

Estruturas Criptográficas 2022/23 — TP1. Problema 2

Grupo 7. Leonardo Berteotti e Paulo R. Pereira

May 2, 2023

```
[1]: import random
import numpy as np
from cryptography.hazmat.primitives import hashes
```

1 Implementação do KEM IND-CPA-secure

Na resolução do problema será criada uma classe que implementará o algoritmo KEM, com o objetivo de ofuscar chaves, que a própria classe gera. Para cumprir esse objetivo, é necessário implementar 3 funcionalidades:

Encapsulamento

Esta função tem o objetivo de ofuscar a chave gerada pelo algoritmo. Para isso, inicialmente, a função gera pequenos erros a partir da função *errorGen* que gera dois polinômios de tamanho r , sendo que a soma dos pesos dos dois erros seja igual a t . Após este primeiro passo, gera-se a hash da informação a ser encapsulada utilizando os erros gerados. Para encapsular a informação, é necessário gerar um r aleatório denso, utilizando o anel cíclico polinomial R , que será utilizado juntamente com os valores da chave pública e os erros para gerar o encapsulamento da informação k , tal como está na seguinte expressão $(y_0, y_1), (r * f_0 + e_0, r * f_1 + e_1)$, com (f_0, f_1) - chave pública e (e_0, e_1) - pequenos erros.

Desencapsulamento

Para além do encapsulamento, é necessário o desencapsulamento da chave gerada pela classe. Nesta função é calculada a matriz dispersa H e ao syndrome s , sendo estes utilizados no algoritmo *bifFlip*, para decodificar os erros gerados no encapsulamento. Esses erros são necessários para gerar a hash da informação. Em baixo mostram-se os passos necessários para a implementação do desencapsulamento:

- **Geração da matriz dispersa H :** Utilizando a chave privada (h_0, h_1) , a matriz é criada a partir do par de matrizes cíclicas $rot(h_0), rot(h_1)$, que são calculadas utilizando a função *Rot*. Esta função tem como objetivo gerar a matriz de rotação a partir de um vetor utilizando as funções *toVectorR* e *rot*. Desta forma conseguimos obter a matriz dispersa $H = (rot(h_0) || rot(h_1))$.
- **Geração do syndrome s :** Para calcular o s começamos por transformar o encapsulamento, isto é, o criptograma (y_0, y_1) calculado no *encaps*, num vetor de tamanho n utilizando a função *toVectorN*. De seguida utilizamos a expressão $s \equiv h_0 * y_0 + h_1 * y_1$ para determinar o valor do syndrome s .
 - Geramos o novo vetor x igual a y e o novo syndrome z igual a s , que serão alterados ao longo das iterações.
 - Definimos o número de iterações do ciclo que serão iguais ao parâmetro n . Caso o s não tenha convergido para 0 ao fim de n iterações então ocorreu um problema no desencapsulamento.

- Enquanto não tivermos atingido o limite de iterações e enquanto o peso de s for diferente de 0:
 - * Calculamos o peso dos vários elementos de $z \cap h_j$ com $j \in \{1..n\}$, utilizando a função *hammingWeight*.
 - * Calculamos qual o peso máximo desses elementos.
 - * Caso o peso de um elemento seja o máximo então vamos alterar os bits da variável x e atualizar o valor da syndrome z utilizando respetivamente $x_j \leftarrow \neg x_j$ e $z \leftarrow z + h_j$
 - * No final, caso o algoritmo convirja então é retornado o valor do $x = (x_0, x_1)$, caso contrário é retornado o valor NONE pois as iterações atingiram o limite sem o algoritmo ter convergido.
- **Desencapsulamento da chave:** Para desencapsular a informação é necessário calcular os valores reais de e_0 e e_1 a partir dos seguintes calculos:
 - * Sabendo que $x_0 = r * f_0$ e $x_1 = r * f_1$ então temos:

