

## Описание системы

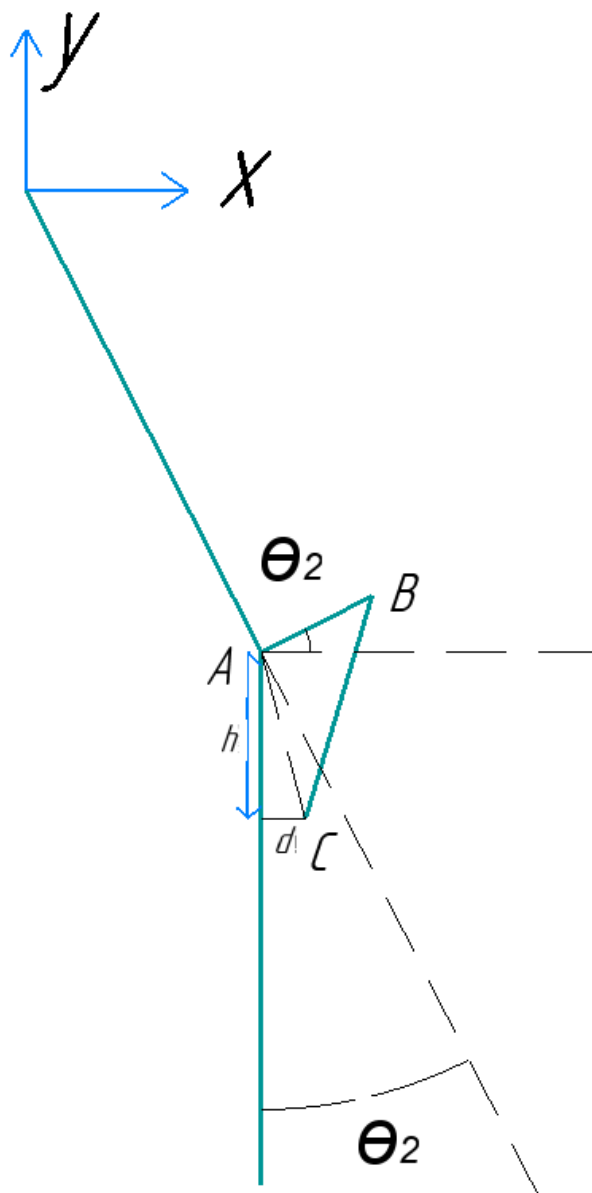


Рисунок 1 — Схема системы

Обозначения:

- $l_1$  - длина 1-го звена
- $l_2$  - длина 2-го звена
- $r_1$  - расстояние до ц.м. 1-го звена
- $r_2$  - расстояние до ц.м. 2-го звена
- $r$  - АВ
- $m_1$  - масса 1-го звена
- $m_2$  - масса 2-го звена

- $\theta_1$  - угол отклонения бедра от Оу
- $\theta_2$  - угол отклонения голени относительно бедра
- $I_1, I_2$  - моменты инерции относительно вращательных сочленений
- $L$  - ВС

Кинетическая энергия первого и второго звена равна:

$$T_1 = 0.5(I_1 + m_1 r_1^2) \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = 0.5 I_2 \dot{\theta}_2^2 + 0.5 m_2 \left( (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + r_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \right)^2$$

Потенциальная энергия первого и второго звена равна:

$$P_1 = -m_1 g r_1 \cos \theta_1$$

$$P_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)$$

Лагранжиан:  $L = T - P$ .

Для  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 (-\sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \theta_1 - m_2 l_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

В итоге получаем для  $\theta_1$ :

$$(I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 \left[ -\sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \right] + (m_1 r_1 + m_2 l_1) g \sin \theta_1 + m_2 l_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = Q_1$$

Для  $\theta_2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (I_2 + m_2 r_2^2) \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (I_2 + m_2 r_2^2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 r_2 \left( -\sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g r_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

В итоге получаем:

$$(I_2 + m_2 r_2^2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ - m_2 l_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g r_2 \sin \theta_2 = Q_2 = -c \dot{\theta}_2$$

Изменение  $h$ , обозначим А, В и С:

- А :  $(l_1 \sin \theta_1; -l_1 \cos \theta_1)$
- В :  $(l_1 \sin \theta_1 + r \cos \theta_2; -l_1 \cos \theta_1 + r \sin \theta_2)$
- С :  $(l_1 \sin \theta_1 + \frac{d}{2}; -l_1 \cos \theta_1 - h)$

