Task №8

Щербаков Алексей Б01-908

5 November 2019

1

Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки (0;0) в точку (4;5)?

Пусть количество способов попасть из (0;0) в (x;y) равно P(x;y)
Тогда $P(x;y) = P(x-2;y-2) + P(x-1;y) + P(x;y-1)$
Заполним таблицу, где число на пересечении столбцов с номером x и y - P(x;y)

x/y	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	7	12	18	25
3	1	4	12	26	47	76
4	1	5	18	47	101	189

В ячейке (4;5) число 189, значит P(4;5) = 189.
Ответ: 189

2

В магазине продаётся 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 100 пирожных (порядок покупки не важен)?

Задача аналогична задаче 4., разобранной на семинаре. $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 100$ - найти число решений в неотрицательных целых числах. На семинаре была получена формула для количества решений такого уравнения: $\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1} = \mathrm{C}_{109}^{9}$

Алгоритм получения формулы:
Есть $n+k-1$ мест под n единиц и $k-1$ перегородок.
Нужно выбрать из $n+k-1$ мест $k-1$ под перегородки: C_{n+k-1}^{k-1}

Ответ: C_{109}^{9}

3

Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

Слагаемое $A_j = \mathrm{C}_n^j \cdot 2^j$
Рассмотрим $\frac{A_j}{A_{j+1}} = \frac{\mathrm{C}_n^j \cdot 2^j}{\mathrm{C}_n^{j+1} \cdot 2^{j+1}} = \frac{\mathrm{C}_n^j}{\mathrm{C}_n^{j+1} \cdot 2} = \frac{j+1}{2n-2j} *$
$\frac{j+1}{2n-2j} < 1 \to j+1 < 2n-2j \to 3j < 2n-1 \to j < \frac{2n-1}{3}$
Пока $j < \frac{2n-1}{3}$ слагаемые будут увеличиваться, а после уменьшаться. Так как $2n-1$ может быть нецелым, то возьмём ближайшее целое число, большее $2n-1$: $k = [\frac{2n-1}{3}] + 1$, тогда $A_k = \mathrm{C}_n^k \cdot 2^k = \mathrm{C}_n^{[\frac{2n-1}{3}]+1} \cdot 2^{[\frac{2n-1}{3}]+1}$

$*$ Формула не работает для $n = j : [\frac{2n-1}{3}] + 1 = n$
$n - 1 \leq \frac{2n-1}{2} < n \to 3n-3 \leq 2n-1 < 3n \to n \in (-1; 2]$
Т.к. n целое и неотрицательное, то нужно отдельно проверить случаи
$n = 0$: максимальное первое слагаемое (1)
$n = 1$: максимальное второе слагаемое (2)
$n = 2$: максимальное второе слагаемое (4)

Ответ:
Для $n \geq 2$: Слагаемое под номером $[\frac{2n-1}{3}] + 1$
Для $n = 1$: Слагаемое под номером 2
Для $n = 0$: Слагаемое под номером 1

4

Найти число слов длины n над алфавитом $\{0,1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

Найдём количество способов построить слово длины k. Если последний символ 0, то количество способов построить такое слово такое же как и слово $k-1$
Если последний символ 1, то предпоследний 0, тогда, аналогично, способов столько же сколько и у $k-2$
Так как на конце может стоять только 0 или только 1, то
$P(k) = P(k-1) + P(k-2)$

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 2 \\ P(k) = P(k-1) + P(k-2) \end{cases}$$

Из системы видно, что $P(n) = F_{n+2}$, где F_{n+2} - число Фибоначчи с номером $n+2$.

Ответ: $P(n) = F_{n+2}$, где F_{n+2} - число Фибоначчи с номером $n+2$.

5

Комбинаторно доказать:

1) $\mathrm{C}_n^m \cdot \mathrm{C}_m^k = \mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{m-k}$

$\mathrm{C}_n^m \cdot \mathrm{C}_m^k$ - Количество способов из n элементов выбрать m, а из них ещё выбрать k. Это то же самое, что $\mathrm{C}_n^{n-m} \cdot \mathrm{C}_m^k$ - Количество способов выбрать $n-m$ элементов из n, а из осташивхся выбрать k.

