TUGAS PROYEK

"Software Euler Math Toolbox"

Tugas ini disusun untuk memenuhi tugas mata kuliah Aplikasi Komputer
Dosen Pengampuh: Drs. Sahid M.Sc dan Thesa Adisaputra Yusri M.Cs

Disusun oleh:
Pradika Larasati
23030630003
Matematika B

DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2024

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google
image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

```
>100/10*5+50-25
```

```
75
```

```
>a=2, b=5, a*b+a^2
```

```
2
5
14
```

```
>sin(90)
```

```
0.893996663601
```

```
>a=14.5; d=200; (d/2)/cos(a/2)
```

```
176.079844288
```

```
>200!
```

```
inf
```

```
>5!
```

```
120
```

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

```
>gammai(3,4)
```

```
0.352768111218
```

```
>&sum(n^2+1,n,1,6)
```

```
                                 97
```

```
>&integrate(log(x)/x^2+4,x,2,6)
```

```
                   - log(6) + 3 log(2) + 98
                   ------------------------
                              6
```

```
>$&A = [2,1,3;3,1,2;2,2,3], det(A), inv(A)
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
Variable or function A not found.
Error in:
$&A = [2,1,3;3,1,2;2,2,3], det(A), inv(A) ...
                                 ^
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
   3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
2.71828182846
      3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
r                    1.25
a                    4
b                    15
c                    2
D                    1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                    1000
cm$                    0.01
mm$                    0.001
nm$                    1853.24496
gram$                  0.001
m$                     1
hquantum$              6.62606957e-34
atm$                   101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,  0.193585,
0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,  -0.733427,
-0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
              1             2             3
              4             5             6
              7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
                                    2
                             (b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
                           2             2
                          b  + 2 a b + a

                          (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                     2                         2
           (- sqrt(b  - 4 a c)) - b      sqrt(b  - 4 a c) - b
      [x = ------------------------, x = --------------------]
                     2 a                         2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                              2    2
                             a  - b
                             -------
                              b + a

                              a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
                              3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
[2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
                                3   3
                               2   5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
                          18   8   4   2
                         2    3   5   7   11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
                                10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
                         (m - 3) (m - 2) (m - 1) m
                         -------------------------
                                    24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

```
                4
sin(x) + cos (x)
----------------
       3
    cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
 3
x  + 1
------
x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
 2
x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
                     3
              (b + a)   + 1
              ------------
               b + a + 1


         2                  2
        b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
                2       3
             3 x       x  + 1
             ----- - --------
             x + 1          2
                     (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
                3       2
             2 x  - 3 x  + 6 x
             -----------------
                     6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

1. Tentukan penyelesaian dari
\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x^2+1}{5x}

```
>$&limit((x^2+1)/(5*x),x,2)
```

$$\frac{1}{2}$$

2) Berapakah turunan pertama dari fungsi
F(x) = sin^2(x) + 4cos(x)

```
>$&diff((sin(x))^2+4*cos(x),x)
```

$$2\,\cos x\,\sin x-4\,\sin x$$

```
3) Tentukan solusi dari soal berikut ini:

latex: \int_1^3 x^3+2x+1
```

```
>$&integrate(x^3+2*x+1,x,1,3)
```

$$30$$

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

==Sisipan Soal dari PDF | sub topik : operasi bentuk-bentuk aljabar==
Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Bentuk paling sederhananya adalah -(42/xy^4)
Soal Kedua:

$$\left((\frac{x^r}{y^t})^2(\frac{x^{2r}}{y^{4t}})^{-2}\right)^{-3}$$

```
>$&((x^r/y^t)^2*(x^(2*r)/y^(4*t))^(-2))^(-3)
```

$$\frac{x^{6\,r}}{y^{18\,t}}$$

Bentuk paling sederhana dari soal kedua adalah x^(6r)/y^(18t)
Soal Ketiga:

$$\left(\frac{(3x^ay^b)^3}{(-3x^ay^b)^2}\right)^2$$

```
>$&((3*x^a*y^b)^3/(-3*x^a*y^b)^2)^2
```

$$9\,x^{2\,a}\,y^{2\,b}$$

Bentuk paling sederhana dari soal ketiga adalah 9x^(2a)y^(2b)

