Task №12

Щербаков Алексей Б01-908

03 Dec 2019

1

Разложите в ДНФ и КНФ булеву функцию, заданную вектором значений:
$f(x, y, z) = 00111100$

x	y	z	res
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Если $res = 1$, то переменные, равные 1, записываем в ДНФ без изменения, а равные 0 с отрицанием.

ДНФ: $(\bar{x} \land y \land \bar{z}) \lor (\bar{x} \land y \land z) \lor (x \land \bar{y} \land \bar{z}) \lor (x \land \bar{y} \land z)$
Если $res = 0$, то переменные, равные 0, записываем в КНФ без изменения, а равные 1 с отрицанием.
КНФ: $(x \lor y \lor z) \land (x \lor y \lor \bar{z}) \land (\bar{x} \lor \bar{y} \lor z) \land (\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z})$ x и y существенные, z - фиктивная. Поэтому z можно не учитывать:
ДНФ: $(\bar{x} \land y) \lor (x \land \bar{y})$
КНФ: $(x \lor y) \land (\bar{x} \lor \bar{y})$

2

Вычисляется ли константа 0 в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$

x_1	x_2	res
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$\neg(\neg(x_1 \to x_2) \to \neg(x_1 \to x_2))$

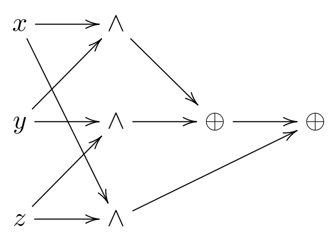
x_1	x_2	res
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ответ: Да

3

Вычислите MAJ(x, y, z) схемой в базисе Жегалкина $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$

$MAJ(x, y, z) = (x \wedge y) \oplus (y \wedge z) \oplus (x \wedge z)$



4

Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$?

Выразим многочлен в базисе Жегалкин:
$x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n = \neg(\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)) = \neg(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge ... \wedge \bar{x}_n) = \neg((1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n)) = \neg(1 + A) = 1 + 1 + A = A$
$1 + A$ содержит 2^n одночленов, значит A содержит $2^n - 1$ одночлен

Ответ: $2^n - 1$

5

Докажите полноту базиса $\{x|y\}$

$\neg x = x|x$
$x \wedge y = \neg(x|y) = (x|y)|(x|y)$
Таким образом с помощью штриха Шеффера можно выразить полный базис $\{\neg, \wedge\}$, значит штрих Шеффера тоже полный базис

6

Является ли полным базис $\{\wedge; \rightarrow\}$?

$1 \wedge 1 = 1$
$1 \rightarrow 1 = 1$
Значит набор функций замкнут в классе T_1, значит не является базисом

Ответ: Нет

7

Является ли полным базис $\{\neg; MAJ(x_1, x_2, x_3)\}$?

$MAJ(x_1, x_2, x_3) = 0, MAJ(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 1$
$MAJ(x_1, x_2, x_3) = 1, MAJ(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$
Функции отрицания и MAJ самодвойственные, следовательно, базис замкнут на S.

Ответ: Нет

8

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ - немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_1$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$

$\exists A, B : (f(A) = 1) \wedge (f(B) = 0) \wedge$ (B получается из A заменой любого количества нулей на 1)
В наборе B заменим все появившиеся единицы на x_i, назовём получившийся набор C, тогда если $x_i = 1$, то $C = B$ и $f(C) = 0$, а если $x_i = 0$, то $C = A$ и $f(C) = 1$. Таким образом, $f(C) = \neg x_i$ чтд.

9

Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой

Нужно доказать, что любая монотонная функция представима в ДНФ без отрицаний. Выпишем таблицу истинности произвольной монотонной функции

x	y	z	res
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Рассмотрим столбцы, где значение равно 1. Рассмотрим строку где значение равно 1, при этом количество аргументов равное 1 минимально. Т.к. функция монотонная, то существуют строки, равные 1, которые отличаются от этой только заменой одного 0 на 1. Получается $... \vee (\bar{a} \wedge b \wedge ...) \vee (a \wedge b ...)...$ Эта дизъюнкция равна $(b \wedge ...)$. Далее аналогично для любой строки. Таким образом, любую дизъюнкцию конъюнкций с отрицанием можно сократить до конъюнкции без отрицания, значит, любое ДНФ представление любой монотонной функции можно сократить до представления ДНФ без отрицания. чтд.

10

$PAR(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, если количество единиц чётное и 0, если нечётно

а) Выразите PAR через известные булевы функции

$PAR(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$

б) При каких $n \geq 1$ можно представить PAR в виде ДНФ без отрицаний

Функция задаётся ДНФ без отрицаний, только если она монотонная (так как ДНФ без отрицаний монотонна по определению, $(a \wedge b \wedge c \wedge ...) \vee (d \wedge e \wedge g \wedge ...) \vee ... = 1 \rightarrow$ если любой 0 заменить на 1, то значение функции не изменится). Т.к. PAR при $n > 1$ немонотонная (если $PAR(A) = 1$ и если заменить любой 0 на 1, то значение функции поменяется), значит $n = 1$
Ответ: 1

11

Докажите, если $f(x_1, ..., x_n)$ - нелинейная функция, то $x_1 \wedge x_2$ вычисляется в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$

Представим функцию f в форме полинома Жегалкина:
Так как функция нелинейная, то существует одночлен, содержащий хотя бы две переменные
Представим в форме Жегалкина $f(x_1, x_2, 1, 1, 1, 1...) = (x_1 \wedge x_2) \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.
При этом $(x_1 \wedge x_2)$ будет обязательно присутствовать, а оостальные слагаемые не обязательно. Если присутствует только конъюнкция, то $\wedge = f(x_1, x_2, 1, 1, 1, 1...)$, если присутствуют ещё члены, то применив отрицание от них можно избавиться.

12

Докажите теорему Поста

Если функции не принадлежит ни одному из классов T_0, T_1, M, L, S, то они образуют полный базис.
Рассмотрим функию $f(x_1, x_2, ...)$
Если функция $f \notin T_0$, то $f(x, x, x, x...) = \neg$ или 1
Если функция $f \notin T_1$, то $f(x, x, x, x...) = \neg$ или 0
Таким образом из этой функции можно получить отрицание и две константы.
По теореме, доказанной в предыдущем задании, мы можем выразить $\wedge$
Таким образом, мы из f получили полный базис $\{\neg, \wedge\}$, значит f так же является полным базисом.