$$y_0 = r * f_0 + e_0 \equiv e_0 = y_0 - r * f_0 \equiv e_0 = y_0 - x_0 y_1 = r * f_1 + e_1 \equiv e_1 = y_1 - r * f_1 \equiv e_1 = y_1 - x_1$$
 - * Com estas equações conseguimos obter os valores e_0 e e_1 que serão usados de forma a verificar a condição $|e_0 + e_1| = t$, com $|e_0 + e_1|$ igual à soma dos pesos de e_0 e e_1 . Caso contrário ocorreu um error no processo de desencapsulamento.
 - * Finalmente, os valores e_0 e e_1 serão utilizados para calcular a hash da informação encapsulada e assim desencapsular essa informação.
- **Algoritmo Bit Flip:** Este algoritmo iterativo foi implementado na função *bitFlip* e permite alterar os bits y (com y a corresponder ao vetor de tamanho n que representa o criptograma (y_0, y_1)), atualizando o valor do syndrome s em cada iteração até que no final a única solução possível da equação $s = \sum_{y_j \neq 0} s \cap h_j$ que corresponde à definição do s é $s = 0$. Utilizando como o input a matriz H , o vetor y e o syndrome s conseguimos implementar o algoritmo através dos seguintes passos:

keyGen

Esta função tem o objetivo de gerar um par de chaves que será utilizado no encapsulamento de desencapsulamento da chave gerada pela classe. A função começa por a chave privada do problema a partir da função *coeffGen* que gera dois parâmetros pertencentes a R de tamanho r cada um com um peso igual a *sparse*, isto é, com o *sparse* coeficientes iguais a 1. De seguida gera-se a chave privada segundo a expressão, sendo h_0 e h_1 os parâmetros da chave privada.

```
[2]: class BIKE:
    def __init__(self):
        # (block length): a prime number such that 2 is primitive modulo r
        r = 257
        # (error weight): a positive integer
        t = 16
        n = 2*r

        # Grupo Finito com 2 elementos
        F2 = GF(2)

        # Anel de polinómios
        F = PolynomialRing(F2, name='w')
        w = F.gen()
```

```

# Anel cíclico polinomial  $F_2[X]/\langle X^r + 1 \rangle$ 
R = QuotientRing(F, F.ideal(w^r + 1))

self.r = r
self.t = t
self.n = n
self.F2 = F2
self.R = R

# Gera os coeficientes de um polinómio com tamanho r - utilizado na geração
→ da chave privada e pública
def coeffGen(self, sparse=3):
    coeffs = [1]*sparse + [0]*(self.r-2-sparse)
    random.shuffle(coeffs)
    return self.R([1]+coeffs+[1])

# Gera um dois polinomios aleatórios de tamanho r - utilizado para a geração
→ dos erros
def errorGen(self, t):
    res = [1]*t + [0]*(self.n-t)
    random.shuffle(res)
    return self.R(res[:self.r]), self.R(res[self.r:])

# Geração do hash - chave encapsulada
def hashGen(self,e0,e1):
    digest = hashes.Hash(hashes.SHA256())
    digest.update(e0.encode())
    digest.update(e1.encode())
    return digest.finalize()

# Transformação de um polinómio num vetor de tamanho r
def toVectorR(self,h):
    V = VectorSpace(self.F2, self.r)
    return V(h.list() + [0]*(self.r - len(h.list())))

# Transformação de um par num vetor de tamanho n
def toVectorN(self, c):
    V = VectorSpace(self.F2,self.n)
    f = self.toVectorR(c[0]).list() + self.toVectorR(c[1]).list()
    return V(f)

# Rotação de uma unidade num vetor
def rot(self,m):
    V = VectorSpace(self.F2,self.r)
    v = V()
    v[0] = m[-1]
    for i in range(self.r-1):