$\mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{m-k}$ - Количество способов из n выбрать k элементов, а из оставшихся выбрать $m-k$. Это то же самое, что $\mathrm{C}_n^k \cdot \mathrm{C}_{n-k}^{n-m}$ - Количество способов выбрать из n элементов k, а из оставшихся $n-m$

В первом случае мы сначала выбрали $n-m$, а потом k из оставшихся. Во втором случае мы сначала выбрали k, а из оставшихся $n-m$, что одно и то же. чтд

2) $\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-2}^m + 2\mathrm{C}_{n-2}^{m-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{m-2}$

Нужно выбрать m элементов из n.
В правой части элементы всегда выбираются из $n-2$.
Пусть множество всех элементов - N, а множество выбранных M. Рассмотрим произвольные элементы $A, B \in N$.
Существует 3 варинта:

$A, B \in M$: C_{n-2}^{m-2}
$A \in M, B \notin M$: $\mathrm{C}_{n-2}^{m-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{m-1}$
$A, B \notin M$: C_{n-2}^{m}
Итого: $\mathrm{C}_{n-2}^{m} + 2\mathrm{C}_{n-2}^{m-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{m-2}$ чтд.

6

Какое из чисел больше $\mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{998}+1}$ или $\mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$

$\frac{F_{1000}!}{(F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!}$ или $\frac{F_{1000}!}{(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)!}$

$(F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!$ или $(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)!$

$(F_{998}+1)!(F_{999}-1)!$ или $(F_{999}+1)!(F_{998}-1)!$

$(F_{998})!(F_{998}+1)\frac{(F_{999})!}{F_{999}}$ или $(F_{999})!(F_{999}+1)\frac{(F_{998})!}{F_{998}}$

$(F_{998}+1)F_{998} < (F_{999}+1)F_{999}$

Значит $\mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{998}+1} > \mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$

Ответ: $\mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{998}+1} > \mathrm{C}_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$

7

Комбинаторно доказать $\sum\limits_{k=0}^{(n+1)/2} \mathrm{C}_{n-k+1}^{k} = F_{n+2}$

C_{n-k+1}^{k} - количество способов вставить k единиц между $n-k$ нулями (количество слов, в которых ровно k единиц и никакие из них не стоят рядом). Таким образом, слева - количество слов длины n над алфавитом {0,1}, где никакие две единицы не стоят рядом.

Справа по номеру 4) F_{n+2} - число слов длины n над алфавитом {0,1}, в которых нет двух единиц подряд.
k - количество единиц в слове. $n-k$ - количество нулей соответственно.

Справа и слева выражения тождественно равны чтд.

8

Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различнами.

У нас есть 20 книг и 4 разделителя
Если бы порядок полок имел значение, то количество способов было бы 24!
Так как порядок полок значение не имеет, то нужно разделить на количеству перестановок 4х разделителей (4!)

Ответ: $\frac{24!}{4!}$

9

Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путём тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования - число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

Пусть x_j - количество голосов за кандидата с номером j
Тогда нужно найти количество целых неотрицательных решений $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 8$
Аналогично номеру 2 их C_{15}^{7}

Ответ: C_{15}^{7}

10

Сколькими способами можно переставить буквы в слове "ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ так чтобы две буквы "О"не стояли рядом

Найдём количество способов переставить буквы без О. $\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$
Теперь будем вставлять бувы О между этими буквами. Выберем 7 мест между 11 буквами, куда вставить О. Будем выбирать только по одному месту между двумя буквами, поэтому две О не будут стоять рядом. Между 11 буквами есть 12 мест. Тогда количество способов выбрать 7 мест из 12: C_{12}^{7}. Итого: $\frac{11!\cdot \mathrm{C}_{12}^{7}}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$

Ответ: $\frac{11!\cdot \mathrm{C}_{12}^{7}}{24}$