現代の解析力学

𝔏𝔬𝔲𝔦𝔖*

目次

* https://pr440.github.io

1　Newton の力学から Lagrange 形式へ

1.1　基本的要請

Newton の力学では、Cartesian 座標系における質点の座標の時間発展を考える。一般に質点が n 個の時、ある時間での状態を指定する実数は $3n$ 個となる。この実数の組を配位と呼ぶ。**Lagrange 形式では、n 個の実数の組からなる配位について、対応する $\mathbb{R}^n$ 空間 (配位空間) の一点の時間発展、配位空間上の動点が描く曲線を考える。Lagrange の形式の主な目的は全ての座標 (ある配位空間の一点がある写像により対応する実数値) を対等に扱えるようにすることである。これは共変性と呼ばれる性質である。**

配位空間上の動点が描く曲線は、最小作用の原理を必ず満たす。すなわち全ての運動は最小作用の原理にしたがって起こる。以下では最小作用の原理の数学的表現を与える。

配位空間 C の一般化座標 $q^i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots n)$ に時間 t を加えた $(n+1)$ 次元の空間 $\tilde{C}$ を考える。任意の運動は $\tilde{C}$ 内で一本の曲線で表すことができる。これらの曲線の違いは、座標 q^i がどのような t の関数であるかということのみである**これらの曲線に対し作用 S を、値の組ではなく、値を入れると決まった値を返す関数形の組をパラメーターにもつ汎関数 $S[q^i]$ として定義する。**[1)]。

作用は $q^i,\ \dot{q}^i,\ t$ **の関数であるラグランジアン** L を用いて次のように表せる。

$$S[q^i] = \int_a^b L(q^i,\ \dot{q}^i,\ t)dt \tag{1.1}$$

ラグランジアン L は作用 S とは違い、q^i の関数形に t を代入して得られる座標の値を代入する通常の多変数関数である。作用の定義から、このラグランジアンも $\tilde{C}$ の一つの曲線、すなわち一つの運動のシステムに対応している。

最小作用の原理とは、文字通り**運動が起きるとき、必ずその作用は最小値**[2)]**をとる**ということである。作用の最小値は以下のように変分を用いて求めることができる。

作用 $S[q^i]$ は定義式 (1.1) で表される定積分である。今、ある関数形の組 q^i で $S[q^i]$ が最小になるとする。ε をその二乗が 0 とみなせるほど非常に小さい無限小パラメーター、$f^i(t)\ (i = 1, 2, \cdots n)$ を n 個のある t の関数の組として、次のような q が無限小変化した関数形の組 $\tilde{q}^i$ を考える。**この変化を変分という。**

$$\tilde{q}^i(t) = q^i(t) + \varepsilon f^i(t)$$

作用 $S[\tilde{q}^i] = S[q^i + \varepsilon f^i]$ を計算する。今考えている変化はある座標から座標への運動における作用の最小値からの変化であり、その開始地点と終了地点、$t = a, t = b$ における座標は変化前と後では不変でなければならない。すなわち $\tilde{q}^i(a) = q^i(a),\ \tilde{q}^i(b) = q^i(b)$ でなければならないから、$f^i(a) = f^i(b) = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
S[\tilde{q}^i] &= \int_a^b L(\tilde{q}^i(t), \dot{\tilde{q}}^i(t),\ t)dt = \int_a^b L(q^i(t) + \varepsilon f^i(t),\ \dot{q}^i(t) + \varepsilon \dot{f}^i(t),\ t)dt \\
&= S[q^i] + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} f(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{f}^i(t) \right) dt + o(\varepsilon^2) \quad (\text{テイラー展開}) \\
&= S[q^i] + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n (\frac{\partial L}{\partial q^i} f^i(t)dt + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{f}^i(t))dt + O(\varepsilon^2) \\
&= S[q^i] + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} f^i(t)dt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} f^i(t) \right]_a^b - \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) f^i(t)dt + O(\varepsilon^2) \quad (\text{部分積分})
\end{aligned}$$

1)　作用は物理的考察によって得られることが多い。
2)　正確には停留値。

$$= S[q^i] + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \right\} f^i(t)dt + O(\varepsilon^2)$$

最小値の性質として、最小値をとる関数形からどのような無限小変化、つまり ε^2 の項が 0 とみなせる程度の変化をしても汎関数の値は変わらない。ゆえに任意の f^i の組で $S[\tilde{q}^i] - S[q^i] = 0$ でなければならない。よって、n 個の方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \quad (i = 1\,, 2, \cdots n) \tag{1.2}$$

が成り立つことが、最小作用の原理がシステムの運動に対し要請する条件である。

式 (1.2) は Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる運動方程式である。時刻 $t = a$ で配位 $q^i(a)$ に、$t = b$ で配位 $q^i(b)$ にあるシステムの運動は、この Euler-Lagrange 方程式の解 q^i を満たすものになる。

ラグランジアンは不定性をもっており、時間の全微分を加える自由度がある。つまり、

$$\tilde{L} = L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

で定義されるラグランジアン $\tilde{L}$ について、

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)\right) = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial t}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial q^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i}\end{aligned}$$

から、

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

となり、Euler-Lagrange 方程式が不変である、ということである。

Newton の力学における運動方程式 $m\ddot{r} = F$ も、配位空間の次元が $n = 3$ の Euler-Lagrange 方程式を満たしている。このことからラグランジアンの形を導くことができる。**一般に、ラグランジアンは系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U の差になっている。**

$$L = T - U$$

1.2 共変性と点変換

共変性と呼ばれる性質については先に触れたが、Euler-Lagrange 方程式を導いた上で定義しなおすと、**異なる座標系で方程式の形が変わらないというのが共変性の意味である。**Euler-Lagrange 方程式はどのような座標系の範囲までならこの性質を保つのだろうか。Newton の力学を振り返ると、系の時間発展をつかさどる運動方程式は、慣性座標系において不変であった。慣性座標系は無数にとれるが、そのすべては Galilei 変換によって互いに変換ができた。同様に、**Lagrange 形式が共変性を保つような無数の座標系はすべて、次の式 (1.3) で表される点変換によって互いに座標変換ができる。**

$$q^i = f^i(Q^1, Q^2, \cdots Q^n, t) \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1.3}$$

f^i は微分可能な関数で、また、

$$Q^i = g^i(q^1, q^2, \cdots q^n, t) \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

という風に逆に解けるようになっているものとする。以下では、この変換において Euler-Lagrange 方程式が共変性を持つことを示す。

式 (1.3) より、

$$\dot{q}^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial f}{\partial t}$$

なので、座標系 Q^i におけるラグランジアン L' は、

$$\begin{aligned} L'(Q^i, \dot{Q}^i, t) &= L(q^i, \dot{q}^i, t) \\ &= L\left(f^i(Q^1, Q^2, \cdots Q^n, t), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial Q^j} \dot{Q}^j + \frac{\partial f^i}{\partial t}, t \right) \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{\partial L'}{\partial Q^i} = \sum_l \frac{\partial L}{\partial q^l} \frac{\partial f^l}{\partial Q^i} + \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \left(\sum_j \frac{\partial^2 f^l}{\partial Q^i \partial Q^j} \dot{Q}^j + \frac{\partial^2 f}{\partial Q^i \partial t} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^i} \right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial f^l}{\partial Q^i} \right) = \sum_l \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \right) \frac{\partial f^l}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^l}{\partial Q^i} \right) \right\} \\ &= \sum_l \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \right) \frac{\partial f^l}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_j \frac{\partial^2 f^l}{\partial Q^j \partial Q^i} \dot{Q}^j + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial Q^i} \right) \right\} \end{aligned}$$

より、L' の Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{\partial L'}{\partial Q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^i} \right) = \sum_l \frac{\partial f^l}{\partial Q^i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \right) \right\}$$

となる。Euler-Lagrange 方程式の左辺の部分 (作用の汎関数微分) を、

$$\frac{\delta S[q^i]}{\delta q^i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right), \quad \frac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^i(t)} = \frac{\partial L'}{\partial Q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^i} \right)$$

を使って表すことにすると、上の結果は連立方程式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^1(t)} \\ \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^2(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^n(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial Q^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial Q^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial Q^1} \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial Q^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial Q^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial Q^n} & \dfrac{\partial f^2}{\partial Q^n} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial Q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^1(t)} \\ \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^2(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^n(t)} \end{pmatrix}$$

と表せる。f^i についての仮定から、n 次正方行列 $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial Q^j} \right)$ は逆行列 $\left(\dfrac{\partial g^i}{\partial q^j} \right)$ をもつ正則行列である。よって、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^1(t)} \\ \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^2(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{\delta S[q^i]}{\delta q^n(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial q^1} & \dfrac{\partial g^2}{\partial q^1} & \cdots & \dfrac{\partial g^n}{\partial q^1} \\ \dfrac{\partial g^1}{\partial q^2} & \dfrac{\partial g^2}{\partial q^2} & \cdots & \dfrac{\partial g^n}{\partial q^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g^1}{\partial q^n} & \dfrac{\partial g^2}{\partial q^n} & \cdots & \dfrac{\partial g^n}{\partial q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^1(t)} \\ \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^2(t)} \\ \vdots \\ \dfrac{\delta S'[Q^i]}{\delta Q^n(t)} \end{pmatrix}$$

と変形できる。このことを用いると L' の Euler-Lagrange 方程式が L の Euler-Lagrange 方程式と等価であることがわかる。以上から点変換について Euler-Lagrange 方程式は共変性を有している。

1.3 対称性と保存則

運動を通じてある物理量やエネルギーが一定値にとどまり続けたりすることが知られている。**保存則と呼ばれるこの性質は、ラグランジアンという関数に系の性質が集約された Lagrange 形式の力学により、系の対称性に起因することがわかった。**ここからは、系の対称性の記述の仕方、それが我々の知る保存則をどのように導くかを見る。

ラグランジアンがある座標 q^i によらないとき、q^i は循環座標と呼ばれる。循環座標 q^i の Euler-Lagrange 方程式から、

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \qquad \therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = Const.$$

というふうに、保存則が導ける。一般に、**下式で表される物理量 p^i を座標 q^i に共役な運動量[3)]と呼ぶ。座標 q^i が循環的であるとき、q^i に共役な運動量は保存する。**

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1.4}$$

p^i を使って Euler-Lagrange 方程式を書き直すと、次のようになる。

$$\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{1.5}$$

上のように保存則を導くために循環座標を見つけ出すことは、時には座標系の取り方を変えなければならず、大抵容易ではない。そこで、座標系の取り方によらず系の対称性の有無のみを調べることを考える。系の性質はラグランジアンに集約されていることから、系の対称性はそのままラグランジアンの対称性であり、それは次の式 (1.6) で与えられる無限小点変換に対するラグランジアンの不変性に対応する。

$$q^i = Q^i + \varepsilon f^i(Q^1,\, Q^2,\, \cdots Q^n,\, t) \quad (i = 1,\, 2,\, \cdots n) \tag{1.6}$$

(ただし、ε はその二乗が 0 とみなせるほど非常に小さい無限小パラメーター、$f^1, \dots, f^n$ は n 個の可微分関数の組。) これは逆に解くことができて、

$$\begin{aligned} Q^i &= q^i - \varepsilon f^i(Q^j,\, t) = q^i - \varepsilon f^i(q^j - \varepsilon f^j(Q^k),\, t) \\ &= q^i - \varepsilon f^i(q^j,\, t) + O(\varepsilon^2) \simeq q^i - \varepsilon f^i(q^1,\, q^2,\, \cdots q^n,\, t) \end{aligned}$$

となる。式 (1.6) より、

$$\dot{q}^i = \dot{Q}^i + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j + \frac{\partial f^i}{\partial t}\right)$$

なので、座標系 Q^i でのラグランジアン L' は、

$$\begin{aligned} L'(Q^i,\, \dot{Q}^i,\, t) = L(q^i,\, \dot{q}^i,\, t) &= L\left(Q^i + \varepsilon f^i(Q^1,\, Q^2,\, \cdots Q^n,\, t),\, \dot{Q}^i + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j + \frac{\partial f^i}{\partial t}\right),\, t\right) \\ &= L(Q^i, \dot{Q}^i, t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L(Q^k, \dot{Q}^k, t)}{\partial Q^i}f^i + \frac{\partial L(Q^k, \dot{Q}^k, t)}{\partial \dot{Q}^i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j + \frac{\partial f^i}{\partial t}\right)\right\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

となる。さて、系に対称性があるのは無限小点変換に対してラグランジアンが不変であったときだった。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L(Q^k,\, \dot{Q}^k,\, t)}{\partial Q^i}f^i(Q^i,\, t) + \frac{\partial L(Q^k,\, \dot{Q}^k,\, t)}{\partial \dot{Q}^i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i(Q^k,\, t)}{\partial Q^j}\dot{Q}^j + \frac{\partial f^i(Q^k,\, t)}{\partial t}\right)\right\} = 0$$

3) Newton の力学における「運動量」や角運動量は全て上で定義した運動量の一部である (それぞれ Cartesian 座標の成分、極座標の角度成分と共役)。区別のために Newton の力学での「運動量」は線形運動量と呼ばれることがある。

となるときである。これはラグランジアンの関数形に対する制約であり、座標を q^i にして書き直してもよく、

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L(q^k,\,\dot{q}^k,\,t)}{\partial q^i}f^i(q^i,\,t)+\frac{\partial L(q^k,\,\dot{q}^k\,t)}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i(q^k,\,t))}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial f^i(q^k,\,t)}{\partial t}\right)\right\}=0$$

とできる。さらに、式 (1.4) で定義した運動量 p^i および Euler-Lagrange 方程式も用いて書き直せば、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}f^i+p^i\dot{f}^i\right)=0\qquad\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}p^if^i\right)=0$$

となり、結果的に下の保存則が導かれる。

$$\sum_{i=1}^{n}p^if^i=Const.\tag{1.7}$$

式 (1.6) のような f^i を含む無限小点変換において、ラグランジアンの関数形が不変、すなわち系が対称性を持っているとき、保存則 (1.7) が成立する。これを Noether の定理という。これは先に示した、循環座標に共役な運動量が保存するという法則の一般化になっている。