Menjabarkan bentuk aljabar
Soal Pertama:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Soal Kedua:

$$(y-5)^2$$

```
>$&showev('expand((y-5)^2))
```

$$expand\left((y-5)^2\right)=y^2-10\,y+25$$

penjabaran dari bentuk kuadrat (y-5)^2 adalah y^2-10y-25
Memfaktorkan bentuk aljabar
Soal Pertama:

$$9z^2-24z+16$$

```
>$&factor(9*z^2-24*z+16)
```

$$(3\,z-4)^2$$

hasil faktor dari p^3-2p^2-9p+18 adalah (p-3)(p-2)(p+3)
Soal Ketiga:

$$p-64p^4$$

```
>$&factor(p-64*p^4)
```

$$-p\,(4\,p-1)\,\left(16\,p^2+4\,p+1\right)$$

faktor yang dihasilkan adalah (-p)(4p-1)(16p^2+4p+1)
Saya menambahkan 5 soal pada bagian ini yaitu menambahkan 3 soal memfaktorkan bentuk aljabar, 1 soal menjabarkan bentuk aljabar, dan 1 soal menyederhanakan bentuk aljabar.

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler yang diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut ini hanya akan mencetak hasil dari ekspresi, bukan penugasan atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan tanda kosong. Baris perintah berikut ini mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi sesuai urutan pengguna menekan tombol return. Jadi, Anda mendapatkan nilai baru setiap kali Anda mengeksekusi baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua baris dihubungkan dengan "...", kedua baris tersebut akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk membagi perintah yang panjang menjadi dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctlr+Back untuk menggabungkan kedua baris.

Untuk melipat semua multi-baris, tekan Ctrl+L. Kemudian garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satu dari mereka memiliki fokus. Untuk melipat satu baris multi-baris, mulai baris pertama dengan "%+ ".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

```
81
```

Euler mendukung perulangan dalam baris perintah, selama perulangan tersebut masuk ke dalam satu baris tunggal atau beberapa baris. Dalam program, tentu saja pembatasan ini tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, baca pengantar berikut ini.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak masalah untuk menggunakan multi-baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>   x := xnew; ...
>end; ...
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga bisa digunakan.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Ketika Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun dalam baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah tersebut.

Ketika Anda menggerakkan kursor di sepanjang baris, pasangan tanda kurung atau tanda kurung pembuka dan penutup akan disorot. Juga, perhatikan baris status. Setelah tanda kurung pembuka dari fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol return.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks yang akan dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk mengosongkan baris, atau menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini pada baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersamaan dengan tombol kursor. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintaksis Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika yang biasa. Seperti yang telah Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut sqrt dalam Euler. Tentu saja, x^(1/2) juga dapat digunakan.

Untuk mengatur variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak menjadi masalah. Tetapi spasi antar perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan output dari perintah. Pada akhir baris perintah, "," diasumsikan, jika ";" tidak ada.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)} + \frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapatkan bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi yang rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang diselesaikan oleh tanda kurung penutup. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.

Hasil dari perhitungan ini adalah angka floating point. Secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Pada baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita dapat merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, ekspresi tersebut harus mengandung tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, mengatur tanda kurung adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung pembuka dan penutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler meliputi

```
+ unary atau operator plus
- unary atau operator minus
*, /
. produk matriks
pangkat a^b untuk a positif atau bilangan bulat b (a**b juga bisa
```

digunakan)

```
n! operator faktorial
```

dan masih banyak lagi.

