1.7 命题逻辑的推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与自然推理系统P
- 构造证明

推理的形式结构—问题的引入

推理举例:

(1) 6是偶数当且仅当6能被2整除.

(2) 若$A\cup C\subseteq B\cup D$，则$A\subseteq B$且$C\subseteq D$.

上面(1)是正确的推理，而(2)是错误的推理.

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

证明: 描述推理正确或错误的过程.

推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时, B也为真, 则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推B的推理正确 , 否则推理不正确（错误）.

定理 “$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B” 的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论： B

若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

应用

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

证明的形式结构为: $(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg(p\wedge\neg q)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

应用

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

证明的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$
$$\Leftrightarrow \neg\,((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$
$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$
$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

在研究推理过程中，人们发现了一些重要的重言蕴含式，并将它们作为推理定律，在推理过程中可直接引用。常用的推理定律有：

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理定律 (续)

$(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\wedge(A\vee\neg A) \Rightarrow B$

构造性二难（特殊形式）

$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$

破坏性二难

说明:

A, B, C为元语言符号

若某推理符合某条推理定律，则它自然是正确的

$A\Leftrightarrow B$产生两条推理定律: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$

自然推理系统P

前已述及, 可以用真值表法、等值演算法和主析取范式法来判断推理是否正确。但当推理中包含的命题变项较多时, 这些方法的演算量很大. 因而需要对推理进行严谨的证明。证明应在推理系统中进行.

注:“证明”是一个描述推理过程的命题公式序列, 其中的每个公式或者是已知前提, 或者是由某些前提应用推理规则得到的结论.

案例：一公安人员审查一起案件，事实如下：

(1)张三（p）或李四（q）盗窃了计算机机房的一台电脑；

(2)若是张三所为，则作案时间（r）不能发生在午夜前；

(3)若李四的证词正确（s），则午夜时机房的灯未灭；

(4)若其证词不正确，则作案时间发生在午夜前；

(5)午夜时机房的灯全灭了（t）。

前提：$p \vee q$， $p \to \neg r$，$s \to \neg t$，$\neg s \to r$，t

结论： p或q

观察可知通过等值演算或主范式的求解，演算量大，此例的求解可放在自然推理系统P中进行。

定义 自然推理系统P由以下三部分要素组成:

1. 字母表:

(1) 命题变项符号: p, q, r, ···

(2) 联结词符号: $\neg$,$\wedge$,$\vee$ $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(3)逗号与括号: ， , ( )

2. 合式公式集

3. 推理规则:

(1) 前提引入规则: 在证明的任何步骤上都可引入前提;

(2) 结论引入规则: 在证明的任何步骤上所得到的结论都可做为后续证明的前提.

(3) 置换规则: 在证明的任何步骤上, 命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换.

推理规则

(4)假言推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

(5)附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

（6）化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

（7）拒取式规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8)假言三段论规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad B\rightarrow C}{\therefore A\rightarrow C}$$

(9)析取三段论规则

$$\frac{A\vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

（10）构造性二难推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad C\rightarrow D \quad A\vee C}{\therefore B\vee D}$$

（11）破坏性二难推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad C\rightarrow D \quad \neg B\vee\neg D}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12)合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A\wedge B}$$

构造证明:

当命题变项比较少时，用之前3个方法比较方便，采用形式结构“ $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\to B$”.

而在构造证明时，采用形式结构“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$，结论: B”.

1.直接证明法

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，

明天不是星期一和星期三.

直接证明法

解　设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

形式结构为

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明：

① $r\to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\to r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

2.附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法

例3 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

形式结构

前提：$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

附加前提证明法

证明

① $p \to r$　　前提引入

② $r \to \neg s$　　前提引入

③ $p \to \neg s$　　① ②假言三段论

④ s　　附加前提引入

⑤ $\neg p$　　③ ④拒取式

⑥ $p \vee q$　　前提引入

⑦ q　　⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

3.归谬法（反证法）

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

归谬法

例4 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

①$r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	① ②拒取式
④ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入

归谬法

⑤ $\neg(p\wedge q)$	③ ④析取三段论
⑥ $\neg p\vee\neg q$	⑤置换
⑦ q	结论否定引入
⑧ $\neg p$	⑥ ⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

请用直接证明法证明之