ラグランジアンがもつ時間の全微分の付け加えによる不定性を考慮して、Noether の定理をより一般化することもできる。すなわち、式 (1.6) のような f^i を含む無限小点変換において、ラグランジアン $L(q^i,\,\dot{q}^i,\,t)$ が

$$\tilde{L}(Q^i,\,\dot{Q}^i,\,t)=L(Q^i,\,\dot{Q}^i,\,t)+\varepsilon\frac{dG(Q^i,\,t)}{dt}$$

のように時間の全微分だけ変化したとき、保存則

$$\sum_{i=1}^{n}p^if^i-G=Const.$$

が成立する。

ここまでは運動量の保存則と対称性について考えてきた。同様にエネルギー保存則も対称性と関係していて、**系が時間推進に対して不変であるとき、系のエネルギーは保存する。**系のエネルギーは、

$$E(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}^i-L(q^k(t),\,\dot{q}^k(t),\,t)\tag{1.8}$$

と定義される。これを時間微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{E}&=\sum_{i=1}^{n}(\dot{p}^i\dot{q}^i+p^i\ddot{q}^i)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i+\frac{\partial L}{\partial t}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{p}^i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i+\sum_{i=1}^{n}\left(p^i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\ddot{q}^i-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。運動量の定義式 (1.4) と Euler-Lagrange 方程式 (1.5) より、前二項が 0 になるので結局、

$$\dot{E}=-\frac{\partial L}{\partial t}\tag{1.9}$$

となる。$\dot{E}$ が 0 になることはラグランジアンが時間によらないこと、すなわち系が時間推進に対して不変であることを示している。

エネルギーの表式は、「時間の共役運動量」として導くことができる。このためには時間 t を、配位を決める実数、配位空間の座標として扱う必要がある。別の時間軸 τ を導入して t を τ の関数 $t(\tau)$ とすればよくて、t の微分をドットで書き表すのに対し τ での微分をプライムで書き表すことにすると、

$$q^i(t(\tau))=Q^i(\tau),\quad Q^{i\prime}(\tau)=\frac{dQ^i}{d\tau}=\frac{dq^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\dot{q}^it'$$

という風に各座標の関数形の変更が起きる。さらに、t で積分すると作用 S となるようになっているラグランジアン L も、τ で積分すると作用 S となるような別のラグランジアン $\tilde{L}$ に変更されなくてはならない。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b L(q^i,\, \dot{q}^i,\, t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta L\left(Q^i(\tau),\, \frac{Q^{i\prime}}{t'},\, t(\tau)\right) t' d\tau \quad (a = t(\alpha),\, b = t(\beta))
\end{aligned}
$$

から $\tilde{L}$ は、

$$
\tilde{L}(Q^i,\, t,\, Q^{i\prime},\, t') = L\left(Q^i(\tau),\, \frac{Q^{i\prime}}{t'},\, t(\tau)\right) t'
$$

となる。以上で t に共役な運動量 p_t を求める準備は整った。実際に求めてみると、

$$
p_t = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = L + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{Q^{i\prime}}{t'}\right) t' = L - \sum_{i=1}^n p^i \frac{Q^{i\prime}}{t'} = L - \sum_{i=1}^n p^i \dot{q}^i = -E
$$

となり、符号を別にすれば確かにエネルギーは時間の共役運動量だった。

1.4　Lagrange の未定乗数法

物体の運動は状況により、拘束条件と呼ばれる制限がかかることがある。拘束条件下の系は条件がない系より自由度が小さく、運動を求めるには条件により制限された運動の候補の中で最小作用の原理を満たすものを求めることになる。求め方については、自由度の小さい系に還元することもできるが、ここでは**拘束条件を残したままそのまま取り扱う Lagrange の未定乗数法**を考える。

拘束条件は、m 個 $(m < n)$ あるとすると次のような式で与えられるとする。

$$
\phi^a(q^i,\, t) = 0 \quad (a = 1,\, 2, \cdots m) \tag{1.10}
$$

これらは関数的に独立、すなわち配位空間 C 上の m 個のベクトル場

$$
\left(\frac{\partial \phi^a}{\partial q^1}, \frac{\partial \phi^a}{\partial q^2}, \cdots \frac{\partial \phi^a}{\partial q^n}\right) \quad (a = 1,\, 2, \cdots m)
$$

が C の各点で 1 次独立である。これは、$n \times m$ 行列 $\left(\dfrac{\partial \phi^a}{\partial q^i}\right)$ の階数が m であること、すなわち $\left(\dfrac{\partial \phi^a}{\partial q^i}\right)$ が正則な m 次の小行列を持つことと同値である。

運動の候補が制限されるとはすなわち、変分を考える際の無限小変化 $\delta q = \varepsilon f^i$ の f^i が任意ではないということである。拘束条件下で変分を考え最小値を求めるためには、$\phi^a(q^i,\, t) = 0$ を保ったまま q^i を無限小変化させせなければならない。そのような f^i は、

$$
\phi^a(q^i + \varepsilon f^i,\, t) = 0 \quad (a = 1,\, 2, \cdots m)
$$

を満たす。上式の左辺は、

$$
\phi^a(q^i + \varepsilon f^i,\, t) = \phi^a(q^i,\, t) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^a}{\partial q^i} f^i + O(\varepsilon^2)
$$

と変形できるから、結局は ε が 1 次の項の係数が 0 になればよい。

以上をまとめると、**拘束条件** (1.10) **のもとでの運動は、**

$$
\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^a}{\partial q^i} f^i = 0 \quad (a = 1,\, 2, \cdots m) \tag{1.11}
$$

を満たすような f^i のもとで、Euler-Lagrange 方程式 (1.2) **を満たす関数形 q^i を求めることでわかる。**

Lagrange の未定乗数法では、拘束条件 (1.10) のもとで

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^i}=0\quad (i=1,\,2,\cdots n) \tag{1.12}$$

を解く問題が、この拘束条件付き変分問題と等価であることを利用する。

$\left(\dfrac{\partial \phi^a}{\partial q^i}\right)$ の正則な小行列が、$\left(\dfrac{\partial \phi^a}{\partial q^{i_b}}\right)_{a,\,b=1,\,2,\cdots m}$ だとする。ただし、i_b は、$1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n$ を満たす。すると、連立一次方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^{i_b}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i_b}}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^{i_b}}=0\quad (b=1,\,2,\cdots m) \tag{1.13}$$

が $\lambda_1,\,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ について解けるとわかる。解の形は $\lambda_a=\lambda_a(q,\,\dot{q},\,\ddot{q},\,t)$ である。

拘束条件下の運動が満たす条件は、(1.2) と (1.11) だったので、任意の λ_a で、

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^i}\right\}f^i=0$$

が成り立つことだと言い換えられる。この λ_a に (1.13) の解を選ぶと上式は、

$$\sum_{\alpha=1}^{n-m}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^{i'_\alpha}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'_\alpha}}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^{i'_\alpha}}\right\}f^{i'_\alpha}=0$$

となる (ただし $\{i'_1,\,i'_2,\cdots,i'_{n-m}\}=\{1,\,2,\cdots,n\}\setminus\{i_1,\,i_2,\cdots,\,i_m\}$)。この $f^{i'_1},\,f^{i'_2},\cdots,\,f^{i'_{n-m}}$ は任意に取ってよい。なぜなら、それらに合わせて (1.11) を満たすように取ることができる不定性が $f^{i_1},\,f^{i_2},\cdots,\,f^{i_m}$ にあるからである。

よって、上式から導かれることは、

$$\frac{\partial L}{\partial q^{i'_\alpha}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'_\alpha}}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^{i'_\alpha}}=0\quad (\alpha=1,\,2,\cdots,\,n-m)$$

である。しかし、これは (1.13) と合わせてまとめることができて、それこそが (1.12) である。まとめる前は λ_a を求める連立式とその λ_a の値を用いて運動方程式を導き、q^i を求める連立式の二種類だった。まとめた後は単にそれらをまとめて求めるだけの問題とみなしてよい。

Lagrange の未定乗数法により、問題は (1.12) を解く、すなわち任意の $g^1,\,g^2,\cdots,\,g^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial \phi^a}{\partial q^i}\right\}g^i=0$$

が成り立つような q^i を求めるという問題になった。この問題はまた、ラグランジアンが

$$\tilde{L}(q^i,\,\lambda_a,\,\dot{q}^i,\,t)=L+\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\phi^a(q^i,\,t)$$

であるような系の拘束条件のない運動を考える問題と等価である。そのような系の作用は、

$$\tilde{S}[q^i,\lambda_a]=\int_a^b\tilde{L}dt$$

で、この最小 (停留) 値を考えることで Euler-Lagrange 方程式が求まるが、q^i についての変分からは (1.12) が、λ_a についての変分からは (1.10) が導かれる。

2 Lagrange 形式から Hamilton 形式へ

2.1 基本的要請

共変性を持った力学の形式には、Lagrange 形式に加え Hamilton 形式[4)]がある。Hamilton 形式において、Lagrange 形式におけるラグランジアンのように中心となる関数は、ラグランジアンに **Legendre 変換**を施した**ハミルトニアン**と呼ばれるものである。

Legendre 変換は、次のように多変数関数の変数 (の一部) を切り替え、別の多変数関数を作る。微分可能な多変数関数

$$A(x,\, s) = A(x_1,\, x_2, \cdots, x_n,\, s_1,\, s_2, \cdots, s_m)$$

を考える。$x_1,\, x_2, \cdots, x_n$ を切り替える変数 (能動変数)、$s_1,\, s_2, \cdots, s_m$ を切り替えない変数 (受動変数) とする。能動変数は変換の前後で変わってしまうので、x_i は A 系の能動変数と呼んで区別する。$A(x,\, s)$ を x_i で微分したものを y_i と定義する。

$$y_i = \frac{\partial A(x,\, s)}{\partial x_i} \quad (i = 1,\, 2, \cdots, n)$$

右辺の関数は $x,\, s$ の関数だから左辺の y_i も同様に $x,\, s$ の関数 $y_i(x,\, s)$ だと考えられる。これらを逆に解いて、x_i を $y,\, s$ の関数 $x_i(y,\, s)$ と表せると仮定し、次の多変数関数 $B(y, s)$ を定義する。

$$B(y,\, s) = B(y_1,\, y_2, \cdots, y_n,\, s_1,\, s_2, \cdots, s_m) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i(y,\, s) - A(x(y,\, s),\, s)$$

この操作が、能動変数を A 系の x_i から B 系の y_i に切り替える Legendre 変換である。

Legendre 変換した系は、もう一度 Legendre 変換を施すことで元の系に戻る。それは、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(y,\, s)}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_j(y,\, s) - A(x(y,\, s),\, s)\right) \\
&= x_i(y,\, s) + \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial A(x,\, s)}{\partial x_j}\right)_{x=x(y,\, s)} \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial y_i} \\
&= x_i(y,\, s) + \sum_{j=1}^{n}\left\{y_j - \left(\frac{\partial A(x,\, s)}{\partial x_j}\right)_{x=x(y,\, s)}\right\} \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial y_i} \\
&= x_i(y,\, s)
\end{aligned}$$

という風に、B 系の能動関数で B を微分すると A 系の能動関数になることからもわかる。また、受動変数での微分について、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(y,\, s)}{\partial s_i} &= \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_j(y,\, s) - A(x(y,\, s),\, s)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial s_i} - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial A(x,\, s)}{\partial x_j}\right)_{x=x(y,\, s)} \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial s_i} - \frac{\partial A(x(y,\, s),\, s)}{\partial s_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\{y_j - \left(\frac{\partial A(x,\, s)}{\partial s_j}\right)_{x=x(y,\, s)}\right\} \frac{\partial x_j(y,\, s)}{\partial s_i} - \frac{\partial A(y,\, s)}{\partial s_i}
\end{aligned}$$

4) Hamilton 形式は、Lagrange 形式と比べて、共変性に優れ、また物理量の間に代数的構造が自然に導入される。後者は系を量子力学の範囲で考えるときなどに役立つ。

$$= -\frac{\partial A(y,\, s)}{\partial s_i}$$

となることも、Legendre 変換の性質の一つである。

ラグランジアンをハミルトニアンに Legendre 変換する際には、$\dot{q}^1,\, \dot{q}^2, \cdots, \dot{q}^n$ を能動変数に、$q^1,\, q^2, \cdots, q^n,\, t$ を受動変数にとる。すなわち、(1.4) より運動量 $p_1,\, p_2, \cdots, p_n$ がハミルトニアン系の能動変数である。

$\dot{q}^i$ が $q,\, p,\, t$ の関数として逆に解けない時、系は特異であるといい、別の扱いをする。この扱いについては後述することとし、ここでは系は特異でないとする。

ハミルトニアン $H(q^i,\, p^i,\, t)$ は次のように定義される[5)]。

$$H(q,\, p,\, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i(q,\, p,\, t) - L(q,\, \dot{q}(q,\, p,\, t),\, t) \tag{2.1}$$

Legendre 変換の性質から、$i = 1,\, 2, \cdots, n$ で

$$\dot{q}^i(q,\, p,\, t) = \frac{\partial H(q,\, p,\, t)}{\partial p_i} \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial H(q,\, p,\, t)}{\partial q^i} = -\frac{\partial L(q,\, \dot{q},\, t)}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial H(q,\, p,\, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\, \dot{q},\, t)}{\partial t}$$

が成立する。(1.5) から、Euler-Lagrange 方程式は、

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,\, p,\, t)}{\partial q^i} \tag{2.3}$$

となるとわかる。**ハミルトニアン系での運動方程式は (2.2) と (2.3) で与えられる。**この運動方程式は $2n$ 個の 1 階の時間微分方程式の組で、初期条件としてある時刻 $t = a$ での $(q^i(a),\, p_i(a))$ が与えられれば方程式が解けて、$(q^i(t),\, p_i(t))$ が求まる。$(q^i,\, p_i)$ が系の状態を表わしていると考えて、**正準座標と呼び、この $2n$ 個の数値を座標とする $2n$ 次元空間を相空間と呼ぶ。**