```

```

        v[i+1] = m[i]
    return v

# Gera matriz de rotação partir de um vetor
def Rot(self,h):
    M = Matrix(self.F2, self.r, self.r)
    M[0] = self.toVectorR(h)
    for i in range(1,self.r):
        M[i] = self.rot(M[i-1])
    return M

# Gera o peso de hamming de um polinómio binário x
def hammingWeight(self,x):
    return sum([1 if a == 1 else 0 for a in x])

# Implementação do algoritmo de Bit Flip
def bitFlip(self, H, y, s):
    x = y
    z = s
    nIter = self.r
    while self.hammingWeight(z) > 0 and nIter > 0:
        nIter = nIter - 1
        # Todos os pesos de hamming
        weights = [self.hammingWeight(z.pairwise_product(H[i])) for i in
→range(self.n)]
        maximum = max(weights)
        for j in range(self.n):
            if weights[j] == maximum:
                x[j] = 1-x[j]
                z += H[j]
    if nIter == 0:
        return None
    return x

def keyGen(self):
    # private key
    h0 = self.coeffGen()
    h1 = self.coeffGen()
    # public key
    f = (1, h0/h1)
    return (h0, h1) , f

```

```

[3]: class BIKE_KEM(BIKE):
    def __init__(self):
        BIKE.__init__(self)

    # Encapsula uma chave - abordagem McEliece para um KEM-CPA

```

```

def encaps(self, public):

    # Gera pequenos erros
    e0,e1 = self.errorGen(self.t)

    # Chave encapsulada
    key = self.hashGen(str(e0),str(e1))

    # Gerar aleatoriamente um  $r \leftarrow R$  denso
    r = self.R.random_element()

    # Encapsulamento da chave
    (y0,y1) = (r * public[0] + e0, r * public[1] + e1)

    return key, (y0,y1)

# Desencapsula a chave - recebe a chave privada e o encapsulamento
def decaps(self, private, c):

    # Calcula matriz  $H = \text{rot}(h0)/\text{rot}(h1)$ 
    h0Rot = self.Rot(private[0])
    h1Rot = self.Rot(private[1])
    H = block_matrix(2,1,[h0Rot,h1Rot])

    # Transforma o criptograma  $c$  num vetor de tamanho  $n$ 
    vectorC = self.toVectorN(c)

    # Computa syndrome
    s = vectorC * H

    # Descodifica  $s$  para recuperar o par de erros ( $e0',e1'$ ) utilizando o
    → algoritmo de bitFlip
    error = self.bitFlip(H, vectorC, s)

    if error == None:
        print("Iterações atingiram o limite")
        return None
    else:
        listError = error.list()

        # Erros como par de polinómios
        error0 = self.R(listError[:self.r])
        error1 = self.R(listError[self.r:])

        # Como forma de recuperar os erros  $e0$  e  $e1$  originais
        e0 = c[0] - error0
        e1 = c[1] - error1

```

```

        # Verifica se houve erro no encoding
        if self.hammingWeight(self.toVectorR(e0)) + self.hammingWeight(self.
→toVectorR(e1)) != self.t:

            print("Erro no decoding")
            return None
        else:
            # Desencapsula chave
            key = self.hashGen(str(e0),str(e1))

    return key

```

```

[4]: bike = BIKE_KEM()

private, public = bike.keyGen()

toEncap, cipheredKey = bike.encaps(public)
print("Key:\n", toEncap)

toDecap = bike.decaps(private,cipheredKey)
print("\nKey:\n", toDecap)

if toDecap != None and toDecap == toEncap:
    print("\nKeys match!")
else:
    print("\nKeys don't match!")

```

Key:

```

b"r\xd0;\x8b9ui\xc9\x99\x15p}\xde\t\x99\x07\xa2Rt7\xae\t\xd2\xe0\x04V\xf5\x0c\xcd0a"

```

Key:

```

b"r\xd0;\x8b9ui\xc9\x99\x15p}\xde\t\x99\x07\xa2Rt7\xae\t\xd2\xe0\x04V\xf5\x0c\xcd0a"

```

Keys match!

2 Implementação do PKE IND-CCA-secure

A implementação segue a transformação de Fujisaki-Okamoto (FO) de forma a obter, a partir de um KEM-IND-CPA, um PKE-IND-CCA seguro.

keyGen

É utilizado o método *keyGen* implementado na classe BIKE_KEM. O objetivo é gerar a chave privada e a chave pública.