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

```
sin, cos, tan, atan, asin, acos, rad, deg
log, exp, log10, sqrt, logbase
bin, logbin, logfac, mod, floor, ceil, round, abs, sign
conj,re,im,arg,conj,real,complex
beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle
bitand, bitor, bitxor, bitnot
```

Beberapa perintah memiliki alias, misalnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), apabila ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan (2^3)^4, yang merupakan default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

==Sisipan Soal dari PDF | sub topik : operasi & fungsi matematika==

1) berapakah hasil dari pengurangan berikut?

$$(5x^2+4xy-3y^2+2)-(9x^2-4xy+2y^2-1)$$

```
>$&(5*x^2+4*x*y-3*y^2+2)-(9*x^2-4*x*y+2*y^2-1)
```

$$-5\,y^2+8\,x\,y-4\,x^2+3$$

Hasil dari pengurangan tersebut adalah -5y^2+8xy-4x^2+3

2) Berapakah hasil pembagian dari

$$\frac{2x^4+3x^2-1}{x-\frac{1}{2}}$$

```
>$&(2*x^4 + 3*x^2 - 1) / (x - 1/2)
```

$$\frac{2\,x^4+3\,x^2-1}{x-\frac{1}{2}}$$

```
3) berapakah hasil dari f(x) dikali g(x)?

latex: f(x) = 3a^2,\quad g(x)=(-7a^4)
```

Hasil dari pembagian dari soal tersebut adalah

3) Berapakah hasil dari f(x) dikali g(x)?

$$f(x)=3a^2,\quad g(x)=(-7a^4)$$

```
>$&(3*a^2)*(-7*a^4)
```

$$-21\,a^6$$

hasil dari f(x) dikali dengan g(x) adalah -21a^6
4) berapakah hasil dari operasi berikut?

$$(x+3)^2$$

```
>$&expand((x+3)^2)
```

$$x^2+6\,x+9$$

Hasil dari operasi tersebut adalah x^2+6x+9
5)berapakah hasil dari penjumlahan berikut?

$$(2x^2+12xy-11)+(6x^2-2x+4)+(-x^2-y-2)$$

```
>$&(2*x^2+12*x*y-11)+(6*x^2-2*x+4)+(-x^2-y-2)
```

$$12\,x\,y-y+7\,x^2-2\,x-9$$

Hasil dari penjumlahan tersebut adalah 12xy-y+7x^2-2x-9

Bilangan Real

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan real. Bilangan real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
        0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
  1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
  5.5555555555554*16^-1
```

== Sisipan soal dari PDF | Subtopik : perhitungan bilangan kompleks ==

Bilangan selain bilangan real terdapat juga bilangan kompleks. Bilangan kompleks merupakan penjumlahan antara bilangan real dan bilangan imajiner. berikut contoh-contoh perhitungan bilangan kompleks:

1)berapakah nilai dari

$$(10 + 7i) - (5 + 3i)$$

```
>$&(10+7*sqrt(-1))-(5+3*sqrt(-1))
```

$$4\,i + 5$$

nilai dari(10+7i)-(5+3i)adalah 4i+5

2) berapakah jumlah dari

$$(7 - 2i) + (4 - 5i)$$

```
>$&(7-2*sqrt(-1))+(4-5*sqrt(-1))
```

$$11 - 7\,i$$

Hasil dari operasi tersebut adalah 11-7i

3) berapakah hasil dari

$$\sqrt{(} - 16) \cdot \sqrt{(} - 100)$$

```
>$&(sqrt(-16))*(sqrt(-100))
```

$$-40$$

hasil dari operasi tersebut adalah -40

4) berapakah hasil operasi berikut?

$$-2i(-8 + 3i)$$

```
>$&(-2*sqrt(-1))*(-8)+(-2*sqrt(-1))*(3*sqrt(-1))
```

$$16\,i + 6$$

hasil dari operasi tersebut adalah 16i+6

5) berapakah hasil bagi operasi berikut ini?

$$\frac{4-2i}{1+i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

