases} 2、A=0 & By+Cz=D \quad \pi // x\text{轴} \\ 3、A=D=0 & By+Cz=0 \quad \pi \text{过} x \text{轴} \end{cases}$$

4、$A=B=0 \quad Cz=D \quad \pi // xoy$ 面

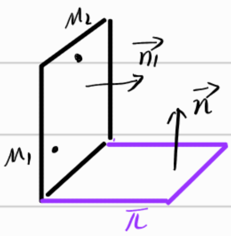
三、平面的位置关系

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z=D$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z=D$

位置
- 平行 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
  - $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ (重合)
- 相交
  - 斜交 夹角公式 $\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
  - 垂直 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面 $\prod: x+y+z=0$，求其方程．



解：$\because \vec{n} = \{1,1,1\}$

$\therefore \overrightarrow{M_1M_2} = \{-1,0,-2\}$

$\therefore \vec{n_1} = \vec{n} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{-2,1,1\}$

$\therefore -2x+(y-1)+(z+1)=0$ 即 $2x-y-z=0$

四、点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面

$\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $\quad d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(点到平面的距离公式)

五、平面到平面的距离

求两个平行平面 $x-y+3z+1=0$ 与 $x-y+3z-5=0$ 间的距离.

平行的A,B,C相同
但距离只能算

在平面 $x-y+3z+1=0$ 上选取点 $(-1,0,0)$

$$d=\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{11}}{11}$$