(1.9) をハミルトニアンで書き換えると、

$$\dot{E} = \frac{\partial H(q,\, p,\, t)}{\partial t}$$

である。ハミルトニアンが時間によらないとき、エネルギーは保存する。

Hamilton 形式も Lagrange 形式と同様に変分原理から導ける。ハミルトニアン作用 $A[q,\, p]$ を、

$$A[q,\, p] = \int_a^b \left(\sum_i p_i \dot{q}^i - H(q,\, p,\, t) \right) dt$$

と定義して、変分を、

$$\tilde{q}^i(t) = q^i(t) + \varepsilon f^i(t), \quad \tilde{p}_i(t) = p_i(t) + \varepsilon g_i(t)$$

とする。(ε は無限小パラメータ)

$$\begin{aligned} A[\tilde{q},\, \tilde{p}] &= A[q,\, p] + \varepsilon \int_a^b \left\{ \sum_i (g_i \dot{q}^i + p_i \dot{f}^i) - \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} f^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} g_i \right) \right\} dt \\ &= A[q,\, p] + \varepsilon \left[\sum_i (p_i(b) f^i(b) - p_i(a) f^i(a)) + \int_a^b \sum_i \left\{ \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) g_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) f^i \right\} dt \right] \end{aligned}$$

---

5) 式 (2.1) は、系のエネルギーの定義式 (1.8) と形式的には等しいが、系のエネルギーが系の運動によって決まる" 物理量" であるのに対し、ハミルトニアンは系の運動を決定する" 関数" であって、二つは概念的にはまったく別のものである。

より[6]、$f^i(a) = f^i(b) = 0$ を満たすような任意の f^i, g^i による変分で、ハミルトニアン作用が停留値をとることから、運動方程式 (2.2), (2.3) が導かれる。

相空間を M としたとき、**物理量は M 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ として定義される。**このように定義された物理量に対して、次の **Poisson 括弧**という二項演算を定義する。物理量 $f(q, p), g(q, p)$ の Poisson 括弧は、

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \tag{2.4}$$

で与えられる。物理量の時間発展はこの Poisson 括弧のみで、$\dot{f} = \{f, H\}$ と表わせる[7]。単なる $2n$ 次元空間 $\mathbb{R}^{2n}$ ではなく、**この Poisson 括弧が備わった $\mathbb{R}^{2n}$ こそが相空間である。**正準座標 q^i, p_i の時間発展も、$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$ で表わされるが、これは (2.2), (2.3) である。

(2.2), (2.3) で相空間の各点に与えられる速度ベクトルは、相空間上のベクトル場

$$\boldsymbol{X}_H(q, p, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, -\frac{\partial H}{\partial q^2}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right)$$

をなす。このベクトル場 $\boldsymbol{X}_H(q, p, t)$ を **(ハミルトニアンの)Hamilton ベクトル場**という。相空間 M の座標系を $(x^a) = (x^1, x^2, \cdots, x^m)(= (q^1, q^2, \cdots, q^n, p_1, p_2, \cdots, p_n))(m = 2n)$ と表わすことにすると

$$\mathrm{div}\boldsymbol{X}_H = \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial X_H^a}{\partial x^a} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q^i} \right) = 0$$

より、**Hamilton ベクトル場は発散がない**ことがわかる。

時刻 $t = 0$ で M 内の領域 D_0 を考える。D_0 内の点 x_0^a は時間発展に伴い、時刻 t でパラメータ表示された曲線 x_t^a に沿って M 内を運動する。よって、領域 D_0 も、

$$D_t = \{(x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^m) \in M | (x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^m) \in D_0\}$$

というふうに時間発展していく。

x_t^a が満たす運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}x_t^a = X_H^a(x_t, t)$$

であるから、

$$x_t^a = x_0^a + X_H^a(x_t, t)t + O(t^2)$$

と書ける。これを t をパラメータとした x_0^a から x_t^a への座標変換 $x_t^a = x_t^a(x_0^a)$ とみなす。

領域 D の体積を $\mathrm{Vol}(D)$ と書くと、

$$\mathrm{Vol}(D_t) = \int_{D_t} dx_t^1 dx_t^2 \cdots dx_t^m = \int_{D_0} \det\left(\frac{\partial x_t^a(x_0)}{\partial x_0^b} \right) dx_0^1 dx_0^2 \cdots dx_0^m$$

となる。式中の行列式は Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial x_t^a(x_0)}{\partial x_0^b} \right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_t^1(x_0)}{\partial x_0^1} & \dfrac{\partial x_t^1(x_0)}{\partial x_0^2} & \cdots & \dfrac{\partial x_t^1(x_0)}{\partial x_0^m} \\ \dfrac{\partial x_t^2(x_0)}{\partial x_0^1} & \dfrac{\partial x_t^2(x_0)}{\partial x_0^2} & \cdots & \dfrac{\partial x_t^2(x_0)}{\partial x_0^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_t^m(x_0)}{\partial x_0^1} & \dfrac{\partial x_t^m(x_0)}{\partial x_0^2} & \cdots & \dfrac{\partial x_t^m(x_0)}{\partial x_0^m} \end{vmatrix}$$

6） 式変形には以下で示す部分積分を用いた。

$$\int_a^b \sum_i p_i \dot{f}^i dt = \sum_i (p_i(b)f^i(b) - p_i(a)f^i(a)) - \int_a^b \sum_i \dot{p}_i f^i dt$$

7） ハミルトニアン自体も定義から物理量の一つである。

である。ところが、

$$\frac{\partial x_t^a(x_0)}{\partial x_0^b} = \delta_b^a + \frac{\partial X_H^a(x_0,\,0)}{\partial x_0^b}t + O(t^2)$$

となる (δ_a^b は Kronecker のデルタ) から、Jacobi 行列式を t の 1 次まで展開すると、

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial x_t^a(x_0)}{\partial x_0^b}\right) &= 1 + \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial x_t^a(x_0)}{\partial x_0^b}\right)t + O(t^2)\\ &= 1 + \mathrm{div}\boldsymbol{X}_H(x_0,\,0)t + O(t^2)\\ &= 1 + O(t^2)\end{aligned}$$

となる。よって $\mathrm{Vol}(D_t)$ は、

$$\mathrm{Vol}(D_t) = \mathrm{Vol}(D_0) + O(t^2)$$

なので、

$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(D_0)\right|_{t=0} = 0$$

が導かれる。最初に取った領域の時刻を動かせば、任意の時刻でこの式が得られるから、この式は $t = 0$ 以外でも成立する。

すなわち、**相空間上の任意の領域は、ハミルトニアンにより時間発展しても体積が不変である。これを Liouville の定理という。**

2.2 正準変換

Hamilton 形式は、相空間 M 上の座標変換である正準変換について共変的、すなわち運動方程式 (2.2), (2.3) の形を変えない。点変換も正準変換の一部である。

運動方程式、系の時間発展は Poisson 括弧で表わせるため、**正準変換は Poisson 括弧を不変とする座標変換である**とも言える。運動方程式 (2.2), (2.3) および Poisson 括弧の定義 (2.4) を満たす座標を正準座標系といい、正準座標系から正準変換で移りうる全ての座標系もまた正準座標系で、同様に運動方程式と Poisson 括弧の定義を満たす。

正準座標系 $(q_i,\,p_i)$ から何らかの変換で移してできる座標系 $(Q^i,\,P_i)$ が正準座標であることの必要十分条件は、

$$\{Q^i,\,Q^j\} = 0, \quad \{P_i,\,P_j\} = 0, \quad \{Q^i,\,P_j\} = \delta_j^i$$

である。

必要性の証明は、正準座標は Poisson 括弧について (2.4) を満たしているのだから、上式を $(Q^i,\,P_i)$ 座標系で実際に計算すればよい。

十分性は、物理量 $f(q,\,p) = f'(Q(q,\,p),\,Q(q,\,p))$, $g(q,\,p) = g'(Q(q,\,p),\,Q(q,\,p))$ について、

$$\begin{aligned}\{f,\,g\} &= \sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q^k}\right)\\ &= \sum_{i,\,j,\,k}\left\{\left(\frac{\partial f'}{\partial Q^i}\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} + \frac{\partial f'}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial q^k}\right)\left(\frac{\partial g'}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial p_k} + \frac{\partial g'}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right)\right.\\ &\qquad\left. - \left(\frac{\partial f'}{\partial Q^i}\frac{\partial Q^i}{\partial p_k} + \frac{\partial f'}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial g'}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k} + \frac{\partial g'}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q^k}\right)\right\}\\ &= \sum_{i,\,j,\,k}\left\{\frac{\partial f'}{\partial Q^i}\frac{\partial g'}{\partial Q^j}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\frac{\partial Q^j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial f'}{\partial P_i}\frac{\partial g'}{\partial P_j}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial f'}{\partial Q^i}\frac{\partial g'}{\partial P^j}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial f'}{\partial P_i}\frac{\partial g'}{\partial Q^j}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial Q^j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,\,j,\,k} \left(\frac{\partial f'}{\partial Q^i} \frac{\partial g'}{\partial Q^j} \{Q^i,\, Q^j\} + \frac{\partial f'}{\partial P_i} \frac{\partial g'}{\partial P_j} \{P_i,\, P_j\} + \frac{\partial f'}{\partial Q^i} \frac{\partial g'}{\partial P^j} \{Q^i,\, P_j\} + \frac{\partial f'}{\partial P_i} \frac{\partial g'}{\partial Q^j} \{P_i,\, Q^j\} \right) \\
&= \sum_{i} \left(\frac{\partial f'}{\partial Q^i} \frac{\partial g'}{\partial P_i} - \frac{\partial f'}{\partial P_i} \frac{\partial g'}{\partial Q^i} \right)
\end{aligned}
$$

となり、$(Q^i,\, P_i)$ 座標系が Poisson 括弧の形を保つことから確かめられる。なお、ここで $\{g,\, f\} = -\{f,\, g\}$ を用いた。

正準座標を、座標 q と運動量 p として区別しない表わし方 $(x^a) = (x^1, \cdots, x^{2n})(= (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n))$ で表わしたときの共変性についても見ておく。物理量 $f(x^1, \cdots, x^{2n})$ の時間発展は、ハミルトニアン $H(x,\, t)$ を用いて、

$$
\dot{f} = \{f,\, H\} = \sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial H}{\partial x^b}
$$

と Poisson 括弧を用いて表わされる。ただし、J^{ab} は次の $2n$ 次正方ブロック行列 J

$$
J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array} \right) \tag{2.5}
$$

の $(a,\, b)$ 成分である (0_n は n 次の零行列、I_n は n 次の単位行列)。

$x^a = x^a(y^1, y^2, \cdots, y^{2n})$ で決まるような、正準座標 x^a からの座標変換で Poisson 括弧が不変であるとは、この定数行列 J を用いて、

$$
\sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b} = \sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial y^a} \frac{\partial g}{\partial y^b}
$$

となることである。この式が成り立てば (y^a) も正準座標である。

ハミルトニアンは座標変換により、$K(y,\, t) = H(x,\, t)$ へと関数形が変更される。変換が正準変換なら Poisson 括弧が不変なので、系の運動方程式は

$$
\dot{y}^a = \{y^a,\, H\} = \sum_{b=1}^{n} J^{ab} \frac{\partial K}{\partial y^b}
$$

と形が保たれる。

Poisson 括弧を、座標変換 $y^a = y^a(x^1, x^2, \cdots, x^{2n})$ で決まる一般の座標系 (y^a) で表現することを考える。物理量 $f,\, g$ に対する Poisson 括弧は、

$$
\begin{aligned}
\{f,\, g\} &= \sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b} \\
&= \sum_{a,\,b,\,c,\,d=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial y^c} \frac{\partial y^c}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial y^d} \frac{\partial y^d}{\partial x^b} \\
&= \sum_{c,\,d=1}^{2n} \left(\sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial y^c}{\partial x^a} \frac{\partial y^d}{\partial x^b} \right) \frac{\partial f}{\partial y^c} \frac{\partial g}{\partial y^d}
\end{aligned}
$$

となる。

座標変換 $y^a = y^a(x^1, x^2, \cdots, x^{2n})$ が正準変換、すなわち (y^a) が正準座標系であるための必要十分条件は、Poisson 括弧が不変であること

$$
\sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b} = \sum_{c,\,d=1}^{2n} J^{cd} \frac{\partial f}{\partial y^c} \frac{\partial g}{\partial y^d}
$$

だったから、上で導いた一般の座標系での Poisson 括弧の表現と見比べると、この条件は、

$$J^{cd} = \sum_{a,\,b=1}^{2n} J^{ab} \frac{\partial y^c}{\partial x^a} \frac{\partial y^d}{\partial x^b}$$

と同値である。$(a,\,b)$ 成分が $A^{ab} = \dfrac{\partial y^a}{\partial x^b}$ であるような $2n$ 次正方行列 A と式 (2.5) の J を用いてこの条件を言い換えると、

$$J = AJ\,{}^tA \tag{2.6}$$

となる。これが $y^a = y^a(x^1,\,x^2,\cdots,\,x^{2n})$ が正準変換であるための必要十分条件である。

Poisson 括弧のように正準変換で不変な量としてもう一つ、Lagrange 括弧を導入する。相空間 M 上で一般の座標系 $(w^1,\,w^2,\cdots,w^{2n})$ と正準座標系 $(x^1,\,x^2,\cdots,x^{2n})$ をとると、座標関数 $w^a,\,w^b$ について Lagrange 括弧は

$$[w^a,\,w^b] = \sum_{c,\,d=1}^{2n} J_{cd} \frac{\partial x^c}{\partial w^a} \frac{\partial x^d}{\partial w^b}$$

