Task №5

Щербаков Алексей Б01-908

15 October 2019

1

Функция h из множества $\{0, 1, ..., 8\}$ в множество $\{a, b, ..., g\}$ определена следующим образом:
$h : 1 \to b, 2 \to c, 3 \to b, 4 \to e, 5 \to b, 6 \to e, 8 \to f$.

а) $\mathrm{Dom}(h) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
б) $\mathrm{Range}(h) = \{b, c, e, f\}$; $h(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{b, c, e\}$
в) $h^{-1}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3, 5\}$
г) $h^{-1}(h(\{0, 1, 2, 6, 7, 8\})) = h^-1(\{b, c, e, f\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
д) $h(h^{-1}(\{a, b, c, d, e\})) = h(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \{b, c, e\}$

2

Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

Рассмотрим наибольшее простое число $p \in X$. Пусть y - наибольший квадрат целого числа, такой что $y < p$. Пусть x_0 - положительное число, квадрат которого равен y, тогда все числа прообраза множества $f^{-1}(X)$ лежат в отрезке $[-x_0; x_0]$.
Пусть существует число z не лежащее в этом отрезке, тогда $z^2 > y$, так как y - наибольший квадрат целого числа, такой что $y < p$, значит $z^2 > p$, значит, должно быть ещё одно простое число, большее p, что проотиворечит тому, что p - максимальное простое число.
Таким образом, $|f^{-1}(X)| < 2x_0 + 1$. чтд

3

Какой знак нужно вставить вместо "?"
$f^{-1}(f(A))$? A

Рассмотрим функцию из первого номера.
1)$h^{-1}(h(\{1,2,6,8\}) = h^{-1}(\{b,c,e,f\} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$
2)$h^{-1}(h(\{1,2,3,4,5,6,8\} = h^{-1}(\{b,c,e,f\}) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$
Первый пример доказывает, что не могут стоять знаки $\subset, \subseteq, =$, а второй пример показывает, что не может стоять знак $\supset$, значит может стоять только знак $\supseteq$
(Так как по условию возможны только знаки $\supseteq, \subseteq$ и $=$, то второй пример можно было не рассматривать)
(Если функция не является сюръекцией, то никакой знак нельзя поставить, пример: функция h из первого номера:
$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$f^{-1}(f(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\})) = f^{-1}(\{b,c,e,f\}) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$
Таким образом, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$
Т.е. есть примеры для всех знаков, значит никакой знак поставить нельзя)
Ответ: $\supseteq$

4

Какой знак нужно вставить вместо "?"
$f(A\backslash B)$? $f(A)\backslash f(B)$

Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$
$f: 1 \to a, 2 \to b, 3 \to a, 4 \to b$
$f(A\backslash B) = f(1,2) = a, b$
$f(A)\backslash f(B) = \emptyset$
Значит множества не могут быть равны, и второе множество не может включать первое. Следовательно, $f(A\backslash B) \supseteq f(A)\backslash f(B)$
Ответ: $\supseteq$

5

Какой знак нужно вставить вместо "?"
$f^{-1}(A\backslash B)$? $f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$

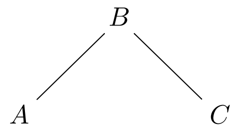
Так как двум разным элементам из множества Y не может соответствовать один элемент из X, то
1) $x \notin A\backslash B \longrightarrow x \in B$
$x \in B \longrightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(B)$
$x \notin A\backslash B \longrightarrow x \notin f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$
2) $x \in A\backslash B \longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
$x \in A \wedge x \notin B \longrightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$
$x \in A\backslash B \longrightarrow x \in f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$
Значит $f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$

Ответ: =

6

Верно ли, что если каждая вершина графа имеет степень 1 или 2 и в графе нет циклов нечётной длины, то в графе есть совершенное паросочетание?

Это неверно. Пример:



7

Про функцию f из множетсва X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

Для любой функции каждому элементу из области определения соответствует только один элемент из области определения.
Пусть $\exists y_0 : y_0 \in Y \wedge y_0 \notin B$, тогда $\exists x_0 \in X : f(x_0) = y_0$. Данному x_0 соответсвует единственное значение y_0, тогда $x_0 \notin f^{-1}(B)$. Полученное противоречие указывает на то, что наше предположение неверно, значит $B = Y$.
(Если функция не является сюръекцией, то утверждение неверно (пример приведён в следующем номере)
Ответ: Верно

8

Приведите пример такой инъективной функции f из множества X в множество Y, что для $B \subseteq Y$ верно:

$$\begin{cases} \text{B} \neq \emptyset \\ \text{f}^{-1}(B) = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & a \\
2 \arrow[r] & b \\
3 \arrow[dr] & c \\
 & d
\end{tikzcd}$$

Данная функция f инъективна
$B = \{c\} \wedge f^{-1}(B) = \emptyset$ - условие выполнено

9

Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

Пусть X - множество всех подмножеств множества положительных целых чисел, Y - множество всех строго возрастающих последовательностей положительных целых чисел. Тогда если мы каждый член X преобразуем в возрастающие последовательности (строго возрастающие, так как числа не повторяются во множестве), то для каждого элемента из X найдётся такой же элемент в Y, так как после преобразований у нас X - множество всех строго возрастающих последовательностей (то же самое, что и Y). Если мы будем проводить соответствие между двумя одинаковыи элементами множества X и Y, то получим биекцию из X в Y.