```
>$&((4-2*sqrt(-1))+(2-5*sqrt(-1)))/(1+sqrt(-1))
```

$$\frac{6-7\,i}{i+1}$$

hasil dari operasi tersebut adalah (6-7i)/(1+i)

String

String dalam Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"A string can contain anything."
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka, yang dikonversi menjadi string dalam kasus tersebut.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengonversi angka ke string. Fungsi ini dapat mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk output padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus tidak ada, yang tidak mencetak. Dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian).

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi string tersebut. Ini juga berlaku untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk membuat string seperti itu, gunakan u"..." dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
 = 45°
```

I

Di komentar, entitas yang sama seperti , dll. dapat digunakan. Ini mungkin merupakan alternatif cepat untuk Lateks. (Detail lebih lanjut di komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah sebuah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan sebuah string dengan entitas dalam sebuah variabel menjadi sebuah string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1 = benar atau 0 = salah dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"dan" adalah operator "&&" dan "atau" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "dan" dan "atau" hanya dapat digunakan dalam kondisi "jika").

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari sebuah vektor. Pada contoh, kita menggunakan kondisional isprime(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format Output

Format output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat format default, kita atur ulang formatnya.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk angka ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit penuh, gunakan perintah "longestformat", atau kami menggunakan operator "longest" untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut ini adalah representasi heksadesimal internal dari angka ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
    0.33333
    3.14159
    0.84147
```

Standarnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
  0.66    0.2   0.89   0.28   0.53   0.31   0.44    0.3
  0.28   0.88   0.27    0.7   0.22   0.45   0.31   0.91
  0.19   0.46  0.095    0.6   0.43   0.73   0.47   0.32
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Tetapi ini dapat diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "longestformat" juga menetapkan format skalar.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut ini adalah daftar format output yang paling penting.

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat
format(length,digits) goodformat(length)
fracformat(length)
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.
Tetapi format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
  3.14159
```

Standarnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "longformat" akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
      4.934802200544679
```

Ada juga operator singkat untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, maka nilai 0,1 tidak akan terwakili dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut ini.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
-1.110223024625157e-16
```

Tetapi, dengan "longformat" default, Anda tidak akan melihat hal ini. Untuk kenyamanan, output angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy", dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan dengan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut).

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" selain nilai global, Anda perlu menambahkan "at=value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

```
45
```

Sebagai referensi, kami menyatakan bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita dapat membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti halnya fungsi.
Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
12
```

Sesuai dengan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

Bentuk khusus dari sebuah ekspresi memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan "@(variabel)...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi tersebut dapat dievaluasi seperti halnya sebuah fungsi.

Seperti yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Sebuah ekspresi tidak perlu berbentuk simbolik. Hal ini diperlukan, jika ekspresi mengandung fungsi-fungsi, yang hanya dikenal di kernel numerik, bukan di Maxima.

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolik dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut ini, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli dalam Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks default dari ekspresi simbolik dalam EMT.

Matematika simbolik diintegrasikan secara mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apapun yang dimulai dengan & adalah sebuah ekspresi simbolik. Ekspresi ini dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar secara tepat. Mari kita hitung

lateks: C(44,10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk hal ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali pada fungsi tersebut. Sebagai contoh, coba klik dua kali pada "&binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini akan membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh pembuat program tersebut.

Anda akan mengetahui bahwa perintah-perintah berikut ini juga dapat digunakan.

lateks: C(x,3)=\frac{x!}{(x-3)!3!}=\frac{(x-2)(x-1)x}{6}

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "with".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

Dengan begitu, Anda dapat menggunakan solusi dari sebuah persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah sebuah bendera simbolik khusus dalam string.

Seperti yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan contoh berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut ini akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda tidak memiliki LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

Ekspresi simbolik diuraikan oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat mengapit ekspresi dalam "...". Menggunakan lebih dari satu ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

```
25
```

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi harus diapit dengan tanda kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada saat kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, kita menyimpan solusi ke dalam sebuah variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

