Task №13-14

Щербаков Алексей Б01-908

10 Dec 2019

1 13.1

Найдите производящую функцию для последовательности
а) $a_k = k$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = x(\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k)' = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$
б) $a_k = \frac{1}{k!}$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

2 13.2

Выразите аналитически:
в) $\sum\limits_{k\geqslant 1} (2k+1)x^k$
Пусть $f(x) = \frac{1}{1-x}$
$f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} x^k \Longrightarrow f'(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} kx^{k-1} \Longrightarrow 2f'(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} 2kx^{k-1} \Longrightarrow$
$2xf'(x) + xf(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} (2k+1)x^k$
Ответ: $\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$

3 13.3

б) $\sum\limits_{k\geqslant 0} k \cdot \mathrm{C}_n^k 2^k x^k = ((1+2x)^n)' = 2n(1+2x)^{n-1}$
$\sum\limits_{k\geqslant 0} k \cdot \mathrm{C}_n^k 2^k = A(1) = 2n \cdot 3^{n-1}$
Ответ: $2n \cdot 3^{n-1}$

4 13.4

Доказать: $\sum\limits_{k\geqslant 0} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$
$(1+x)^n = \sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{n}{k} x^k$

$((1+x)^n)'' = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum\limits_{k\geqslant 0} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$
Если $f(x) = (1+x)^n$, то $f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \sum\limits_{k\geqslant 0} k(k-1)\binom{n}{k}$ чтд

5 13.5

Известна $g(x)$ для $S_n = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k$. Найти $f(x)$ для $\{a_k\}$

$g(x) = (a_0) + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + ... + (a_0+a_1+a_2+...+a_n)x^n$
$g(0) = a_0$
$g'(0) = a_0 + a_1 \to a_1 = g'(0) - g(0)$
...
$g(n)(0) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \to a_n = g^{(n)}(0) - g^{(n-1)}(0)$
$a_k = g^{(k)}(0) - g^{(k-1)}(0) \Longrightarrow f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0}(g^{(k)}(0) - g^{(k-1)}(0))x^k$

Ответ: $\sum\limits_{k\geqslant 0}(g^{(k)}(0) - g^{(k-1)}(0))x^k$

6 14.1

Найти производящую функцию для последовательности F_n

1) $\mathrm{F}_n = \begin{cases} 0, \text{ при n=0} \\ 1, \text{ при n=1} \\ \mathrm{F}_{n-1} + 2F_{n-2}, \text{ при } n > 1 \end{cases}$

$F_{k+1} + F_k = 2(F_{n-1} + F_k)$. Пусть $G_k = F_{k+1} + F_k$, тогда $G_{k+1} = 2G_k, G_0 = 1$.
$G_k = 2^k \Longrightarrow F_{k+1} + F_k = 2^k \Longrightarrow F_{k+1} = 2^k - F_k$
$A(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0}(2^k - F_k)x^{k+1} = \sum\limits_{k\geqslant 0} 2^k x^{k+1} - x\sum\limits_{k\geqslant 0} F_k x^k$
$A(x) = xA(x) + \sum\limits_{k\geqslant 0} 2^k x^{k+1} = -xA(x) + \frac{x}{1-2x}$
$A(x) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1+x} = \frac{x}{(1-2x)(1+x)} = \frac{1}{3-6x} - \frac{1}{3+3x} = \sum\limits_{k\geqslant 0}(\frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3})x^k$
Ответ: $\sum\limits_{k\geqslant 1}(\frac{2^k+(-1)^{k-1}}{3})x^k$

2) $F_n = \begin{cases} 1, \text{ при n=0} \\ 3, \text{ при n=1} \\ 4\mathrm{F}_{n-1} - 4F_{n-2}, \text{ при } n > 1 \end{cases}$

$F_k - 2F_{k-1} = 2(F_{k-1} - 2F_{k-2})$
Пусть $G_k = F_{k+1} - 2F_k$, тогда $G_{k+1} = 2G_k, G_0 = 1 \Longrightarrow G_k = 2^k \Longrightarrow F_{k+1} - 2F_k = 2^k \longrightarrow F_{k+1} = 2^k + 2F_k$
$A(x) = 1 + \sum\limits_{k\geqslant 0}(2^k + 2F_k)x^{k+1} = 1 + 2x\sum\limits_{k\geqslant 0} F_k x^k + \sum\limits_{k\geqslant 0} 2^k x^{k+1}$
$A(x) = \frac{1+x\sum\limits_{k\geqslant 0} 2^k x^k}{1-2x} = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-2x)^2} = \sum\limits_{k\geqslant 0}(k+1)2^k x^{k+1} + \sum\limits_{k\geqslant 0} 2^k x^k = 1 + \sum\limits_{k\geqslant 1}(k2^{k-1} + 2^k)x^k = 1 + \sum\limits_{k\geqslant 1} 2^{k-1}(k+2)x^k$
Ответ: $1 + \sum\limits_{k\geqslant 1} 2^{k-1}(k+2)x^k$

7 14.2

Докажите, что если последовательность an определяется соотношением $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, где p, q – некоторые числа, то для её производящей функции $F(t)$ верно, что $F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}$

$F(t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$
$ptF(t) = pt\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n = \sum\limits_{n\geqslant 1} pa_{n-1}t^n$
$qt^2F(t) = pt\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n = \sum\limits_{n\geqslant 2} qa_{n-2}t^n$
Сложив три эти равенства, получим:
$F(t)(1 + pt + qt^2) = a_0 + a_1 t + pta_0 + \sum\limits_{n\geqslant 2}(a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2})t^n$
$F(t) = \frac{a_0 + a_1 t + pta_0}{1 + pt + qt^2}$ чтд

8 14.3

Найдите производящую функцию для последовательности a_n, состоящей из числа двоичных слов длины n, в которых нет двух единиц подряд.

В задаче 3 задания 8 было доказано, что число таких двоичных слов длины n равно $P(n+2)$, где $P(n)$ - число Фибоначчи с номером n.
$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$
Пусть производящая функция для $\{a_k\} : A(x)$
Тогда $\frac{A(x) - P(0) - xP(1)}{x^2} = A(x) + \frac{A(x) - P(0)}{x}$, так как каждый коэффициент равен сумме двух предыдущих.
$P(0) = 0, P(1) = 1$, тогда $A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$
Пусть корни знаменателя: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$A(x) = \frac{x}{-(x+\alpha)(x+\beta)} = -\frac{\alpha}{\sqrt{5}(x+\alpha)} + \frac{\beta}{\sqrt{5}(x+\beta)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{1}{\frac{x}{\alpha}+1} + \frac{1}{\frac{x}{\beta}+1})$
По теореме Виета: $\alpha\beta = -1 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{\beta}$
$A(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{1}{1-x\beta} + \frac{1}{1-x\alpha})$ - производящая функция разности сумм геомет-

рических прогрессий с начальным членом $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и знаменателями α и β
Таким образом $A(x) = \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\alpha^k x^k}{\sqrt{5}} - \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\beta^k x^k}{\sqrt{5}} = \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} x^k$
Так как искомая последовательность смещена на 2 номера от последовательности Фибоначчи, то начинать нужно с 3го элемента (так как $a_0 = 0$)
Ответ: $\sum\limits_{k \geqslant 3} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k}{\sqrt{5}} x^k$