Task №7

Щербаков Алексей Б01-908

29 October 2019

1

Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии?

Есть 6 вариантов выбрать первого канидата, 5 вариантов выбрать второго кандидата и тд. Итого $6 \cdot 5 \cdot 4 ... = 6! = 720$ Ответ: 720

2

а) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых еть единица или тех, в записи которы её нет
б) для первых 10 миллионов чисел?

Если первый миллион числа от 0 до 999999, то любое число представимо в виде $\overline{aaaaaa}$. Вместо каждой a может стоять цифра от 0 до 9. Количество шестизначных чисел с одной цифрой 1: $C_6^1 \cdot 9^5$, для двух: $C_6^2 \cdot 9^4$ и т.д
Всего вариантов с единицей $C_6^1 \cdot 9^5 + C_6^2 \cdot 9^4 + C_6^3 \cdot 9^3 + C_6^4 \cdot 9^2 + C_6^5 \cdot 9^1 + C_6^6 \cdot 9^0 = 6 \cdot 59049 + 15 \cdot 6561 + 20 \cdot 729 + 15 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 1 = 468559$. Значит среди первого миллиона меньше чисел с единицей.
$C_7^1 \cdot 9^6 + C_7^2 \cdot 9^5 + C_7^3 \cdot 9^4 + C_7^4 \cdot 9^4 + C_7^5 \cdot 9^2 + C_7^6 \cdot 9^1 + C_7^1 \cdot 9^0 = 468559 \cdot 7 + 1 = 7 \cdot 531441 + 21 \cdot 59049 + 35 \cdot 6561 + 35 \cdot 729 + 21 \cdot 81 + 7 \cdot 9 + 1 = 5217031$
Значит среди первых 10 миллионов чисел с единицей больше чем без неё.
Ответ: а) без б) с единицей

3

Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного исла в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?

Найдём вероятность того, что все цифры различны: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0,1512$
Тогда искомая вероятность: $1 - 0,1512 = 0,8488$
Ответ: $0,8488$

4

Из 36-карточнок колоды карт на стол равноверятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две чёрные?

Все возможные исходы $= \mathrm{C}_{36}^4$
Количество вариантов выбрать две красные или две чёрные $= \mathrm{C}_{18}^2$
Значит вероятность выбрать две красные и две чёрные $= \frac{\mathrm{C}_{18}^2 \cdot \mathrm{C}_{18}^2}{\mathrm{C}_{36}^4} = 0,397$
Ответ: $0,397$

5

Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных чисел поровну?

Если будет 3 чётных цифры, то нечётных тоже будет 3, значит нужно найти количество шестизначных чисел, в которых будет 3 чётные цифры.
На первое место можно поставить любую ненулевую (9 способов), выберем ещё два места ($\mathrm{C}_5^2 = 10$ способов) и поставим на них цифры той же чётности, что и первая (5^2 способоа)
Оставшиеся 3 места: 5^3 Итого $9 \cdot 10 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 281250$ число
Ответ: 281250

6

Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две чётные цифры и перед каждой чётной цифрой обязательно стоит нечётная?

Число состоит из 3х нечётных цифр, двух чётных и двух нечётных перед ними.
Объединим чётную и стоящую перед ней нечётную цифру в одну.
Тогда нам нужно выбрать 2 места из 5 возможных для псевдоцифры: C_5^2
Выбрать 3 цифры из 5 нечётных: 5^3
Выбрать одну нечётную и одну чётную цифру для псевдоцифры: $5 \cdot 5$
Итого: $\mathrm{C}_5^2 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 781250$
Ответ: 781250

7

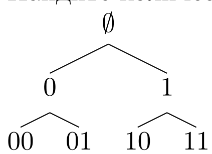
Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырёхместную?

Сначала выберем 4х студентов для поселения в 4хместную комнату, из

оставшихся 3 выберем двух для двухместной комнаты, оставшегося поселим в однокомнатуню. Итого: $C_7^4 \cdot C_3^2 = 105$
Ответ: 105

8

Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n



Количеств диаметров - количество способов составить пути из листов, расположенных в разных половинах
Выберем один лист из одной половины (2^{n-1}) и выберем один лист из другой половины дерева (2^{n-1}). $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-2}$
Ответ: 2^{2n-2}

9

Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых?

Пусть $P(N+k,k)$ - количество разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых. Из разбиений N на k слагаемых можно поулучить разбиение $N+k$ на k слагаемых к каждому слагаемому добавив 1. Но это будут не все возможные разбиения. Так же из разбиений числа $N+k$ на $k-1$ слагаемое можно получить разбиение $N+k$ на k, вычив единицу из каждого слагаемого и добавив ещё одно слагаемое $k-1$, таким образом $P(N+k,k) = P(N+k,k-1) + P(N,k)$.
Раскроем первое слагаемое справа
$P(N+k,k-1) = P(N+k,k-2) + P(N,k-1)$
$P(N+k,k) = P(N+k,0) + P(N,1) + P(n+k,1) + P(N,2) + P(N+k,2) + P(N,3) + ... + P(N+k,k-1) + P(N,k)$
$P(N,1) + P(N,2) + ... + P(N,k)$ - количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых. Значит, количество разбиений числа $N+k$ ровно на k слагаемых больше
Ответ: Разбиений числа $N+k$ ровно на k слагаемых.

10

Чего больше, правильных скобочных последовательностей из n пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, ...x_{2n})$ с элементами ± 1

Пусть элемент '(' := +1, а ')' := -1
Тогда для каждой последовательности скобок существует такая же последовательность $(x_1, x_2 ... x_{2n})$.
Обратно неверно, так как количество скобок '(' равно количеству скобок ')', а для второй последовательности ограничений нет.
Пусть последовательность скобок - X, а вторая последовательность - Y.
Тогда каждому элементу из X соответствует один элемент из Y, но существуют элементы из Y, для которых не существует элемента из X. Значит, мы построили инъекцию из X в Y. Значит последовательностей $(x_1, x_2 ... x_{2n})$ больше
Ответ: Последовательностей $(x_1, x_2 ... x_{2n})$ больше.