Выразим  $BC = L$ :

$$(-l_1 \cos \theta_1 - h + l_1 \cos \theta_1 - r \sin \theta_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 + \frac{d}{2} - l_1 \sin \theta_1 - r \cos \theta_2)^2 = BC^2 = L^2$$

$$h^2 + h(2r \sin \theta_2) + (\frac{d^2}{4} - dr \cos \theta_2 + r^2 - L^2) = 0$$

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$h_{1,2} = -r \sin \theta_2 \pm \sqrt{r^2 \sin^2 \theta_2 - \frac{d^2}{4} + dr \cos \theta_2 - r^2 + L^2}$$

При:

$$L \geq \sqrt{\frac{d^2}{4} - r^2 \sin^2 \theta_2 - dr \cos \theta_2 + r^2}$$

Взяв производную по  $\theta_2$ , получаем:

$$\frac{\partial h_{1,2}}{\partial \theta_2} = -r \cos \theta_2 \pm \frac{r \sin \theta_2 (2r \cos \theta_2 - d)}{2\sqrt{r^2 \sin^2 \theta_2 - \frac{d^2}{4} + dr \cos \theta_2 - r^2 + L^2}}$$

Далее идет матмоделирование системы. Было проведено два моделирования:

- коэффициент демпфирования (с) является константой;
- коэффициент демпфирования (с) зависит от состояния поршня  $h(\theta_2)$ .

Начальные условия моделирования были следующими:

I1 = 0.25 Момент инерции бедра (кг·м²)

I2 = 0.1 Момент инерции протеза (кг·м²)

m1 = 10.0 Масса бедра (кг)

m2 = 2.0 Масса протеза (кг)

$r_1 = 0.3$  Расстояние от оси вращения до центра масс бедра (м)

$r_2 = 0.2$  Расстояние от оси вращения до центра масс протеза (м)

$l_1 = 0.4$  Длина бедра (м)

$g = 9.81$  Ускорение свободного падения ( $\text{м/с}^2$ )

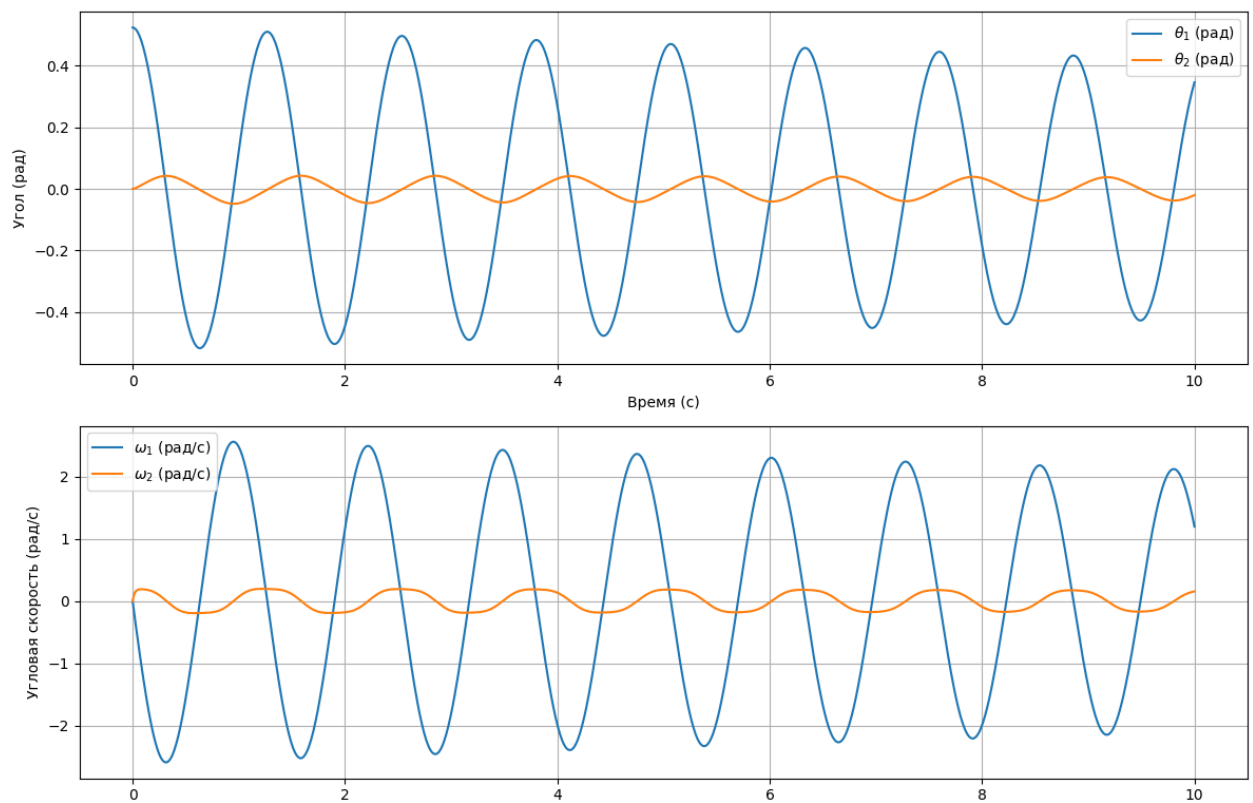
$r = 0.05$  Радиус поршня (м)