```
2432902008176640000
```

```
>::: factor(10!)
```

```
 8  4  2
2  3  5  7
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18   8   4   2
2    3   5   7   11  13  17  19
```

Jika Anda adalah seorang ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
 2
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
 3  x
x  E
```

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa pada perintah berikut ini, sisi kanan dari &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
     5
125 E
```

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk mengevaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with".

Baris perintah berikut ini juga mendemonstrasikan bahwa Maxima dapat mengevaluasi sebuah ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
          10         5
    1000 E    - 125 E


   2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

Untuk mendapatkan kode Latex untuk sebuah ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, hal ini tidak dapat dilakukan, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk yang lebih baik dari perintah at(...) pada Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

Penugasan ini juga bisa bersifat simbolis.

```
>$&fx with x=1+t
```

Bandingkan dengan perintah "solve" numerik di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

Bandingkan dengan perintah "solve" numerik di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca penugasan x= dst. Jika Anda tidak membutuhkan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga bisa membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

```
[-3.23607,  1.23607]
```

Untuk mendapatkan solusi simbolik yang spesifik, seseorang dapat menggunakan "dengan" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

Ekspresi simbolik dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, namun ada juga yang tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih baik dari "ev(...,flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
>$&factor(%)
```

== Sisipan Contoh Soal ==

1) Tentukan faktor dari

$$(x^2 - 5x + 6)^2$$

```
>$&solve((x^2-5*x+6)^2,x)
```

$$[x = 3, x = 2]$$

2) Tentukan faktor dari

$$x^2 - 4$$

```
>$&solve(x^2-4,x)
```

$$[x=-2,x=2]$$

3) Tentukan hasil dari

$$C(15,2)=\frac{15!}{13!\cdot 2!}$$

```
>$binomial(15,2) // hasil c(15,2) dengan menggunakan binomial
```

$$105$$

4) Tentukan hasil dari

$$C(15,5)=\frac{15!}{10!\cdot 5!}$$

```
>$binomial(15,5) // hasil c(15,5) dengan menggunakan binomial
```

$$3003$$

5) Tentukan hasil dari

$$C(5,1)=\frac{5!}{4!\cdot 1!}$$

```
>$binomial(5,1) // hasil c(5,1) dengan menggunakan binomial
```

$$5$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang ditentukan dengan perintah "function". Fungsi dapat berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.
Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan dengan ":=".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Sebagai gambaran umum, kami menunjukkan semua definisi yang mungkin untuk fungsi satu baris. Sebuah fungsi dapat dievaluasi seperti halnya fungsi Euler bawaan.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi ini adalah vektor.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus disediakan dalam bentuk string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi built-in, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah bagi fungsi lain yang bergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "_...", jika fungsi tersebut merupakan fungsi dalam inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Sebaiknya kita hilangkan definisi ulang sin.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

== Sisipan Soal dari PDF ==

1)Find f(-3), f(-2), f(1) for this function

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 12x - 3$$

```
>function f(x):= x^3+7*x^2-12*x-3
>f(-3), f(-2), f(1)
```

```
69
41
-7
```

Jadi hasil dari f(3)= 69, f(-2)= 41, f(1)= -7
Untuk soal no 2-4, diketahui

$$f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2x - 6, \quad h(x) = x^3$$

```
>function f(x):=3*x+1
>function g(x):=x^2-2*x-6
>function h(x):=x^3
```

2)Tentuukan hasil dari

$$(f \circ g)(-1)$$

```
>g(-1); f(%)
```

```
-8
```

Jadi hasilnya adalah -8
3)

$$(g \circ g)(-2)$$

```
>g(-2); g(%)
```

```
-6
```

Jadi hasilnya adalah -6
4)

$$(g \circ h)(\frac{1}{2})$$

```
>h(1/2); fraction g(%)
```

```
-399/64
```

Jadi hasilnya adalah -399/64
5)

$$(f \circ f)(1)$$

```
>f(1); f(%)
```

```
13
```

Jadi hasilnya adalah 13

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Omitting this parameter uses the default value.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menetapkannya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika sebuah variabel bukan parameter, maka variabel tersebut harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan akan menggantikan nilai global.
Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditetapkan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan ":="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "&=". Fungsi-fungsi ini didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan dapat digunakan di kedua bahasa tersebut. Ekspresi pendefinisian dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

