Task №4

Щербаков Алексей Б01-908

8 October 2019

1

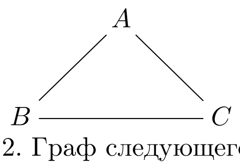
Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина сепени 1?
Пусть существует, тогда должен существовать граф на 7 вершинах с 22 рёбрами.
Количество рёбер полного графа $\frac{n(n-1)}{2}$. Для данного n не может быть больше рёбер, чем у полного графа.
$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, $21 < 22$, значит не существует графа на 7 вершинах с 22 рёбрами, противоречие.
Ответ: Не существует

2

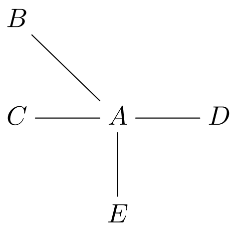
Условие будет выполнено только в том случае, если сумма цифр-названий кратно 3.
Если цифра города кратна 3, то она соединена только с городами, которые тоже кратны 3. Соответственно, ни один город кратный трём не соединяется с некратными 3 городами. Значит, из города 9 нельзя добраться в 1, и наоборот.
Ответ: Нельзя

3

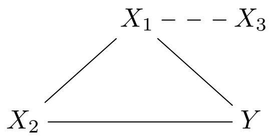
Будем рассматривать только связанные графы
1. Граф - треугольник:



2. Граф следующего вида (граф-звезда):
Есть вершина A и все рёбра, которые есть в этом графе, имеют один конец в точке A, а другой на любой другой вершине.



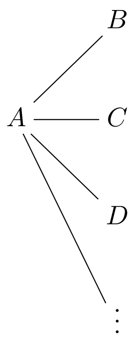
Докажем, что графы другого вида не подходят:
Пусть есть вершина A и множество других вершин X
Если все рёбра типа $A - X$, то условие выполняется
Если нет, то существует ребро, которое соединяет вершину X_1 с вершиной X_2.
Так как граф связанный, то существуют $Y - X_1$ и $Y - X_2$. Если Y совпала с A и больше вершин нет, то условие выполнено (треугольник). Если есть ещё вершины, то есть вершина X_3, соединённая с хотя бы одной из предыдущих. Пусть это будет ребро $X_1 - X_3$.
Тогда, по условию, $X_1 - X_3$ должна иметь общую точку с $Y - X_1$ и $Y - X_2$, а рёбра $X_1 - X_3$ и $Y - X_2$ иметь общих точек не могут, так как никакие из этих точек не совпадают.



Если граф несвязанный, то он может состоять из любого количества связанных графов указанного ранее вида, а также любого количества вершин со степенью 0.

4

Число рёбер в графе без треугольников на n вершинах не больше чем $\frac{n^2}{4}$
Доказательство:
Рассмотрим некоторую вершину A с максимальной степенью. Пусть её степень k.



Так как A имеет максимальную степень, то вершины $B, C, D...$ имеют сте-

пень не превосходящую $n-k$, т.к. вершины B, C, D... не могут быть соединены, так как иначе образуется треугольник.
Количество вершин графа, не входящих во множество A, B, C, D... равно $n-k$ и их степени не превосходят k.
Следовательно сумма всех степеней $\leq k(n-k)+(n-k)k = 2k(n-k)$
Количество рёбер $= k(n-k)$ По неравенству Коши: $\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{k+(n-k)}{2} = \frac{n}{2}$
Количество рёбер $\leq \frac{n^2}{4}$ чтд

Количество рёбер в данном в задаче графе $= \frac{201 \cdot 400}{2} = 40200$
$\frac{n^2}{4} = \frac{400 \cdot 400}{4} = 40000$
$40200 > 40000$, следовательно, количество рёбер $> \frac{n^2}{4}$, что противоречит доказанному утверждению, значит в данном графе есть треугольник (цикл длины 3) чтд

5

-

6

Допустим, нельзя
Рассмотрим город A. Из него можно приехать как минимум в 7 других городов, так что любой граф как минимум из 8 вершин обязан быть связанным. У нас осталось $15-8=7$ городов, которые, предположим, не связаны с городом A. В этом новом графе выберем любой город B. Он соединён с 7ю городами. Но даже если он соединён со всеми 6ю городами из своего множества, он должен быть соединён ещё как минимум с одним городом, который или является городом A или соединён с ним. Таким образом, из любого города можно доехать в любой чтд.

7

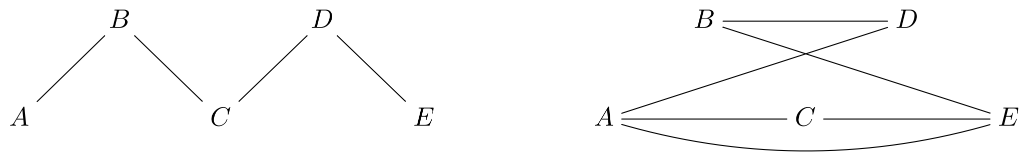
В любом графе найдутся две вершины с одинаковыми степенями.
Доказательство:
Пусть это не так, тогда в графе с n вершинами, вершины будут иметь степени: 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$.
Рассмотрим вершину со степенью $n-1$: она должна быть соединена со всеми вершинами, даже с вершиной, у которой степень 0, что невозможно.
Значит наше предположение неверно, следовательно, в любом графе найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

8

У графа-пути и графа-цикла степень вершин 1 или 2
К любой вершине дополненного графа, должно вести не больше двух рёбер
Значит у изначального графа несоединённых с каждой вершиной должно быть не более двух вершин
Значит всего вершин максимум 5
На 1й вершине нельзя построить ни путь, ни граф
На 2х вершинах дополнением будут изолированные вершины
На 3х вершинах дополнением цикла будут изолированные вершины, а дополнением пути будет 1 изолированная вершина и 2 соединённые
На 4х вершинах для графа-пути выполняется:

Для цикла на 4х вершинах не выполняется:

Для графа-пути на 5 вершинах не выполняется:



Для графа-цикла на 5 вершинах выполняется:

Ответ: Граф-путь на 4 вершинах и Граф-цикл на 5 вершинах.