と定義される。ただし、J_{cd} は式 (2.5) の J の $(c,\,d)$ 成分であり、さらに、

$$\sum_{c=1}^{2n} J_{ac}J^{bc} = \delta_a^b$$

より、${}^t(J^{-1})$ の $(c,\,d)$ 成分でもある。

$w^a,\,w^b$ は物理量だから、Poisson 括弧も定義できるが、Poisson 括弧と Lagrange 括弧の間には次の関係が成立する[8)]。

$$\begin{aligned}
\sum_{c=1}^{2n}[w^a,\,w^c]\{w^b,\,w^c\} &= \sum_{c,\,d,\,e,\,f,\,g=1}^{2n} J_{de} \frac{\partial x^d}{\partial w^a} \frac{\partial x^e}{\partial w^c} J^{fg} \frac{\partial w^b}{\partial x^f} \frac{\partial w^c}{\partial x^g} \\
&= \sum_{d,\,e,\,f=1}^{2n} J_{de}J^{fe} \frac{\partial x^d}{\partial w^a} \frac{\partial w^b}{\partial x^f} \\
&= \sum_{d=1}^{2n} \frac{\partial x^d}{\partial w^a} \frac{\partial w^b}{\partial x^d} = \delta_a^b
\end{aligned}$$

この結果は、$(a,\,b)$ 成分がそれぞれ $P^{ab} = \{w^a,\,w^b\}$, $L^{ab} = [w^a,\,w^b]$ であるような $2n$ 次正方行列 $P,\,L$ を使えば、

$$L = {}^t(P^{-1})$$

とまとめられる。Poisson 括弧が正準変換のもとで形が不変であることとこの関係から、Lagrange 括弧もそうであると予想できる。$y^a = y^a(x^1,\,x^2,\cdots,x^{2n})$ が正準変換だとして、実際に確かめてみる。

$$\begin{aligned}
[w^a,\,w^b] &= \sum_{c,\,d=1}^{2n} J_{cd} \frac{\partial x^c}{\partial w^a} \frac{\partial x^d}{\partial w^b} \\
&= \sum_{c,\,d,\,e,\,f=1}^{2n} \frac{\partial x^c}{\partial y^e} \frac{\partial x^d}{\partial y^f} J_{cd} \frac{\partial y^e}{\partial w^a} \frac{\partial y^f}{\partial w^b} \\
&= \sum_{c,\,d,\,e,\,f=1}^{2n} \frac{\partial y^e}{\partial w^a} \frac{\partial x^c}{\partial y^e} J_{cd} \frac{\partial x^d}{\partial y^f} \frac{\partial y^f}{\partial w^b}
\end{aligned}$$

8) ただし、式変形中で、

$$\sum_{c=1}^{2n} J_{ac}J^{bc} = \delta_a^b, \quad \sum_{c=1}^{2n} \frac{\partial w^a}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial w^b} = \delta_a^b, \quad \sum_{c=1}^{2n} \frac{\partial x^a}{\partial w^c} \frac{\partial w^c}{\partial x^b} = \delta_a^b$$

を用いた。

ここで、$(a,\,b)$ 成分が

$$L^{ab} = [w^a,\,w^b], \quad A^a_b = \frac{\partial y^a}{\partial x^b}, \quad B^a_b = \frac{\partial x^a}{\partial y^b}, \quad Y^a_b = \frac{\partial y^a}{\partial w^b}$$

であるような $2n$ 次正方行列 $L,\,A,\,B,\,Y$ と式 (2.5) の J を考えて、上で導いた Lagrange 括弧の変換式をこれらの行列で表わす。正準変換の条件式として (2.6) の両辺とも逆行列を取った式

$$J^{-1} = {}^tBJ^{-1}B$$

が使えるから、

$$L = {}^tY\,{}^tB\,{}^t(J^{-1})BY = -{}^tY\,{}^tBJ^{-1}BY = -{}^tYJ^{-1}Y = {}^tY\,{}^t(J^{-1})Y$$

が導かれる。もう一度両辺の成分同士を比較した式に戻せば、

$$[w^a,\,w^b] = \sum_{c,\,d=1}^{2n} J_{cd}\frac{\partial y^c}{\partial w^a}\frac{\partial y^d}{\partial w^b}$$

となり、確かに不変である。

さて、この Lagrange 括弧を座標 q と運動量 p を区別した正準座標系 $(q^1,\cdots,q^n,\,p_1,\cdots,p_n)(=(x^a))$ で表わし直してみると、

$$[w^a,\,w^b] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q^i}{\partial w^a}\frac{\partial p_i}{\partial w^b} - \frac{\partial p_i}{\partial w^a}\frac{\partial q^i}{\partial w^b}\right)$$

となる。別の正準座標 $(Q^1,\,Q^2,\cdots,Q^n,\,P_1,\,P_2,\cdots,P_n)$ を取れば、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q^i}{\partial w^a}\frac{\partial p_i}{\partial w^b} - \frac{\partial p_i}{\partial w^a}\frac{\partial q^i}{\partial w^b}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial w^a}\frac{\partial P_i}{\partial w^b} - \frac{\partial P_i}{\partial w^a}\frac{\partial Q^i}{\partial w^b}\right)$$

が成り立つことになる。この式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial w^a}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\frac{\partial q^i}{\partial w^b} - P_i\frac{\partial Q^i}{\partial w^b}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial w^b}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\frac{\partial q^i}{\partial w^a} - P_i\frac{\partial Q^i}{\partial w^a}\right)\right\} = 0$$

とできる。この式は、Poincare の補題から、

$$\frac{\partial W}{\partial w^a} = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i\frac{\partial q^i}{\partial w^a} - P_i\frac{\partial Q^i}{\partial w^a}\right) \tag{2.7}$$

を満たすような作用と同じ次元の関数 W が存在することを示す[9)]。

この二つの正準座標を用いて作られた関数 W は、逆にこれを与えられたときに正準変換を構成することができる。例えば、W として

$$W = W(q^1,\,q^2,\dots,q^n,\,Q^1,\,Q^2,\dots,Q^n)$$

が与えられたとき、

$$\frac{\partial W}{\partial w^a} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial w^a} + \frac{\partial W}{\partial Q^i}\frac{\partial Q^i}{\partial w^a}\right)$$

と式 (2.7) を比較すると、

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} \quad (i = 1,\,2,\dots,n)$$

となる。

$$\det\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial Q^j}\right\} \neq 0$$

9) ただし、この議論は局所的なものであり、相空間 M が穴があいたような複雑な形をしている場合、このような関数 W は M 全体で大域的に定義することはできない。ここで考えている相空間 $M = \mathbb{R}^{2n}$ では問題ない。

が満たされていればこれは座標変換を与えていることになるため、正準変換が構成されている。

このような関数 W は、n 個の旧正準座標と n 個の新正準座標を引数にもつ $2n$ 変数関数であればよい。それは、式 (2.7) の右辺の一つの項 $p_i \dfrac{\partial q^i}{\partial w^a}$ が

$$p_i \frac{\partial q^i}{\partial w^a} = \frac{\partial}{\partial w^a}(p_i q^i) - q^i \frac{\partial p_i}{\partial w^a}$$

と変形できることから、集合 I を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし、I', I'', J', J'' を

$$I = I' \cup I'' = J' \cup J'', \quad I' \cap I'' = J' \cap J'' = \emptyset$$

を満たすように I を二通りに分割した集合とすると、式 (2.7) が

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial w^a} &= \sum_{i' \in I'} p_{i'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial w^a} + \sum_{i'' \in I''} p_{i''} \frac{\partial q^{i''}}{\partial w^a} - \sum_{j' \in J'} P_{j'} \frac{\partial Q^{j'}}{\partial w^a} - \sum_{j'' \in J''} P_{j''} \frac{\partial Q^{j''}}{\partial w^a} \\
&= \sum_{i' \in I'} p_{i'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial w^a} + \sum_{i'' \in I''} \left(\frac{\partial}{\partial w^a}(p_{i''} q^{i''}) - q^{i''} \frac{\partial p_{i''}}{\partial w^a} \right) \\
&\quad - \sum_{j' \in J'} P_{j'} \frac{\partial Q^{j'}}{\partial w^a} - \sum_{j'' \in J''} \left(\frac{\partial}{\partial w^a}(P_{j''} Q^{j''}) - Q^{j''} \frac{\partial P_{j''}}{\partial w^a} \right)
\end{aligned}$$

となり、整理すると

$$\frac{\partial}{\partial w^a} \left(W - \sum_{i'' \in I''} p_{i''} q^{i''} + \sum_{j'' \in J''} P_{j''} Q^{j''} \right) = \sum_{i' \in I'} p_{i'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial w^a} - \sum_{i'' \in I''} q^{i''} \frac{\partial p_{i''}}{\partial w^a} - \sum_{j' \in J'} P_{j'} \frac{\partial Q^{j'}}{\partial w^a} + \sum_{j'' \in J''} Q^{j''} \frac{\partial P_{j''}}{\partial w^a}$$

とできて、新たに母関数 $\tilde{W}$ を

$$\tilde{W} = W - \sum_{i'' \in I''} p_{i''} q^{i''} + \sum_{j'' \in J''} P_{j''} Q^{j''}$$

と置きなおせば、$\tilde{W}$ から上と同様にして正準変換が構成できるためである。

正準座標系 (q^i, p_i) と (q^i, p_i) から座標変換を施して得られる座標系 (Q^i, P_i)、作用の次元を持つ $2n$ 変数関数 $W(q^{i'}, p_{i''}, Q^{j'}, P_{j''})$ $(i' \in I', i'' \in I'', j' \in J', j'' \in J'', I = \{1, 2, \ldots, n\}, I = I' \cup I'' = J' \cup J'', I' \cap I'' = J' \cap J'' = \emptyset)$ について、

$$p_{i'} = \frac{\partial W}{\partial q^{i'}}, \quad q^{i''} = -\frac{\partial W}{\partial p_{i''}}, \quad P_{j'} = -\frac{\partial W}{\partial Q^{j'}}, \quad Q^{j''} = \frac{\partial W}{\partial P_{j''}} \tag{2.8}$$

が成り立つとき、(Q^i, P_i) は正準座標系となっている。**このようにして正準変換を構成する関数を正準変換の母関数という。**

母関数として、

$$W(p, Q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i f^i(Q) \quad (f^i(i = 1, 2, \ldots, n)\text{は任意関数})$$

を選ぶと、

$$\begin{cases} q^i = -\dfrac{\partial W(p, Q)}{\partial p_i} = f^i(Q) \\ P_i = -\dfrac{\partial W(p, Q)}{\partial Q^i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f^i(Q)}{\partial Q^j} \end{cases}$$

という正準変換を構成できる。これは

$$q^i = f^i(Q), \quad p_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q^i(f)}{\partial f^j} P_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q^i(q)}{\partial q^j} P_j$$

というふうに解けて、配位空間の座標変換、つまり点変換を与えていたことがわかる。また、特に $f^i(Q) = Q^i$ のとき

$$W(p,\, Q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i Q^i$$

は恒等変換を与えていることがわかる。母関数として今度は、

$$W(q,\, Q) = \sum_{i=1}^{n} q_i Q^i$$

を与えると、

$$\begin{cases} p^i = \dfrac{\partial W(p,\, Q)}{\partial p_i} = Q^i \\ P_i = -\dfrac{\partial W(p,\, Q)}{\partial Q^i} = q^i \end{cases}$$

という、配位空間の座標と運動量の役割が入れ替わる正準変換が構成できる。これは点変換には含まれない変換である。

Lagrange 形式と同様に、無限小正準変換を通してハミルトニアンの対称性と保存則の関係を見る。恒等変換の母関数

$$W(q,\, Q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i Q^i$$

と無限小だけ異なる母関数

$$W(q,\, Q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i Q^i - \varepsilon f(Q^1, \ldots,\, Q^n,\, p_1, \ldots,\, p_n,\, t)$$

は、無限小正準変換

$$q^i = -\frac{\partial W}{\partial p_i} = Q^i + \varepsilon \frac{\partial f(Q,\, p,\, t)}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} = p_i + \varepsilon \frac{\partial f(Q,\, p,\, t)}{\partial Q^i}$$

を与える。Q^i と q^i は無限小パラメータ ε 程度しか差がないので、この変換は次の変換と ε^2 程度しか差がない[10)]。

$$Q^i = q^i - \varepsilon \frac{\partial f(q,\, p,\, t)}{\partial p_i}, \quad P_i = p_i + \varepsilon \frac{\partial f(q,\, p,\, t)}{\partial Q^i}$$

ある物理量 $G(q,\, p)$ にこの無限小正準変換を施して得られる $G'(q,\, p) = G(Q, P)$ をみると、

$$\begin{aligned} G'(q,\, p) = G(Q,\, P) &= G(q,\, p) - \varepsilon \sum_i \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \varepsilon \sum_i \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} \\ &= G(q,\, p) - \varepsilon \{G,\, f\} \end{aligned}$$

すなわち、

$$G \quad \longmapsto \quad G - \varepsilon\{G,\, f\}$$

と移されるとわかる。この変換は、$f(q,\, p,\, t)$ をハミルトニアンとして時間を $-\varepsilon$ だけ進めた、と解釈できる。

時間に陽に依存しないハミルトニアン $H(q,\, p)$ が、ある物理量 $f(q,\, p)$ と Poisson 可換

$$\{f,\, H\} = \{H,\, f\} = 0$$

であるとき、f が H をハミルトニアンとする運動で保存量となるとともに、H は f をハミルトニアンとする運動で保存量となっている。また、f が無限小正準変換の母関数であったときは、先の考察より H は f

10） 一般にはこの変換の方を無限小正準変換と呼び、$f(q,\, p,\, t)$ を無限小正準変換の母関数と呼ぶ。

を母関数とする無限小正準変換に対し不変である、すなわち対称性を持っていると考えることができる。**Hamilton 形式では、ある無限小正準変換に対してハミルトニアンが対称性を持つとき、その変換の母関数で定まる物理量が保存する**、ということであり、Hamilton 形式における Noether の定理といえる。