Fungsi simbolis dapat digunakan dalam ekspresi simbolis.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

Fungsi ini juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada di dalam fungsi.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolis lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Hal berikut ini juga dapat digunakan, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika ada fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
>$&P(x,4), $&expand(%)
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

Dengan &=, fungsi ini bersifat simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolis lainnya.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

Dengan := fungsi tersebut berupa angka. Contoh yang baik adalah integral pasti seperti

lateks: f(x) = \int_1^x t^t \, dt,

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolik.

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci "map", maka fungsi tersebut dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi tersebut dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam sebuah vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang, fungsi ini dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Sering kali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk masing-masing elemen di tempat lain. Hal ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Tetapi fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi yang murni simbolis, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

Tetapi tentu saja, semua itu bisa digunakan dalam ekspresi simbolis atau dalam definisi fungsi simbolis.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

Untuk meringkas

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

== Sisipan COntoh Soal ==
Diketahui dua fungsi yaitu S(x) dan T(x)

$$P(x) = (4x + 5)^n$$

$$Q(x) = (8x + 4)^n$$

```
>function P(x,n) &= (4*x+5)^n; $&P(x,n)
```

$$(4\,x+5)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (8*x+5)^n; $&Q(x,n)
```

$$(8\,x+5)^n$$

1) Berapa hasil P(x) dengan n=2 ditambah Q(x) dengan n=3

```
>$&P(x,2)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$512\,x^3+976\,x^2+640\,x+150$$

2) Berapa hasil P(x) dengan n=2 ditambah Q(x) dengan n=3 dengan x=2

```
>$&P(2,2)+ Q(2,3)
```

$$9430$$

3) Berapa hasil P(x) dengan n=2 dikali Q(x) dengan n=3 dan factornya

```
>$&P(x,2)* Q(x,3); $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(4\,x+5)^2\,(8\,x+5)^3$$

4. Berapa hasil Q(x) dengan n=4

```
>$&Q(x,4), $&expand(%)
```

$$4096\,x^4+10240\,x^3+9600\,x^2+4000\,x+625$$

5. Tentukan integral dari P(x) dengan n=2

```
>$&integrate(P(x,2),x)
```

$$\frac{16\,x^3}{3}+20\,x^2+25\,x$$

Menyelesaikan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Fungsi ini membutuhkan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Hal ini juga bisa digunakan untuk ekspresi simbolis. Perhatikan fungsi berikut ini.

```
>$&solve(x^2=2,x)
>$&solve(x^2-2,x)
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kami menggunakan y=2 dan mengeceknya dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan sebuah ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan sebuah daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti sebuah ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
    -0.6180339887498949      1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "dengan".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

Menyelesaikan sistem persamaan secara simbolik dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan pemecah simbolik solve(). Jawabannya adalah sebuah daftar daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Tetapi seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

lateks: a^x-x^a = 0.1

dengan a = 3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk mengoper parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan sebuah daftar yang berisi nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah dengan menggunakan parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Hal ini juga dapat dilakukan dengan ekspresi. Namun, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar dalam tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

== Sisipan Soal dari PDF ==

1)

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{t}$$

```
>$&solve(1/4+1/5=1/t,t)
```

$$\left[t=\frac{20}{9}\right]$$

2)

$$\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1}{x}$$

```
>$&solve(1/3-5/6=1/x,x)
```

$$[x=-2]$$

3)

$$\frac{x+2}{4}-\frac{x-1}{5}=15$$

```
>$&solve(((x+2)/4-(x-1)/5)=15,x)
```

$$[x=286]$$

4)

$$\frac{t+1}{3}-\frac{t-1}{2}=1$$

```
>$&solve((t+1)/3-(t-1)/2=1,t)
```

$$[t=-1]$$

5)

