一、两向量的数量积

1、定义：$\vec{a}$与$\vec{b}$的模及夹角的余弦之积

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$ 为$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（点积）

2、非零向量的夹角计算

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

3、$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

（充要条件）　　（数量积为0）

4、几个常用结论　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$$\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{x轴}=\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{y轴}=\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{z轴}=1$$

x轴　y轴　z轴上的单位向量

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

5、向量的数量积的坐标表示

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

同名坐标之积，之和，即为数量积

补充：1、二阶行列式：

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

副对角　主对角

2、三阶行列式

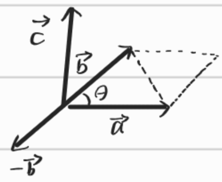
$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{vmatrix}=aek+bfg+dhc-ceg-bdk-fha$$

二、两向量的向量积

1、定义：若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是三个非零向量

满足：

大小：$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$



方向：$\vec{c}$既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$

且满足右手法则

则称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，写作 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

注：① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ ⇒ 不满足交换律

② $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 的几何意义：以 a b 为邻边的平行四边形 $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{c}|$

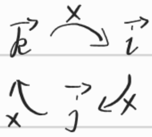
$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{c}|$

③ $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

2、$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

3、几个常用结论：$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

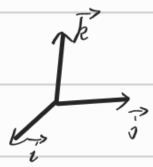


$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}$

4、向量积的坐标表示：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$



$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}-(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$

由此可以推出向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和向量 $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ 的向量积的坐标表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为了便于记忆，借助于线性代数中的二阶行列式及三阶行列式，则有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

注 对两个非零向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则有

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

例 8.7 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,-1,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,-1\}$，求 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=\{3,-1,-2\}\times\{2,4,-2\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}.$

求 $\vec{a}$ 和 $2\vec{b}$ 的单位向量 $\vec{c}$

$\vec{c}=\vec{a}\times2\vec{b}=\{10,2,14\}$

$$\therefore \vec{c^{\circ}} = \pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \cdots\cdots$$