2.3 Poisson 括弧と相空間

時間に依存しないハミルトニアン $H(q,\,p)$ が、二つの物理量 $f(q,\,p),\,g(q,\,p)$ と Poisson 可換であるとき、$f,\,g$ を母関数とする無限小正準変換に対しハミルトニアンは対称性を持ち保存量となるが、$\{f,\,g\}$ も $H(q,\,p)$ と Poisson 可換であり、与える無限小正準変換に対しハミルトニアンは対称性をもつ。これは、任意の物理量 $f,\,g,\,h$ で成り立つ次の **Jacobi 律**から示される。

$$\{f,\,\{g,\,h\}\}+\{g,\,\{h,\,f\}\}+\{h,\,\{f,\,g\}\}=0 \tag{2.9}$$

(2.9) を証明するうえで計算を簡単にするために、Poisson 括弧や Lagrange 括弧の節で用いた $J^{ab},\,J_{cd}$ のように添え字をもつ量 A_{ab} について次を満たす対称成分 $A_{(ab)}$、反対称成分 $A_{[ab]}$ を導入する。

$$\begin{aligned}
A_{ab}&=A_{(ab)}+A_{[ab]}\\
A_{(ab)}&=\frac{1}{2}\left(A_{ab}+A_{ba}\right)\\
A_{[ab]}&=\frac{1}{2}\left(A_{ab}-A_{ba}\right)
\end{aligned}$$

対称成分と反対称成分について、

$$\sum_{a,\,b}A_{(ab)}B^{[ab]}=-\sum_{a,\,b}A_{(ba)}B^{[ba]}=-\sum_{a,\,b}A_{(ab)}B^{[ab]}=0$$

が導かれるから、

$$\begin{aligned}
\sum_{a,\,b}A_{(ab)}B^{ab}&=\sum_{a,\,b}A_{(ab)}B^{(ab)}\\
\sum_{a,\,b}A_{[ab]}B^{ab}&=\sum_{a,\,b}A_{[ab]}B^{[ab]}
\end{aligned}$$

という風に、掛けた相手に対称性・反対称性が「伝染る」性質がわかる。

正準座標を座標と運動量として区別しない表わし方 $(x^a)=(x^1,\cdots,\,x^{2n})(=(q^1,\cdots,\,q^n,\,p_1,\cdots,\,p_n))$ で表わしたときの Poisson 括弧は、$\partial/\partial x^a$ を ∂_a と表わすことにすると、

$$\{f,\,g\}=\sum_{a,\,b=1}^{2n}J^{ab}\left(\partial_a f\right)\left(\partial_b g\right) \tag{2.10}$$

と表わされる。ただし、J^{ab} は (2.5) の J の $(a,\,b)$ 成分、$f,\,g$ は相空間 M 上の関数である。(2.5) の J について、$J^{cd}=J^{[cd]}$ が成り立つので、任意の A_{cd} について、

$$\begin{aligned}
\sum_{c,d}J^{cd}A_{cd}&=\sum_{c,d}J^{[cd]}A_{cd}=\sum_{c,d}J^{[cd]}A_{[cd]}\\
&=-\sum_{c,d}J^{[cd]}A_{[dc]}=-\sum_{c,d}J^{[cd]}A_{dc}\\
&=-\sum_{c,d}J^{cd}A_{dc}
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、相空間 M 上の関数 $f,\,g,\,h$ について、

$$\{f,\,\{g,\,h\}\}=\sum_{a,b}J^{ab}\left(\partial_a f\right)\left[\partial_b\left\{\sum_{c,d}J^{cd}\left(\partial_c g\right)\left(\partial_d h\right)\right\}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} \left\{ (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) + (\partial_a f)(\partial_c g)(\partial_b \partial_d h) \right\} \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} \left\{ (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) - (\partial_a f)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c h) \right\}
\end{aligned}
$$

が成り立つとわかる。

$$
\partial_b \partial_c g = \partial_c \partial_b g
$$

より、$\partial_b \partial_c g$ は自身の対称成分 $\partial_{(b}\partial_{c)} g$ と一致するので、上記の「伝染る」性質を用いれば、

$$
\sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_b \partial_c g) = \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} \left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) = \sum_{a,b,c,d} J^{a(b} J^{c)d} \left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right)
$$

となるとわかる。さらに $J^{a(b}J^{c)d}$ について

$$
J^{a(b}J^{c)d} = \frac{1}{2}\left(J^{ab}J^{cd} + J^{ac}J^{bd} \right) = \frac{1}{2}\left(J^{ba}J^{dc} + J^{ca}J^{db} \right) = \frac{1}{2}\left(J^{dc}J^{ba} + J^{db}J^{ca} \right) = J^{d(b}J^{c)a}
$$

と、$a,\,d$ について対称であるとわかる。したがって、

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) &= \sum_{a,b,c,d} J^{a(b} J^{c)d} (\partial_a f)(\partial_d h)\left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{d(b} J^{c)a} (\partial_a f)(\partial_d h)\left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{a(b} J^{c)d} (\partial_d f)(\partial_a h)\left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{a(b} J^{c)d} (\partial_a h)(\partial_d f)\left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_a h)(\partial_d f)\left(\partial_{(b}\partial_{c)} g \right) \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_a h)(\partial_d f)(\partial_b \partial_c g)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。同様にして

$$
\sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_a f)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c h) = \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} (\partial_a g)(\partial_d f)(\partial_b \partial_c h)
$$

であることも示せて、$\{g,\,\{h,\,f\}\},\,\{h,\,\{f,\,g\}\}$ も $f,\,g,\,h$ について入れ替えた結果が成り立つから、

$$
\begin{aligned}
&\{f,\,\{g,\,h\}\} + \{g,\,\{h,\,f\}\} + \{h,\,\{f,\,g\}\} \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} \{ (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) - (\partial_a f)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c h) + (\partial_a g)(\partial_d f)(\partial_b \partial_c h) \\
&\quad - (\partial_a g)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c f) + (\partial_a h)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c f) - (\partial_a h)(\partial_d f)(\partial_b \partial_c g) \} \\
&= \sum_{a,b,c,d} J^{ab} J^{cd} \{ (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) - (\partial_a f)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c h) + (\partial_a f)(\partial_d g)(\partial_b \partial_c h) \\
&\quad - (\partial_a g)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c f) + (\partial_a g)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c f) - (\partial_a f)(\partial_d h)(\partial_b \partial_c g) \} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり、Jacobi 律が示せた。

Poisson 括弧には、Jacobi 律 $\{f,\,\{g,\,h\}\}+\{g,\,\{h,\,f\}\}+\{h,\,\{f,\,g\}\}=0$ のほかにも

$$\begin{cases} \{f,\,g\}=-\{g,\,f\} & (\text{歪対称性}) \\ \{f+\alpha g,\,h\}=\{f,\,h\}+\alpha\{g,\,h\} & (\text{線形性}) \\ \{f,\,gh\}=h\{f,\,g\}+g\{f,\,h\} & (\text{Leibniz 則}) \\ \forall f\in C_M,\,\{f,\,g\}=0\implies g\text{は定数関数} & (\text{非退化性}) \end{cases}$$

(ただし、C_M は M 上の微分可能な関数全体の集合、$f,\,g,\,h\in C_M$、$\alpha\in\mathbb{R}$) がある。

$f,\,g,\,h,\ldots$ といった物理量は、座標系によらず $2n$ 次元空間 M から $\mathbb{R}$ 上の決まった値を返す関数であり、座標系で変わるのはその関数形である。Poisson 括弧の定義式 (2.10) は、正準座標系 (x^a) で表示されているが、任意の座標系 (y^a) での一般的な表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{f,\,g\} &= \sum_{a,\,b} J^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial x^b} \\ &= \sum_{a,\,b} J^{ab}\sum_c \frac{\partial y^c}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial y^c}\sum_d \frac{\partial y^d}{\partial x^b}\frac{\partial g}{\partial y^d} \end{aligned}$$

途中で $f,\,g$ は関数形を変化させていることに注意してほしい。今、

$$\pi^{cd}=\sum_{a,\,b} J^{ab}\frac{\partial y^c}{\partial x^a}\frac{\partial y^d}{\partial x^b} \qquad ((x^a)\text{ は正準座標、}(y^a)\text{ は一般座標})$$

とおくと、上式から (2.10) の正準座標 (x^a) を一般座標 (y^a) としても、J^{ab} を π^{ab} に置き換えればポアソン括弧の定義式として正しい式となることがわかる。$\pi^{ab}=J^{ab}$ を満たす π^{ab} を定義する座標系は正準座標系である、と言い換えることもできる。

π^{ab} を Poisson 構造という。物理量が座標系によらないのと同様、Poisson 括弧も座標系によって異なる演算の結果を与えることはないので、一般の座標系で Poisson 括弧の演算を変えないよう M 上の正準座標から Poisson 構造を作れるように、M と π^{ab} から正準座標系を与えることもできる。

このことを見るために、まず一般の括弧積 $\{\cdot,\cdot\}':C_M\times C_M\to C_M$ について考える。ある (正準座標系に限らない) 座標系 (x^a) でこの括弧積が

$$\{f,\,g\}'=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}\partial_a f\partial_b g \tag{2.11}$$

と、$\pi^{ba}=-\pi^{ab}$ が成り立つ $\pi^{ab}=\pi^{ab}(x^a)$ で表されるとき、括弧積は歪対称性・線形性・Leibniz 則が成り立つ。

$$\begin{gathered} \{g,\,f\}'=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}\partial_a g\partial_b f=\sum_{a,\,b}-\pi^{ba}\partial_a g\partial_b f=-\{f,\,g\}' \\ \{f+\alpha g,\,h\}'=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}\partial_a(f+\alpha g)\partial_b h=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}(\partial_a f+\alpha\partial_a g)\partial_b h=\{f,\,h\}'+\alpha\{g,\,h\}' \\ \{f,\,gh\}=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}\partial_a f\partial_b gh=\sum_{a,\,b}\pi^{ab}\partial_a f[(\partial_b g)h+g(\partial_b h)]=\{f,\,g\}'h+\{f,h\}'g \end{gathered}$$

逆に括弧積がこの 3 性質を持つとき、括弧積の座標表現は式 (2.11) でしか与えられないことを示そう。$\pi^{ab}:=\{x^a,\,x^b\}'$ で定義すると、歪対称性から、

$$\pi^{ba}=\{x^b,\,x^a\}'=-\{x^a,\,x^b\}'=-\pi^{ab}$$

が導かれる。また線形性とライプニッツ則から、$\alpha\in\mathbb{R}$ について、

$$\alpha\{f,\,g\}'=\{f,\,\alpha g\}'=\alpha\{f,\,g\}'+g\{f,\,\alpha\}' \qquad \therefore\ \{f,\,\alpha\}'=0$$

が導かれる。また、Taylor の定理から M 上の点 $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$ の周りで $f,\, g$ は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\xi) + \sum_a \partial_a f(\xi)(x^a - \xi^a) + \sum_{a,\,b} F_{ab}(x)(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b) \\
g(x) &= g(\xi) + \sum_a \partial_a g(\xi)(x^a - \xi^a) + \sum_{a,\,b} G_{ab}(x)(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b)
\end{aligned}
$$

と表せる。一般の関数 $A_{ab}(x)$ において、

$$
\begin{aligned}
\{f,\, A_{ab}(x)(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b)\}'\big|_{x=\xi} &= \{f,\, A_{ab}(x)\}'(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b)\}'\big|_{x=\xi} \\
&\quad + \{f,\, x^a - \xi^a\}' A_{ab}(x)(x^b - \xi^b)\}'\big|_{x=\xi} \\
&\quad + \{f,\, x^b - \xi^b\}' A_{ab}(x)(x^a - \xi^a)\}'\big|_{x=\xi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となることと $\{f,\, \alpha\} = 0$ を踏まえて、$\{f,\, g\}'$ の $x = \xi$ での値を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\{f,\, g\}'\big|_{x=\xi} &= \left\{ f(\xi) + \sum_a \partial_a f(\xi)(x^a - \xi^a) + \sum_{a,\,b} F_{ab}(x)(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b), \right. \\
&\qquad \left. g(\xi) + \sum_a \partial_a g(\xi)(x^a - \xi^a) + \sum_{a,\,b} G_{ab}(x)(x^a - \xi^a)(x^b - \xi^b) \right\}' \Bigg|_{x=\xi} \\
&= \left\{ \sum_a \partial_a f(\xi)(x^a - \xi^a),\, \sum_a \partial_a g(\xi)(x^a - \xi^a) \right\}' \Bigg|_{x=\xi} \\
&= \sum_{a,\,b} \partial_a f(\xi) \partial_b f(\xi) \left\{ (x^a - \xi^a),\, (x^b - \xi^b) \right\}' \Bigg|_{x=\xi} = \sum_{a,\,b} \pi^{ab}(\xi) \partial_a f(\xi) \partial_b f(\xi)
\end{aligned}
$$

と、(2.11) が導けた。

この括弧積 $\{\cdot,\cdot\} : C_M \times C_M \to C_M$ がさらに Jacobi 律と非退化性をもつとき、それは Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\} : C_M \times C_M \to C_M$ に他ならず、π^{ab} は Poisson 構造である。

π^{ab} については、$\pi^{ab} = \pi^{[ab]}$ が成り立つので、任意の A_{cd} について、

$$
\begin{aligned}
\sum_{c,d} \pi^{cd} A_{cd} &= \sum_{c,d} \pi^{[cd]} A_{cd} = \sum_{c,d} \pi^{[cd]} A_{[cd]} \\
&= -\sum_{c,d} \pi^{[cd]} A_{[dc]} = -\sum_{c,d} \pi^{[cd]} A_{dc} \\
&= -\sum_{c,d} \pi^{cd} A_{dc}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、

$$
\begin{aligned}
\{f,\, \{g,\, h\}\} &= \sum_{a,b} \pi^{ab} \left(\partial_a f\right) \left[\partial_b \left\{ \sum_{c,d} \pi^{cd} \left(\partial_c g\right) \left(\partial_d h\right) \right\} \right] \\
&= \sum_{a,b,c,d} \pi^{ab} \left(\partial_b \pi^{cd}\right) \left(\partial_a f\right) \left(\partial_c g\right) \left(\partial_d h\right) \\
&\qquad + \sum_{a,b,c,d} \pi^{ab} \pi^{cd} \left\{ \left(\partial_a f\right) \left(\partial_d h\right) \left(\partial_b \partial_c g\right) - \left(\partial_a f\right) \left(\partial_d g\right) \left(\partial_b \partial_c h\right) \right\}
\end{aligned}
$$