Encrypt

O método segue o algoritmo de cifra da transformação FO:

$$E(x) \equiv \vartheta r \leftarrow h \cdot \vartheta y \leftarrow x \oplus g(r) \cdot (e, k) \leftarrow f(y||r) \cdot \vartheta c \leftarrow k \oplus r \cdot (y, e, c)$$

Começa-se por gerar os pequenos erros com recurso à função *errorGen* da classe *BIKE_KEM*. De seguida, calcula-se o hash de um valor *r* aleatório denso gerado com recurso ao anel cíclico *R*. É efetuado o XOR deste valor (o hash) com a mensagem *m* a ser cifrada. A função *f* corresponde à função *encaps* já implementada na classe *BIKE_KEM*, e é usada para gerar a chave *k* e o encapsulamento dos erros *e*. Por fim, o *ciphertext* é calculado a partir do XOR da chave *k* com o valor aleatório *r*.

Decrypt

Este método é implementado segundo o algoritmo

$$D(y, e, c) \equiv \vartheta k \leftarrow \text{KREv}(e) \cdot \vartheta r \leftarrow c \oplus k \cdot \text{if } (e, k) \neq f(y||r) \text{ then } \perp \text{ else } y \oplus g(r)$$

Começa-se por usar as funções *decapsError* e *decapsKey* para desencapsular os erros (*e0*, *e1*) e a chave *k*, respetivamente. De seguida, obtém-se o valor de *r* através do XOR entre o *ciphertext* *c* e a chave *k*. Se os valores calculados a partir de *f* (tal como no processo de *encrypt*) forem iguais ao *e* recebido e à revelação da chave, confirma-se a autenticidade da chave e gera-se o hash de *r* que será utilizado na operação de XOR com *y*, obtendo a mensagem original.

```
[5]: class BIKE_PKE(BIKE):

    def __init__(self):
        BIKE.__init__(self)

    # Hash
    def g(self, r):
        digest = hashes.Hash(hashes.SHA256())
        digest.update(str(r).encode())
        g = digest.finalize()
        return g

    # Operação de XOR.
    def xor(self, data, mask):
        result = b''
        lengthData = len(data)
        lengthMask = len(mask)
        i=0
        while i < lengthData:
            for j in range(lengthMask):
                if i<lengthData:
                    result += (data[i]^mask[j]).to_bytes(1, byteorder='big')
                    i += 1
                else:
                    break
            return result
```

```

# Núcleo determinístico f - semelhante ao realizado em KEM
def f(self, public, m, e0, e1):
    w = (m * public[0] + e0, m * public[1] + e1)
    key = self.hashGen(str(e0),str(e1))
    return (key,w)

# Descapsula a chave gerada pelo o algoritmo - semelhante ao realizado em KEM
def decapsKey(self,e0,e1):
    if self.hammingWeight(self.toVectorR(e0)) + self.hammingWeight(self.toVectorR(e1)) != self.t:
        print("Erro no decoding")
        return None
    else:
        key = self.hashGen(str(e0),str(e1))
        return key

# Descapsula os erros - semelhante ao realizado em KEM
def decapsError(self,private, e):

    # Calcula matriz H = rot(h0)/rot(h1)
    h0Rot = self.Rot(private[0])
    h1Rot = self.Rot(private[1])
    H = block_matrix(2,1,[h0Rot,h1Rot])

    # Transforma o criptograma num vetor de tamanho n
    vectorE = self.toVectorN(e)

    # Computa o syndrome
    s = vectorE * H

    # Descodifica s para recuperar o vetor (e0,e1)
    error = self.bitFlip(H, vectorE, s)

    if error == None:
        print("Iterações atingiram o limite")
        return None
    else:

        listError = error.list()

        error0 = self.R(listError[:self.r])
        error1 = self.R(listError[self.r:])

        e0 = e[0] - error0
        e1 = e[1] - error1