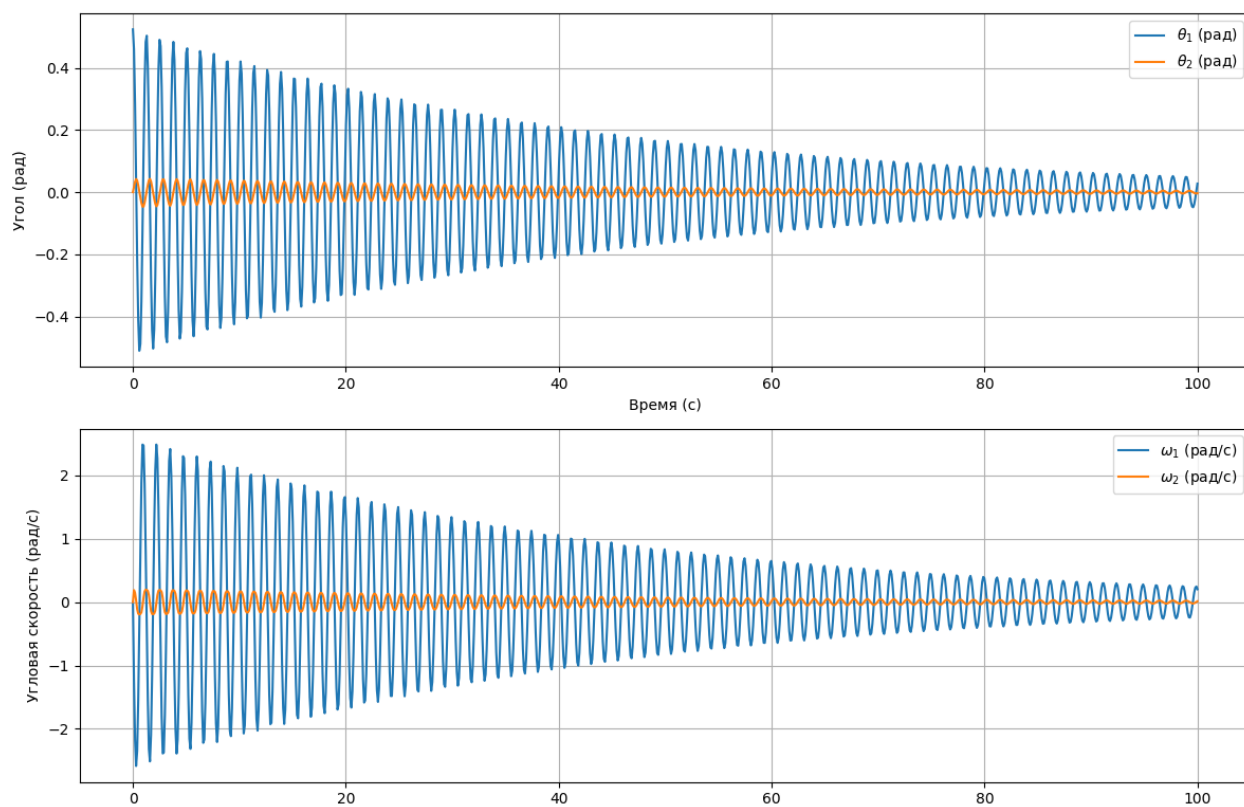
$d = 0.02$  Расстояние (м)

$L = 0.1$  Длина (м)

## 1. Коэффициент демпфирования - константа

На графиках приведены результаты моделирования на разных временных интервалах: 10, 100, 1000 сек.





**2. Коэффициент демпфирования - зависит от состояния поршня** Далее представлены графики моделирования при  $c = h(\theta_2)$ .