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{x}=\frac{1}{3}+\frac{3}{x}$$

```
>$&solve(1/2+2/x=1/3+3/x,x)
```

$$[x=6]$$

Menyelesaikan Pertidaksamaan.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, yaitu dengan cara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$fourier\_\_elim\left(\left[x^2-1>0\right],[x]\right)$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$fourier\_\_elim\left(\left[x^3-1>0\right],[x]\right)$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$fourier\_elim\left(\left[\cos x < \frac{1}{2}\right], [x]\right)$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$fourier\_elim\left([y - x < 5, x - y < 7, 10 < y], [y, x]\right)$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
```

$$fourier\_elim\left(y + x < 5 \land x - y > 8, [x, y]\right)$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
```

$$fourier\_elim\left(y + x < 5 \land x < 1 \lor x - y > 8, [x, y]\right)$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
fourier_elim([max(x, y) > 6, x # 8, mabs(y - 1) > 12], [x, y])
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

$$fourier\_elim\left(\left[\frac{x+6}{x-9} \leq 6\right], [x]\right)$$

==Sisipan soal dari PDF | subtopik : menyelesaikan pertidaksamaan==
Berapakah nilai x pada masing-masing soal berikut?
1)

$$|2x| \geq 6$$

```
>$&fourier_elim([abs(2*x)>=6],[x])
```

$$fourier\_elim\left([2\,|x| \geq 6], [x]\right)$$

nilai x yang memenuhi adalah x >= 3, x <= -3

2)

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$$

```
>$&fourier_elim([abs(x-1/4)<1/2],[x])
```

$$\mathit{fourier\_\_elim}\left(\left[\left|x-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}\right],[x]\right)$$

nilai x yang memenuhi adalah x > -1/4, x < 3/4

3)

$$|x+8|<9$$

```
>$&fourier_elim([abs(x+8)<9],[x])
```

$$\mathit{fourier\_\_elim}\left([|x+8|<9],[x]\right)$$

nilai x yang memenuhi adalah x > -17, x < 1

4)

$$|2x+3|\leq 9$$

```
>$&fourier_elim([abs(2*x+3)<=9],[x])
```

$$\mathit{fourier\_\_elim}\left([|2\,x+3|\leq 9],[x]\right)$$

nilai x yang memenuhi adalah x >= -6, x <= 3

5)

$$|x-5|\geq 0.1$$

```
>$&fourier_elim([abs(x-5)>= 0.1],[x])
```

$$\mathit{fourier\_\_elim}\left([|x-5|\geq 0.1],[x]\right)$$

nilai x yang memenuhi adalah x >= 5.1, x <= 4.9

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
              1             2
              3             4
```

Hasil kali matriks dilambangkan dengan sebuah titik.

```
>b=[3;4]
```

```
              3
              4
```

```
>b' // transpose b
```

```
  [3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
             -2             1
            1.5          -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
             11
             25
```

```
>A.inv(A)
```

```
              1             0
              0             1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja elemen demi elemen.

```
>A.A
```

```
              7            10
             15            22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
              1             4
              9            16
```

```
>A.A.A
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
             1             1
             1             1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
      0.333333      0.666667
          0.75             1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
            -2
           2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
            -2
           2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
             1             0
             0             1
```

```
>inv(A).A
```

```
             1             0
             0             1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
             1             4
             9            16
```

Ini bukan hasil kali matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
              9
             16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, maka operan tersebut akan diperluas dengan cara alami.

```
>2*A
```

```
              2             4
              6             8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

```
              1             4
              3             8
```

Jika ini adalah vektor baris, vektor ini diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
              2             6
              6            12
```

Kita dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

```
              1             2
              1             2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
              1             4
              3             8
```

