Task №9

Щербаков Алексей Б01-908

12 November 2019

1

Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средние вертикали?

$n = 2^8$(закрашенный верх)$+2^8$(закрашенный низ)$+2^6$(закрашенная середина)$-$ 2^4(закрашенный верх и низ)-2^4(закрашенный верх и середина)-2^4(закрашенный низ и середина)$+$ 2^2(закрашенный верх, низ и середина) $= 532$

Ответ: 532

2

Для полёта на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома.
Каждой профессией должно владеть ровно 6 человек.
Каждой парой ровно 4 человека.
Каждой тройкой ровно 2.
Всеми профессиями ровно 1.
Выполнимо ли задание по сбору такой группы?

Пусть количество человек в группе n
$0 = n - 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \to n = 7$
Из этих 7 человек 6 владеют профессией a. Пусть последний владеет профессией b, тогда кроме него ещё пять человек должны владеть профессией b.
Получается, что 5 человек владеют профессиями a и b, а таких человек по условию 4.
Противоречие.

Ответ: Невыполнимо.

3

Пусть A и B - конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число

Пусть $|B| = m$
Если существует инъекция, то $m \geq n$, если существует сюръекция, то $m \leq n$, значит $m = n$
Количество инъекций: $\frac{m!}{(m-n)!} = n!$

Ответ: $n!$

4

В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Найдём количество троек, где не выполняется условие. В каждой такой тройке есть человек, который дружит с одним и не дружит со вторым. Выберем одного из учеников (20), выберем одного из тех, с кем он дружит (6) и одного из тех, с кем он не дружит (13). Итого: $20 \cdot 6 \cdot 13 = 1560$. Но в этих комбинациях каждый учащийся учтён два раза, поэтому количество таких троек $\frac{1560}{2} = 780$
Тогда искомых троек $\mathrm{C}_{20}^{3} - 780 = 1140 - 780 = 360$

Ответ: 360

5

Найдите количество неубывающих отображений $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$

Расставим перегородки между значениями функции. Значению между $(i-1)$й перегородкой и iй перегородкой соответствует x_i, если между перегородками ничего нет, то x_i соответствует предыдущему значению. Так как у нас n аргументов и m значений, то нам нужно выбрать $m - 1$ мест под перегородки из $m + n - 1$ возможных: C_{m+n-1}^{m-1}

Ответ: C_{m+n-1}^{m-1}

6

Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств?

7

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n пар влюблённых так, чтобы ни одна пара влюблённых не сидела рядом?

Предположим, что места пронумерованы...
$ans = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n N(k)$, $N(k)$ - количество способов рассадить людей так, что k пар влюблённых сидит вместе.
Рассмотрим kое слагаемое:
Выберем место для первого человека из первой пары $((2n)!)$, второго сажаем на место справа от первого, так как они могут поменяться, то домножим на два $(2 \cdot (2n)!)$. Аналогично для второй пары $(2 \cdot (2n-2)!)$ и тд.
$(2 \cdot (2n)!)(2 \cdot (2n-2)!)(2 \cdot (2n-4)!)...(2 \cdot (2n-2k+2)!) = 2^k \frac{(2n)!!}{(2k-2)!!}$
Умножим на количество вариантов рассадить остальных людей:
$N(k) = 2^k \frac{(2n)!!}{(2n-2k)!!}(2n-2k)!$
$ans = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n 2^k \frac{(2n)!!}{(2n-2k)!!}(2n-2k)!$
Если места стола не пронумерованы, то ответ ещё нужно будет поделить на $2n$
Ответ: $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n 2^k \frac{(2n)!!}{(2n-2k)!!}(2n-2k)!$

8

Конфет - n, коробок - m
Найти число способов разместить конфеты по коробкам:
а) конфеты и коробки разные
m^n
б) конфеты одинаковые, коробки разные и непустые
Выберем из $n-1$ места под перегородки ровно $m-1$, таким образом получим однозначное разбиение конфет по коробкам: C_{n-1}^{m-1}
в) конфеты одинаковые, коробки разные
Имеем $n+m-1$ место под конфеты и перегородки, выберем из них $m-1$ место под перегородки, остальное заполним конфетами: C_{n+m-1}^{m-1}
г) конфеты и коробки разные, коробки непустые
Представим конфеты в виде аргументов, а коробки в виде значений. Тогда

нужно найти количество сюръекций, так как коробки не пустые, а каждой конфете соответствует только одна коробка.
$\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \mathrm{C}_m^k (m-k)^n$
д) конфеты разные, коробки одинаковые, коробки непустые
Берём ответ из г) и делим на количество перестановок коробок: $\frac{1}{m!}\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k \mathrm{C}_m^k (m-k)^n$
е) конфеты разные, коробки одинаковые
Берём ответ из а) и делим на количество перестановок коробок: $\frac{m^n}{m!}$