```



```

        return e0,e1

    def encrypt(self, msg, public):
        e0, e1 = self.errorGen(self.t)
        r = self.R.random_element()
        g = self.g(r)
        y = self.xor(msg.encode(),g)

        yBinary = bin(int.from_bytes(y, byteorder=sys.byteorder))
        ryBinary = self.R(yBinary)

        key, e = self.f(public, ryBinary + r, e0, e1)
        c = self.xor(str(r).encode(),key)

        return y, e, c

    def decrypt(self, private,public, y, e, c):
        e0, e1 = self.decapsError(private,e)
        k = self.decapsKey(e0,e1)

        rXOR = self.xor(c,k)
        r = self.R(rXOR.decode())

        yBinary = bin(int.from_bytes(y, byteorder=sys.byteorder))
        ryBinary = self.R(yBinary)

        if (k,e) != self.f(public, ryBinary + r, e0, e1):

            print("Erro no decoding")
            return None

        else:
            g = self.g(r)
            plaintext = self.xor(y,g)

        return plaintext

```

```

[6]: bike = BIKE_PKE()
msg = "Hello there!"
print("Original message:")
print(msg)

sk, pk = bike.keyGen()

msg_encapsulation, key_encapsulation, ciphertext = bike.encrypt(msg, pk)
print("\nCiphertext: ")
print(ciphertext)

```

```

plaintext = bike.decrypt(sk, pk, msg_encapsulation, key_encapsulation,
    ciphertext)
print("\nDecrypted message:")
print(plaintext.decode())

```

Original message:
Hello there!