が成り立つとわかる。Jacobi 律の証明中で示した同様の式にはなかった第 1 項は、π^{ab} が (x^a) の関数であることに由来するものである。あとは Jacobi 律での証明と同様で、$f,\, g,\, h$ で上を循環させたものを足すと

$$
\{f,\, \{g,\, h\}\} + \{g,\, \{h,\, f\}\} + \{h,\, \{f,\, g\}\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{a,b,c,d} \left\{ \pi^{ab} \left(\partial_b \pi^{cd} \right) (\partial_a f) (\partial_c g) (\partial_d h) + \pi^{ab} \left(\partial_b \pi^{cd} \right) (\partial_a g) (\partial_c h) (\partial_d f) + \pi^{ab} \left(\partial_b \pi^{cd} \right) (\partial_a h) (\partial_c f) (\partial_d g) \right\} \\
&= \sum_{a,b,c,d} \left\{ \pi^{ab} \left(\partial_b \pi^{cd} \right) + \pi^{db} \left(\partial_b \pi^{ac} \right) + \pi^{cb} \left(\partial_b \pi^{da} \right) \right\} (\partial_a f) (\partial_c g) (\partial_d h)
\end{aligned}
$$

とできる。ここでは Jacobi 律が先に与えられているから、逆に Jacobi 律の証明で存在しなかった項が 0 になるということが導かれる。

$$
\sum_d \left\{ \pi^{ad} \left(\partial_d \pi^{cb} \right) + \pi^{bd} \left(\partial_d \pi^{ac} \right) + \pi^{cd} \left(\partial_d \pi^{ba} \right) \right\} = 0 \tag{2.12}
$$

M での一般の座標変換 $x^a = x^a \left(y^1, \ldots, y^2 n \right)$ により、(x^a) から構成される Poisson 構造 π^{ab} は、

$$
\pi'^{ab}(y) = \sum_{c,\, d} \pi^{cd}(x(y)) \frac{\partial y^a}{\partial x^c} \frac{\partial y^b}{\partial x^d}
$$

へと変換されるから、**Poisson 構造は M 上の $(2,\, 0)$ のテンソル場である。ただし、$T^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q}$ が M 上の $(p,\, q)$ のテンソル場であるとは、$T^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q}$ が M 上の各点に $(p{+}q)$ 階のテンソルを返す関数で、M での一般の座標変換 $x^a = x^a \left(y^1, \ldots, y^{2n} \right)$ に対し、**

$$
T'^{a_1 a_2 \cdots a_p}{}_{b_1 b_2 \cdots b_q}(y) = \sum_{c_1, \ldots, c_p,\, d_1, \ldots, d_q} T^{c_1 c_2 \cdots c_p}{}_{d_1 d_2 \cdots d_q}(x(y)) \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{c_1}} \frac{\partial y^{a_2}}{\partial x^{c_2}} \cdots \frac{\partial y^{a_p}}{\partial x^{c_p}} \frac{\partial x^{d_1}}{\partial y^{b_1}} \frac{\partial x^{d_2}}{\partial y^{b_2}} \cdots \frac{\partial x^{d_q}}{\partial y^{b_q}}
$$

と変換されるということである。[11)]

Poisson 括弧の非退化性は、$2n$ 次正方行列 $\pi = \left(\pi^{ab} \right)$ が正則行列であることと同値である。π の逆行列の転置を ω とすると、$2n$ 次正方行列 ω は正則で、また $\pi^{ba} = -\pi^{ab}$ から $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$ が成り立つ。

$$
\sum_{c=1}^{2n} \pi^{ac} \omega_{cb} = -\sum_{c=1}^{2n} \pi^{ac} \omega_{bc} = -\delta^a_b
$$

であるから、

$$
\pi \omega = -I_{2n} \quad (I_{2n} \text{は } 2n \text{ 次の単位行列})
$$

となっている。両辺 x^c で微分すると、、

$$
\begin{aligned}
(\partial_c \pi) \omega + \pi (\partial_c \omega) &= 0 \\
-(\partial_c \pi)^{ab} + \sum_{d,\, e} \pi^{ad} (\partial_c \omega)_{de} \pi^{eb} &= 0 \\
\therefore\ \partial_c \pi^{ab} &= -\sum_{d,\, e} \pi^{ad} \pi^{be} \partial_c \omega_{de}
\end{aligned}
$$

が得られるが、これを式 (2.12) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\sum_d \left\{ \pi^{ad} \left(\sum_{e,\, f} \pi^{ce} \pi^{bf} \partial_d \omega_{ef} \right) + \pi^{bd} \left(\sum_{e,\, f} \pi^{ae} \pi^{cf} \partial_d \omega_{ef} \right) + \pi^{cd} \left(\sum_{e,\, f} \pi^{be} \pi^{af} \partial_d \omega_{ef} \right) \right\} &= 0 \\
\sum_{d,\, e,\, f} \pi^{ad} \pi^{ce} \pi^{bf} \partial_d \omega_{ef} + \sum_{d,\, e,\, f} \pi^{bd} \pi^{ae} \pi^{cf} \partial_d \omega_{ef} + \sum_{d,\, e,\, f} \pi^{cd} \pi^{be} \pi^{af} \partial_d \omega_{ef} &= 0 \\
\sum_{d,\, e,\, f} \pi^{af} \pi^{cd} \pi^{be} \partial_f \omega_{de} + \sum_{d,\, e,\, f} \pi^{be} \pi^{af} \pi^{cd} \partial_e \omega_{fd} + \sum_{d,\, e,\, f} \pi^{cd} \pi^{be} \pi^{af} \partial_d \omega_{ef} &= 0 \\
\sum_{d,\, e,\, f} \pi^{af} \pi^{be} \pi^{cd} \left(\partial_d \omega_{ef} + \partial_f \omega_{de} + \partial_e \omega_{fd} \right) &= 0
\end{aligned}
$$

11) ここまでで登場したテンソル場はすべてこの記法に従っている (と思われる)。

が導かれる。これから、次が常に成り立つことになる。

$$\partial_a \omega_{bc} + \partial_b \omega_{ca} + \partial_c \omega_{ab} = 0$$

M 上の $(0, 2)$ テンソル場 ω_{ab} が上式と歪対称性 $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$、非退化性 ($\omega$ が正則) を満たすとき、M のシンプレクティック構造であるという。

正準座標系の存在から Poisson 構造やシンプレクティック構造の存在を導いた。その逆、つまり $2n$ 次元相空間 M が Poisson 構造やシンプレクティック構造系を備えているときに、

$$\pi^{ab} = J^{ab}, \quad \omega_{ab} = J_{ab}$$

となるような座標系が存在することは、M 上の各点の近傍でだけなら Darboux の定理により保証される。M 全体で張られる正準座標系の存在までは言えないが、Darboux の定理で各点近傍に張られた正準座標系は、共通部分で正準変換により互いに移り合える。

3　Hamilton-Jacobi の方法と可積分系

3.1　Hamilton-Jacobi の方法

2n 次元相空間に正準座標系 (q^i, p_i) とハミルトニアン $H(q, p)$ が与えられているとする。このハミルトニアンを、運動量にしか依存しない関数 $E(P)$ に変換するような正準変換 $W(q, P)$ を探すことを考える。

まず、(2.8) より、

$$p_i = \frac{\partial W(q,P)}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial W(q,P)}{\partial P_i}$$

で変換前後の正準座標系の関係式が得られて、これを逆に解くことで $q(Q,P), p(Q,P)$ が得られる。よって変換先のハミルトニアン $K(Q,P)$ は、

$$K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$$

で得られることがわかる。

ここで、運動量にしか依存しないハミルトニアン $E(P)$ の性質を先取りして考えてみる。運動方程式 (2.2), (2.3) から、

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial E(P)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial E(P)}{\partial Q^i} = 0$$

$$\therefore\ Q^i = \Omega_i(t - t_0), \quad P_i = \beta_i$$

$$\left(t_0, \beta_1, \cdots, \beta_n \text{は定数、} \Omega_i = \left.\frac{\partial E(P)}{\partial P_i}\right|_{(P_1,\cdot,P_n)=(\beta_1,\cdot,\beta_n)} \right)$$

と、運動が解け、特に運動量が一定となることが分かる。

よって、運動量にしか依存しない関数 $E(P)$ に変換するような正準変換 $W(q,P)$ は、次の式を満たすと分かる。

$$H\left(q^1, \cdots, q^n, \frac{\partial W(q,\beta)}{\partial q^1}, \cdots, \frac{\partial W(q,\beta)}{\partial q^n}\right) = E(\beta) \tag{3.1}$$

正準変換後の運動量が定数になることを用いると、上のような 1 階偏微分方程式を解いて正準変換の母関数 W を求めればよいことになる。この偏微分方程式を **Hamilton-Jacobi 方程式**と呼ぶ。

Hamilton-Jacobi 方程式が解ければ、運動は解かれている。実際、すでに (Q,P) について解いた結果 $q(Q,P), p(Q,P)$ があるのでそれに $Q^i = \Omega_i(t-t_0), P_i = \beta_i$ を代入すれば、$\Omega_i, t_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ は定数だから (q,p) は t の関数になっている。

このようにして、**常微分方程式の運動方程式** (1.2), (2.2), (2.3) **の代わりに偏微分方程式** (3.1) **を解くことで運動を求める方法が Hamilton-Jacobi の方法である。**

3.2　完全可積分性

運動方程式に含まれる関数についての加減乗除、逆関数の算出およびその加減乗除、微分・不定積分を有限回繰り返すことで運動方程式の解が表せるとき、運動方程式は求積法で解けるという。求積法で解けるとは、平たく言えば「手計算で解ける」ということである。

運動方程式が求積法で解ける系の特徴の全容は未だ研究途上にあるが、**次の性質を満たす自由度 n の系は必ず運動が求積法で解けることが分かっている。**

(i) 自励系である (ハミルトニアンは時間に依存しない)。

(ii) 運動が n 個の保存量 $f_1, \cdots, f_n$ をもち、それらは関数的に独立である。

(iii) 任意の $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ で、$\{f_i, f_j\} = 0$(f_i, f_j が Poisson 可換である)。

このような系は完全可積分であるという。

完全可積分系が持つ保存量 $f_i\,(i = 1, \ldots, n)$ に対し、次のような $2n$ 次元相空間 M 上のベクトル場 $\boldsymbol{X}_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を定義する[12]。

$$(\boldsymbol{X}_i)^a = \sum_{i=1}^{2n} J^{ab} \partial_b f_i$$

$f_1, \cdots, f_n$ の関数的独立性から、これら n 個のベクトル場 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ は M 上の各点で一次独立となっている。また、Poisson 可換性 $\{f_i, f_j\} = 0$ からは、

$$\sum_{a,\,b=1}^{2n} J_{ab}\,(\boldsymbol{X}_i)^a\,(\boldsymbol{X}_j)^b$$

が導かれる。互いに上式を満たしかつ一次独立な M 上のベクトル場の集合の要素数は最大で n 個であることが分かっている。これはすなわち、**互いに Poisson 可換な独立関数の保存量の集合の要素数も最大 n 個までであることを言っている。**

自励系の運動の保存量 f_i は $\{f_i, H\} = 0$ を満たすから必ずハミルトニアン H と Poisson 可換である。もし H が $f_1, \cdots, f_n$ と関数的に独立なら、上の議論と矛盾する。つまり、**自由度 n の完全可積分系のハミルトニアン H は一般に、**

$$H = H(f_1, \cdots, f_n)$$

と書き表せるということである。当然、ハミルトニアン自身も自励系では運動の保存量になるので、$f_1, \cdots, f_n$ のいずれかと一致していることも考えられる。

自由度 $n = 2$ の完全可積分系で、運動が求積法で求まることを確認する。ハミルトニアン H が一つ目の運動の保存量 $f_1(q^1, q^2, p_1, p_1)$ であるとし、さらに別の $n - 1$ 個の保存量 $f_2(q^1, q^2, p_1, p_2)$ があって、$\{f_1, f_2\} = 0$ とする。

相空間 M の次元は $2n = 4$ である。$f_1 = C_1, f_2 = C_2$ であるような $C = (C_1, C_2)$ を指定するたびに、運動を一つ指定するとともに、ある M 内の 2 次元平面 M_C も指定する。運動は M_C 上の軌道で表されることになる。

$f_i(q, p) = C_i$ を解いて $p_i = \pi_i(q; C)$ を得ることができる[13]。これを使って M_C 上の関数 $S(q; C)$ を次の線積分で定義する。

$$\begin{aligned} S(q; C) &= \int_a^q \pi \cdot \mathrm{d}q' \\ &= \int_{(a^1, a^2)}^{(q^1, q^2)} \pi_1(q'; C)\mathrm{d}q'^1 + \pi_2(q'; C)\mathrm{d}q'^2 \end{aligned}$$

$$(a = (a_1, a_2) \text{は } M_C \text{ 上の基準点})$$

この関数は、a と q を結ぶ経路には依存しない。実際、a と q を結ぶ M_c 上の経路を自由に 2 つとり (γ_1, γ_2 とする)、それに対し次を満たす閉経路 γ

$$\int_\gamma \pi \cdot \mathrm{d}q' = \left\{ \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \right\} \pi \cdot \mathrm{d}q'$$

を考えたとき、Stokes の定理より、

$$\left| \int_\gamma \pi \cdot \mathrm{d}q' \right| = \left| \int_D \left(\frac{\partial \pi_2(q; C)}{\partial q^1} - \frac{\partial \pi_1(q; C)}{\partial q^2} \right) \mathrm{d}q'^1 \mathrm{d}q'^2 \right| = 0 \quad (D \text{は } \gamma \text{ で囲まれる } M_C \text{ 上の領域})$$

12) $f_i = H$ であるとき、$\boldsymbol{X}_i$ は Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{X}_H$ に他ならない。

13) 正準座標系の取り方によっては解けないことがあるが、その場合は正準変換で別の正準座標系を取ればよい。

となるから、任意に取った 2 経路上の線積分が等しい。ただし、2 つ目の等号は次で示される：$f_i(q,\, \pi(q; C)) = C_i$ の両辺を q^l で微分すると、

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^l} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial p^k}\frac{\partial \pi_k}{\partial q^l} = 0$$