Ciphertext:

```

b"\x97y\xc7uQ\xbd\xac\xa1\xbf\x0e\xc9\xed\xfd\x83\x17\xcd\xcc\x0\xfc\x02\xa7\xfd
3y\x86w\xad\xee=_\xd8\x8c\x06\x01\x04f}\xd1\xab\xa3\xa7\x05\x02\xba\xe7\x80\x04
\xe1\xaf\x07\xfb\x05\xac\x08.\x93t\xbe\x02QY\x05\x9a\xcd\xcb;\xd1en\xfd\x07\xa5\
xab\x10\x09\xb1\xb0\x95\x07\xfd\x83\xab\xfd\x06\xb8\x03%\xc4a\xbd\x01}5\x03\x98\
x0e\x00\x86pm\xee\xeb\x09\xad\x11\xdb\xba\xbb\x02\x12\xfd\x01\x90\x87\x91\x00\x08\x
e2.\x06\x0a\x02n\x19\xbf\x0e\x0e\x08;\x8d'\x0e\xfd\x05\x01\x17\xda\xad\x00\x09
E\xe4\x93\x94\xbd\xbc\xbe\x00;\xc4=\xff\x07m\n\x93\xfd\x03\x08,\xf8\xfb\xfd
6\x0e{\xdb\xa9\xa3\x02N\xb3\x86\x97\xae\x90\x02\xe1=\xd46\x04\x90x\t\x80\x0e\x03
\x02}\x9f'$\xaf\xee\x05\x0eW\xb7\xa8\xa2\xdaE\xb8\x01\x02\xad\x83\x0e\x08d\x06!\
\xff\x9b/\x1c\x83\xcd\x0f\xbe)\x942/\xa4\xb9\x00\xfdD\x9b\x04\xa2\x00Q\xb3\xda\x0
5\xb8\x80\x0e\xa1P\x06$\x0c\x90$K\x96\x0c\x8c\x92E\x945=\xaf\x02\xb7\xe8G\x88\x0
8\x0c\x00W\xa2\x01\x0e\x0f\x95\xee\x02|\xba$\xee\x89/@\x01\xdb\x0f\x81i\xfd85>\xb
7\xb9\xbc\xbfR\x8b\xfb\x0e\xbcW\xa2\x07\x05\xe4\x02\xfb\x01o\x96H\x0e\x81:K\xca\
\x8c\x9a\x82z\x04Y=\x0e\xad\x07\xb4\x05\x0e\x08\xfd\x01\x90;\xa1\x00\x07\x0f\x09\xac\
\xa41\x85d\x81\x82>[\xc1\x87\xcd\x97y\xc7uQ\xbd\xa9\xae\xbf\x0e\xc9\xed\xfd\x83\x
17\xcd\xcc\x05\x08\x02\xa7\xfd3y\x86w\xad\xee=[\xd4\x8c\x06\x01\x04f}\xd1\xab\xa
7\xab\x05\x02\xba\xe7\x80\x04\xe1\xaf\x07\xfd\x03\xac\x08.\x93t\xbe\x02QY\x01\x9
c\xcd\xcb;\xd1en\xfd\x07\xa6\xa6\x1c\x09\xb1\xb0\x95\x07\xfd\x83\xab\x0e\xdb\x09
\x03%\xc4a\xbd\x01}5\x00\x95\x0e\x00\x86pm\xee\xeb\x09\xae\x1c\xdb\xba\xbb\x02\
\x12\xfd\x01\x90\x87\x91\x03\x05\xe2.\x06\x0a\x02n\x19\xbf\x09d\x05\x08;\x8d'\x0e\xfd
8\x05\x01\x14\x01\xae\x00\x09E\xe4\x93\x94\xbd\xbc\xbd\xe47\x04=\xff\x07m\n\x93\
\xfd\x0c\x07#\x08,\xf8\xfb\xfd6\x0e{\x08\xad\xa7\x02N\xb3\x86\x97\xae\x90\x02\xe2
9\x00\x04\x04\x90x\t\x80\x0e\x03\x01,\x94'$\xaf\xee\x05\x0eW\xb7\xab\xa6\xdbE\xb8\x
01\x02\xad\x83\x0e\x08d?\x02.\xff\x9b/\x1c\x83\xcd\x0f\xbe*\x900/\xa4\xb9\x00\xfd
D\x9b\x04\xa1\x04V\xb3\xda\x05\xb8\x80\x0e\xa1P\x05 \x0e\x90$K\x96\x0c\x8c\x92E\
\x971>\xaf\x02\xb7\xe8G\x88\x0e\x0c\x03S\xa3\x01\x0e\x0f\x95\xee\x02|\xba'\xea\x8
9/@\x01\xdb\x0f\x81i\xfd86:\xb8\xb9\xbc\xbfR\x8b\xfb\x0e\xbcT\xa6\x07\x05\xe4\x02
\xfb\x01o\x96H\xee\x85;K\xca\x8c\x9a\x82z\x04Y>\xba\xa8\x07\xb4\x05\x0e\x08\xfd\x01\
\x90;\xa2\x05\xcd\x0f\x09\xac\xa41\x85d\x81\x81;X\x01\x87\xcd\x97y\xc7uQ\xbe\xad\
\xa6\xbf\x0e\xc9\xed\xfd\x83\x17\xcd\x0c\x01\xff\x02\xa7\xfd3y\x86w\xad\xee>X\x07\
\x8c\x06\x01\x04f}\xd1\xa8\xa4\xaa\x05\x02\xba\xe7\x80\x04\xe1\xaf\x04\xfc\x06\x
ac\x08.\x93t\xbe\x02QZ\x02\x9f\xcd\xcb;\xd1en\xfd\x07\xa6\xac\x17\x09\xb1\xb0\x9
5\x07\xfd\x83\xab\x0e\x01\xbd\x03%\xc4a\xbd\x01}5\x00\x9f\x00\x86pm\xee\xeb\
\x09\xae\x17\x0e\xba\xbb\x02\x12\xfd\x01\x90\x87\x91\x03\x0e\xe6.\x06\x0a\x02n\x19\
\xbf\x09d\xfd\x04;\x8d'\x0e\xfd\x08\x05\x01\x14\xdb\xab\x00\x09E\xe4\x93\x94\xbd\xbc\
\xbd\xe27\x04=\xff\x07m\n\x93\xfd\x0c\x01-\x08,\xf8\xfb\xfd6\x0e{\x08\xab\xa5\x02
N\xb3\x86\x97\xae\x90\x02\xe2?\x00\x04\x04\x90x\t\x80\x0e\x03\x01*\x94'$\xaf\xee\xfd

```

```
Decrypted message:
Hello there!
```