これに両辺 $\partial f_j / \partial p_l$ をかけて l で和をとると

$$\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial f_j}{\partial p_l}\frac{\partial f_i}{\partial q^l} + \sum_{k,\, l=1}^{2} \frac{\partial f_j}{\partial p_l}\frac{\partial f_i}{\partial p^k}\frac{\partial \pi_k}{\partial q^l} = 0$$

より、

$$\{f_i,\, f_j\} = \sum_{l=1}^{2} \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial p_l}\frac{\partial f_i}{\partial q^l} - \frac{\partial f_i}{\partial p_l}\frac{\partial f_j}{\partial q^l} \right\} = \sum_{k,\, l=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial p_l}\frac{\partial f_j}{\partial p^k} \left\{ \frac{\partial \pi_k}{\partial q^l} - \frac{\partial \pi_l}{\partial q^k} \right\}$$

で、左辺は常に 0 である。$f_i = C_i$ が p について解けるとき、行列 $(\partial f_i / \partial p_k)$ は正則であるから、以上より任意の $k,\, l \in \{1,\, 2\}$ より、

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q^l} - \frac{\partial \pi_l}{\partial q^k} = 0$$

$S(q; C)$ は作用の次元なので、$(q,\, p)$ から (B, C) への正準変換の母関数となる。

$$p_i = \frac{\partial S(q; C)}{\partial q_i} = \pi_i(q; C), \quad B_i = \frac{\partial S(q; C)}{\partial C_i}$$

正準座標系を (B, C) でとると、ハミルトニアンが $H = C_1$ と表されるから、$S(q; C)$ が Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(q^1,\, q^2,\, \frac{\partial S(q; C)}{\partial q^1},\, \frac{\partial S(q; C)}{\partial q^2}\right) = C_1$$

を満たすことが分かる。よって Hamilton-Jacobi の方法で運動が解ける。Hamilton-Jacobi の方法では求積法の条件に適う方法で運動が解かれているので、確かに完全可積分系の運動は求積法で解けている。

3.3 Hamilton-Jacobi 方程式の分離可能性

完全可積分系の運動が求積法で解けることを確認した際に、Hamilton-Jacobi の方法は Hamilton-Jacobi 方程式の解から運動は求積法で解けることを見た。つまり、**系の Hamilton-Jacobi 方程式が求積法で解ければ、系の運動も求積法で解ける。このことに注目して、運動が求積法で解ける系の特徴付けとして、完全可積分性とは別に Hamilton-Jacobi 方程式の分離可能性を導入する。**

自励系の Hamilton-Jacobi 方程式 (3.1) を満たす、n 個の実数パラメータ $\beta_1, \cdots, \beta_n$ をもつ $q^1, \cdots, q^n$ の関数 $W(q; \beta)$ が、

$$\det\left(\frac{\partial^2 W(q; \beta)}{\partial q^i \partial \beta_j}\right) \neq 0$$

を任意の $(q; \beta)$ で満たすとき、**Hamilton-Jacobi 方程式の完全解**であるという。完全解は、偏微分方程式の解としては、独立変数と同数の任意定数をもつ解で最も多くの情報をもつ最良のものである。偏微分方程式の一般解は n 個の任意関数の線形結合で表されるが、完全解から構成することができる。

Hamilton-Jacobi 方程式が

$$H\,(q,\, p) = E(\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad p_i = \pi_i(q^i; \beta_1, \cdots, \beta_n)$$

と n 個の方程式に帰着させることができると、各方程式が求積法で解け、なおかつその解は完全解となり、

$$W(q; \beta) = \sum_i W_i(q^i; \beta_1, \cdots, \beta_n)$$

という形で求まることが知られている。確かに、

$$H\left(q,\,\frac{\partial W(q;\beta)}{\partial q}\right)=E(\beta)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}W_i(q^i;\beta_1,\cdots,\beta_n)}{\mathrm{d}q^i}=\pi_i(q^i;\beta_1,\cdots,\beta_n)$$

と、各 $W_i(q^i;\beta_1,\cdots,\beta_n)$ が常微分方程式を解くことによって得られることになり、常微分方程式は全て求積法で解けることが知られている。よって **Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能ならば系の運動が求積法で解いて求めることができる。**

Hamilton-Jacobi 方程式の分離可能性は、同じ形でも座標系の選択により変化する。ある正準座標系で分離可能なハミルトニアンを正準変換により関数形を変化させたとき、一般には分離可能とはならないことが多い。

Hamiton-Jacobi 方程式が分離可能であるとき、完全解および新しい正準座標系が求積法で求まる。n 個の正準運動量 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ は保存量だが、解く過程で元の正準座標系 $(q,\,p)$ の関数 $\beta_1(q,\,p),\cdots,\beta_n(q,\,p)$ として表せ、さらに正準座標の性質から互いに Poisson 可換な関数の集合を成す。よって系は完全可積分のように思えるが、$\beta_i(q,\,p)$ は運動がとりうる範囲の領域でのみしか定義されておらず、一般に相空間全域で定義された関数とは限らない。このように**系の Hamiltonian-Jacobi 方程式の分離可能性と完全可積分性は一般には等価ではない**[14)]。

系の Hamilton-Jacobi 方程式 (3.1) が分離可能であるとき、その解 $W(q;\beta)$ は、n 個の関数 $W_i(q^i;\beta)\,(i=1,\ldots,n)$ の和で表されるが、これは、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q^i\partial q^j}=0\quad(i\neq j)\tag{3.2}$$

という $n(n-1)/2$ 個の式と同値である。

一般の系で、(3.1) の両辺を q^i で微分すると、

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}+\sum_k\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\pi_k}{\partial q^i}\right)_{p=\pi(q)}=0\qquad\left(\text{ただし、}\pi_i(q)=\frac{\partial W(q;\beta)}{\partial q^i}\right)$$

が得られるから、Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能な系では、(3.2) から、

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial q^j}=-\delta_i^j\left(\frac{\partial H/\partial q^i}{\partial H/\partial p_i}\right)_{p=\pi(q)}$$

という偏微分方程式系が満たされることもわかる。

この偏微分方程式系が積分可能でないと Hamilton-Jacobi 方程式は求積法的に解が求まらない。このことから、

$$\frac{\partial^2\pi_i}{\partial q^k\partial q^j}=\frac{\partial^2\pi_i}{\partial q^j\partial q^k}$$

が任意の $(i,\,j,\,k)$ で要請される。偏微分方程式系にこれを合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial H/\partial q^i}{\partial H/\partial p_i}\right)_{p=\pi(q)}=0\qquad(i\neq j)$$

が導かれる。左辺を $p=\pi(q)$ を実際に代入して整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\begin{array}{c}\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\\[2mm]\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{array}\right)_{p=\pi(q)}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial q^j}\left[\left(\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\right)_{p=\pi(q)}\right]\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{p=\pi(q)}-\left(\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\right)_{p=\pi(q)}\dfrac{\partial}{\partial q^j}\left[\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{p=\pi(q)}\right]}{\left[\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{p=\pi(q)}\right]^2}$$

14） しかし、実際に知られている分離可能系は、多くの場合は完全可積分になっている。

$$
= \left. \frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial q^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i}\frac{\partial H/\partial q^j}{\partial H/\partial p_j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\frac{\partial H/\partial q^j}{\partial H/\partial p_j}\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2} \right|_{p=\pi(q)}
$$

$$
= \left. \frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial p_j}} \right|_{p=\pi(q)}
$$

なので、**Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能な系は、**

$$
\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right) = 0 \qquad (i \neq j) \tag{3.3}
$$

という Levi Civita の条件を満たすことになる。系が分離可能かどうか、ひいては系の運動が求積法で解けるかどうかの判別に (3.3) は有用である[15)]。

3.4 Liouville-Arnold の定理

3.5 剛体の可積分系

4 特異系に対する Dirac の方法

5 古典場の理論

15） この式は $n(n-1)/2$ 組の $(i,\, j)$ 全てで成り立つことが求められるので、実際には変数分離解を仮定して調べることが効率的なことが多いようである。

X　付録・補遺

X.1　積分で表される保存量

$2n$ 次元相空間 M 上の閉曲線 γ はパラメータ付き曲線として、

$$\begin{cases} q^i = q^i(\sigma), & p_i = p_i(\sigma) \\ q^i(0) = q^i(1), & p_i(0) = p_i(1) \end{cases} \quad (i = 1,\, 2, \cdots, n\,;\, \sigma \in [0,\, 1])$$

と表わすことができる。この時、次のように定義される **Poincare の積分**

$$I_p[\gamma] = \oint_\gamma (p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + \cdots + p_n dq^n) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 p_i(\sigma) \frac{dq^i(\sigma)}{d\sigma} d\sigma$$

は系の時間発展に対し不変である。

さらに一般の場合を考える。相空間 M に時間軸を加えた $(2n+1)$ 次元空間 $\mathcal{M} = M \times \mathbb{R}$ 上で次の閉曲線 γ を考える。

$$\begin{cases} q^i = q^i(\sigma), & p_i = p_i(\sigma), & t = t(\sigma) \\ q^i(0) = q^i(1), & p_i(0) = p_i(1), & t(0) = t(1) \end{cases} \quad (i = 1,\, 2, \cdots, n\,;\, \sigma \in [0,\, 1])$$

ただし、γ 上のどの 2 点も運動方程式の解曲線でつながることはないとする。**$\mathcal{M}$ 上の閉曲線について、次の Poincare-Cartan の積分**

$$\begin{aligned} I_{PC}[\gamma] &= \oint_\gamma (p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + \cdots + p_n dq^n - H dt) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n p_i(\sigma) \frac{dq^i(\sigma)}{d\sigma} - H(q(\sigma),\, p(\sigma),\, t(\sigma)) \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} \right) d\sigma \end{aligned}$$

は、時間発展に対して不変である。この場合の時間発展とは、γ 上の各点を初期値において時間発展させることである。Poincare 積分は、γ が t が一定の閉曲線のときの Poincare-Cartan 積分と等しい。

Poincare-Cartan 積分の時間発展に対する不変性を証明する。$\mathcal{M}$ 上のどの 2 点も運動方程式の解曲線でつながらないような閉曲線 γ の各点を時間発展させて得られる閉曲線を γ' とする。この 2 閉曲線は交わらない。時間発展させる間の閉曲線を連ねると $\mathcal{M}$ 上に曲面 Σ が現れる。Σ 上の点をパラメータ σ, τ で次のように表わす。

$$\begin{cases} q^i = q^i(\sigma,\, \tau), & p_i = p_i(\sigma,\, \tau), & t = t(\sigma, \tau) \\ q^i(0,\, \tau) = q^i(1,\, \tau), & p_i(0,\, \tau) = p_i(1,\, \tau), & t(0,\, \tau) = t(1,\, \tau) \end{cases} \quad (i = 1,\, 2, \cdots, n\,;\, \sigma \in [0,\, 1],\, \tau \in [0,\, 1])$$

τ を固定して σ のみを動かすときにできる閉曲線を γ_τ としたとき、$\gamma_0 = \gamma,\, \gamma_1 = \gamma'$ が Σ の境界になっている。また、σ を固定して τ を動かしたときにできる曲線は運動方程式の解曲線の一部であるから、Hamilton 形式での運動方程式 (2.2), (2.3) がなりたつ。この時、

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\dfrac{\partial q^i}{\partial \tau}}{\dfrac{\partial t}{\partial \tau}},\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\dfrac{\partial p_i}{\partial \tau}}{\dfrac{\partial t}{\partial \tau}}$$

であるから、$\dfrac{\partial H}{\partial \tau}$ が

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

となることがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}-H\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\tau}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\tau\partial\sigma}\right)-\frac{\partial H}{\partial\tau}\frac{\partial t}{\partial\sigma}-H\frac{\partial^2 t}{\partial\tau\partial\sigma}$$
$$=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\tau}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\tau\partial\sigma}\right)-\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}\frac{\partial t}{\partial\sigma}-H\frac{\partial^2 t}{\partial\tau\partial\sigma}$$

となる一方、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\tau}-H\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)&=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}\frac{\partial q^i}{\partial\tau}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\sigma\partial\tau}\right)-\frac{\partial H}{\partial\sigma}\frac{\partial t}{\partial\tau}-H\frac{\partial^2 t}{\partial\sigma\partial\tau}\\
&=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}\frac{\partial q^i}{\partial\tau}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\sigma\partial\tau}\right)-H\frac{\partial^2 t}{\partial\sigma\partial\tau}\\
&\quad-\left\{\sum_i(\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\sigma})+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right\}\frac{\partial t}{\partial\tau}\\
&=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}\frac{\partial q^i}{\partial\tau}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\sigma\partial\tau}\right)-H\frac{\partial^2 t}{\partial\sigma\partial\tau}\\
&\quad-\left\{\sum_i\left(\frac{\frac{\partial q^i}{\partial\tau}}{\frac{\partial t}{\partial\tau}}\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}-\frac{\frac{\partial p_i}{\partial\tau}}{\frac{\partial t}{\partial\tau}}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right\}\frac{\partial t}{\partial\tau}\\
&=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}\frac{\partial q^i}{\partial\tau}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\sigma\partial\tau}-\frac{\partial q^i}{\partial\tau}\frac{\partial p_i}{\partial\sigma}+\frac{\partial p_i}{\partial\tau}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}\right)-\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\sigma}\frac{\partial t}{\partial\tau}-H\frac{\partial^2 t}{\partial\sigma\partial\tau}\\
&=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial\tau}\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}+p_i\frac{\partial^2 q^i}{\partial\sigma\partial\tau}\right)-\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\sigma}\frac{\partial t}{\partial\tau}-H\frac{\partial^2 t}{\partial\sigma\partial\tau}\end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}-H\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\tau}-H\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)$$

が成り立つ。これから、

$$\begin{aligned}\frac{dI_{PC}[\gamma_\tau]}{d\tau}&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\sigma}-H\frac{\partial t}{\partial\sigma}\right)d\sigma\\
&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\tau}-H\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)d\sigma\\
&=\left[\sum_i p_i\frac{\partial q^i}{\partial\tau}-H\frac{\partial t}{\partial\tau}\right]_{\sigma=0}^{\sigma=1}=0\end{aligned}$$

となり、$I_{PC}[\gamma_\tau]$ は τ によらない。よって題意は示された。

X.2 時間に依存する母関数の正準変換

時間に依存する母関数から構成される正準変換は、(2.8) に従えば一般には $Q^i=Q^i(q,\,p,\,t),\ P_i=P_i(q,\,p,\,t)$ と時間に依存するものになる。このとき Poisson 括弧 (2.4) は不変であるが、

$$\begin{aligned}\dot{Q}^i&=\sum_j\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)+\frac{\partial Q^i}{\partial t}\\
&=\sum_j\left(\frac{\partial Q}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)+\frac{\partial Q^i}{\partial t}\\
&=\{Q^i,\,H\}+\frac{\partial Q^i}{\partial t}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\dot{P}_i&=\sum_j\left(\frac{\partial P_i}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)+\frac{\partial P_i}{\partial t}\\
&=\sum_j\left(\frac{\partial P_i}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)+\frac{\partial P_i}{\partial t}\\
&=\{P_i,\,H\}+\frac{\partial P_i}{\partial t}\end{aligned}$$

というふうに Poisson 括弧のみで表されるはずの運動方程式の形は変わってしまう。

正準変換の母関数が時間に依存するとき、変換先の座標系でのハミルトニアンは

$$K(Q,\,P,\,t)=H(q(Q,\,P,\,t),\,p(Q,\,P,\,t),\,t)+\frac{\partial W}{\partial t}$$

と変形しなければ、共変性が保たれないのである。この変形を、母関数が (2.8) の場合で導出する。

示すべきことをまず整理すると、

$$\begin{aligned}\dot{Q}^i&=\{Q^i,\,K\}=\frac{\partial K}{\partial P_i}=\frac{\partial H}{\partial P_i}+\frac{\partial Q^i}{\partial t}\\ \dot{P}_i&=\{P_i,\,K\}=-\frac{\partial K}{\partial Q^i}=-\frac{\partial H}{\partial Q^i}+\frac{\partial P_i}{\partial t}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^i}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial t}\right)\\ &=\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial t}+\sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial t}+\sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial t}\\ \frac{\partial P_i}{\partial t}&=-\frac{\partial}{\partial Q^i}\left(\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial t}\right)\\ &=-\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial t}-\sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial t}-\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial t}\end{aligned}$$

である。ただし、$Q^i=Q^i(q,\,p,\,t)$, $P_i=P_i(q,\,p,\,t)$ から $q^i=q^i(Q,\,P,\,t)$, $p_i=p_i(Q,\,P,\,t)$ とできるので、W を Q, P で微分する際は Q, P, t の関数であるとみなしている。

(2.8) を改めて書くと (W の引数の添字は全て条件を満たすように走る)、

$$\begin{aligned}p_{i'}&=\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial q^{i'}}\\ q^{i''}&=-\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial p_{i''}}\\ P_{j'}&=-\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial Q^{j'}}\\ Q^{j''}&=\frac{\partial W(q^{i'},\,p_{i''},\,Q^{j'},\,P_{j''},\,t)}{\partial P_{j''}}\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}i'\in I',\,i''\in I'',\,j'\in J',\,j''\in J'\\ I=\{1,\,2,\ldots,n\}\\ I=I'\cup I''=J'\cup J''\\ I'\cap I''=J'\cap J''=\emptyset\end{pmatrix}$$

$Q^i=Q^i(q,\,p,\,t)$, $P_i=P_i(q,\,p,\,t)$ であるので、(2.8) が全て q, p, t の方程式であるとみなして両辺 t で偏微分すると、

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial Q^k}+\sum_{k\in J'}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial P_k}+\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial t}\\ 0&=-\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial Q^k}-\sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial P_k}-\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial t}\\ \frac{\partial P_{j'}}{\partial t}&=-\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial Q^k}-\sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial P_k}-\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial t}\\ \frac{\partial Q^{j''}}{\partial t}&=\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial Q^k}+\sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial P_k}+\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial t}\end{aligned}$$

となる。また、q, p も $q^i=q^i(Q,\,P,\,t)$, $p_i=p_i(Q,\,P,\,t)$ とできるので、今度は (2.8) が全て Q, P,t の方程式とみなす。$P_{j'}$, $Q_{j''}$ の式について Q^i, $P_i(i=1,\,2,\ldots,\,n)$ でそれぞれ偏微分すると、

$$0=-\sum_{k\in I'}\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial q^k}-\sum_{k\in I''}\frac{\partial p_k}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial p_k}-\sum_{k\in J''}\delta^i_k\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial Q^k}$$

$$
\begin{aligned}
\delta^i_{j'} &= -\sum_{k\in I'}\frac{\partial q^k}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial q^k} - \sum_{k\in I''}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial p_k} - \sum_{k\in J''}\delta^i_k\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial P_k}\\
\delta^i_{j''} &= \sum_{k\in I'}\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial q^k} + \sum_{k\in I''}\frac{\partial p_k}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial p_k} + \sum_{k\in J'}\delta^i_k\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial Q^k}\\
0 &= \sum_{k\in I'}\frac{\partial q^k}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial q^k} + \sum_{k\in I''}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial p_k} + \sum_{k\in J''}\delta^i_k\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial P_k}
\end{aligned}
$$

となる。以上から、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial t} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial t} + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial t}\\
&= -\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial P_i}\left(\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial Q^k} + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial P_k}\right) - \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial P_i}\left(\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial Q^k} + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial P_k}\right)\\
&\quad + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\left(\frac{\partial Q^{j''}}{\partial t} - \sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial Q^k} - \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial P_k}\right)\\
&= -\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\left(\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial Q^k} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial Q^k} + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial Q^k}\right)\\
&\quad - \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\left(\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial P_k} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial P_i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial P_k} + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial P_k}\right) + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial Q^{j''}}{\partial t}\\
&= \sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\left(\delta^i_k + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^k\partial P_{j'}} - \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial Q^k}\right)\\
&\quad + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\left(\sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_k\partial P_{j''}} - \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial^2 W}{\partial P_{j''}\partial P_k}\right) + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial Q^{j''}}{\partial t}\\
&= \sum_{k\in J'}\delta^i_k\frac{\partial Q^k}{\partial t} + \sum_{j''\in J''}\delta^i_{j''}\frac{\partial Q^{j''}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\delta^i_k\frac{\partial Q^k}{\partial t} = \frac{\partial Q^i}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial t} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial t} + \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial t}\\
&= -\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial Q^i}\left(\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial Q^k} + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial P_k}\right) - \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial Q^i}\left(\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial Q^k} + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial P_k}\right)\\
&\quad - \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\left(\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial Q^k} + \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial P_k} + \frac{\partial P_{j'}}{\partial t}\right)\\
&= -\sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\left(\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial Q^k} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial Q^k} + \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial Q^k}\right)\\
&\quad - \sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\left(\sum_{i'\in I'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial q^{i'}\partial P_k} + \sum_{i''\in I''}\frac{\partial p_{i''}}{\partial Q^i}\frac{\partial^2 W}{\partial p_{i''}\partial P_k} + \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'} + \frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial P_k}\right) - \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial P_{j'}}{\partial t}\\
&= \sum_{k\in J'}\frac{\partial Q^k}{\partial t}\left(\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^k\partial Q^{j'}} - \sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial Q^k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
-\sum_{k\in J''}\frac{\partial P_k}{\partial t}\left(\delta^i_k-\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial P_k\partial Q^{j'}}+\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial^2 W}{\partial Q^{j'}\partial P_k}\right)-\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial P_{j'}}{\partial t}
$$

$$
=-\sum_{k\in J''}\delta^i_k\frac{\partial P_k}{\partial t}-\sum_{j'\in J'}\delta^i_{j'}\frac{\partial P_{j'}}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\delta^i_k\frac{\partial P_k}{\partial t}=-\frac{\partial P_i}{\partial t}
$$

となり、示すべきことが導けた。

X.3　Stäckel 行列による分離可能なハミルトニアンの構成法

ここでは分離可能なハミルトニアンの内、運動量が 2 次の項しか持たないようなものに注目する。

次のような関数形をもつハミルトニアンの系は、**Liouville 系**と呼ばれる。

$$
H(q,\,p)=\frac{\sum_k\left(a_k(q^k)\,(p_k)^2+b_k(q^k)\right)}{\sum_k c_k(q^k)}\qquad (a_k(q^k),\,b_k(q^k),\,c_k(q^k)\text{は }q^k\text{ のみに依存する任意関数})
$$

Liouville 系の Hamilton-Jacobi 方程式は、

$$
\sum_k\left[a_k(q^k)\left(\frac{\partial W}{\partial q^k}\right)^2+b_k(q^k)-Ec_k(q^k)\right]=0
$$

なので、変数分離解が仮定できて、n 個の常微分方程式

$$
a_i(q^i)\left(\frac{\partial W_i}{\partial q^i}\right)^2+b_i(q^i)-Ec_i(q^i)=Const.
$$

に帰着するから、求積法で運動が解ける。

Liouville 系より一般の分離可能系のハミルトニアンを考えよう。**ハミルトニアンが、関数** $g^k(q^1,\cdots,q^n)$, $u_k(q^k)$, $v_k(q^k)(k=1,\ldots,n)$ **を使って、**

$$
H(q,\,p)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}g^k(q)\left[(p_k)^2+u_k(q^k)p_k+v_k(q^k)\right]\tag{X.1}
$$

と表される関数形をとるような n 自由度系の Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能であるとき、次の (X.2) のように各 $i=1,\ldots,n$ について i 行目の成分が全て q^i のみの関数であるような n 次の正則行列 (Stäckel 行列という)

$$
S=\begin{pmatrix}
S_{11}(q^1) & S_{12}(q^1) & \cdots & S_{1n}(q^1)\\
S_{21}(q^2) & S_{22}(q^2) & \cdots & S_{2n}(q^2)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
S_{n1}(q^n) & S_{n2}(q^n) & \cdots & S_{nn}(q^n)
\end{pmatrix}\tag{X.2}
$$

があって、その逆行列 S^{-1} の $(i,\,j)$ 成分を S^{ij} とする[16]**と、$g^k=S^{1k}$ とできる。逆に、任意の Stäckel 行列 S に対し、$S^{1k}=g^k$ とおくと、(X.1) で与えられるハミルトニアンは、Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能になる。** 以下ではこのことを示していく。

ハミルトニアンが (X.1) で与えられる系の Hamilton-Jacobi 方程式

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}g^k\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q^k}\right)^2+u_k\frac{\partial W}{\partial q^k}+v_k\right]=E(\beta)
$$

について、$E(\beta)=\beta_1$ とし、変数分離解 $W=\sum W_k(q^k;\beta)$ を仮定すると、

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}g^k\left[\left(\frac{\partial W_k}{\partial q^k}\right)^2+u_k\frac{\partial W_k}{\partial q^k}+v_k\right]=\beta_1
$$

16）　S の $(i,\,j)$ 成分ではないことに注意せよ。

となる。この式の両辺を β_l で偏微分すると、

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^k \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial \beta_l}\left(2\frac{\partial W_k}{\partial q^k}+u_k\right)=\delta_l^1$$

を得る。今、$(k,\,l)$ 成分が

$$S_{kl}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W_k}{\partial q^k \partial \beta_l}\left(2\frac{\partial W_k}{\partial q^k}+u_k\right)$$

であるような n 次正方行列 S を考えると、この行列は k 行目の成分が全て q^k のみに依存する関数になっていて、また、

$$S=\begin{pmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial q^1}+\frac{1}{2}u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial W_2}{\partial q^2}+\frac{1}{2}u_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial W_n}{\partial q^n}+\frac{1}{2}u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_1}{\partial q^1\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 W_1}{\partial q^1\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_1}{\partial q^1\partial\beta_n} \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial q^2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 W_2}{\partial q^2\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_2}{\partial q^2\partial\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 W_n}{\partial q^n\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 W_n}{\partial q^n\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_n}{\partial q^n\partial\beta_n} \end{pmatrix}$$

という風に正則行列の積として表せる正則行列になっている。よって S は Stäckel 行列である。

逆に、任意の Stäckel 行列 S に対し、$g^k = S^{1k}$ (S^{-1}の$(1,\,k)$成分) で (X.1) の g^k を定めると、次の $W(q)$ に対する n 個の微分方程式

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} S^{jk}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q^k}\right)^2+u_k\frac{\partial W}{\partial q^k}+v_k\right]=\beta_j \qquad (j=1,\ldots,n、\beta_j\text{は定数}) \tag{X.3}$$

の内、$j=1$ のものは (X.1) でハミルトニアンが定められる系の Hamilton-Jacobi 方程式である。これらは、S の定義 (X.2) から

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q^i}\right)^2+u_i(q^i)\frac{\partial W}{\partial q^i}+v_i(q^i)=2\sum_{j=1}^{n} S_{ij}(q^i)\beta_j \quad (i=1,\ldots,n)$$

と解けて、明らかに変数分離された完全解を与える。$j = 1$ に注目すれば、系の Hamilton-Jacobi 方程式は分離可能であることがわかる。

(X.3) の解は、正準変換の母関数であるので $\beta_1,\cdots,\beta_n$ を Poisson 可換な保存量として与える。$p_k=\partial W/\partial q^k$ だから、(X.3) より、

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} S^{jk}\left[(p_k)^2+u_k(q^k)p_k+v_k(q^k)\right]=\beta_j \qquad (j=1,\ldots,n、\beta_j\text{は定数})$$

と各保存量を $(q,\,p)$ の関数として与えることができる。関数形が具体的に分かっているならば相空間の全体で大域的に定義されている。すなわち、**ハミルトニアンが Stäckel 行列を使って** (X.1) **で与えられる系は、Hamilton-Jacobi 方程式が分離可能であるだけでなく、完全可積分でもある。**

参考文献

[1] 井田大輔, 現代解析力学入門. 朝倉書店, 2020.