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu vektor adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i*j untuk i, j dari 1 sampai 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan sebuah tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
              1             2             3             4             5
              2             4             6             8            10
              3             6             9            12            15
              4             8            12            16            20
              5            10            15            20            25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
55
```

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Sebagai contoh, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.
Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen bukan nol.
Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk komputasi bilangan bulat. EMT menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Akan tetapi, hal ini sering kali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa bilangan prima. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros() hanya bekerja untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
       0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
      0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
             1             4
             2             1
             2             2
             3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk menetapkan elemen ke suatu nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347             0
             0             0      0.495975      0.952814
      0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen-elemen pada indeks ke entri-entri matriks lain.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
     -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
      0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen-elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
[0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

```
      0.267829             4      0.765761             1
       0.13673             1      0.952814             4
      0.006085             2      0.548138             1
```

Kita bisa menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal dalam setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max().

```
>max(A)'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen-elemen pada posisi yang sama dari matriks yang lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
             1             1
             2             4
             3             1
[-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

== Sisipan Soal dari PDF ==

```
>A=[3,-1;5,4]
```

```
             3            -1
             5             4
```

```
>B=[-2,6;1,-3]
```

```
            -2             6
             1            -3
```

Find each of the following
1)A+B

```
>A+B
```

```
      1       5
      6       1
```

2)B-A

```
>B-A
```

```
     -5       7
     -4      -7
```

AB

```
>A.B
```

```
     -7      21
     -6      18
```

3)2A+3B

```
>2*A+3*B
```

```
      0      16
     13      -1
```

4)BA

```
>B.A
```

```
     24      26
    -12     -13
```

5)Invers (A).B

```
>A=[4,2;3,-1]
```

```
      4       2
      3      -1
```

```
>B=[11,2;1,0]
```

```
     11       2
      1       0
```

```
>inv(A).B
```

```
          1.3           0.2
          2.9           0.6
```

Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
            1             2             3
            1             2             3
```

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke matriks lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
     0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
      0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
    0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika keduanya tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang dilampirkan pada sebuah matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

```
     0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
      0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             1
    0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
            1             2             3
            1             2             3
```

```
>[v',v']
```

```
            1             1
            2             2
            3             3
```

Tujuan utama dari hal ini adalah untuk menginterpretasikan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
              1              1
              2              4
              3              9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut ini.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, terdapat length().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
              1              1
              1              1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6,  6,  6,  6,  6]
```

Matriks angka acak juga dapat dibuat dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gauß).

```
>random(2,2)
```

```
        0.66566       0.831835
          0.977       0.544258
```

Berikut ini adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen-elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
                1               2               3
                4               5               6
                7               8               9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan fungsi ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang sebuah vektor sebanyak n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
  [1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen-elemen sebuah vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
  [1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
  [1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() membalik urutan baris atau kolom dari sebuah matriks. Misalnya, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
  [5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
  [2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghapus elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
  [10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop(v,i) merujuk pada indeks elemen dalam v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemen-elemen tersebut terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor terurut v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya menyertakan indeks di luar jangkauan (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau menghasilkan matriks diagonal.

Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
            1            0            0            0            0
            0            1            0            0            0
            0            0            1            0            0
            0            0            0            1            0
            0            0            0            0            1
```

Kemudian, kami menetapkan diagonal bawah (-1) ke 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
            1            0            0            0            0
            1            1            0            0            0
            0            2            1            0            0
            0            0            3            1            0
            0            0            0            4            1
```

Perhatikan bahwa kita tidak mengubah matriks A. Kita mendapatkan sebuah matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut adalah sebuah fungsi yang mengembalikan sebuah matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

```
            2            3            0            0            0
            1            2            3            0            0
            0            1            2            3            0
            0            0            1            2            3
            0            0            0            1            2
```

Diagonal sebuah matriks juga dapat diekstrak dari matriks. Untuk mendemonstrasikan hal ini, kami merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

```
              1             2             3
              4             5             6
              7             8             9
```

Sekarang kita bisa mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,  5,  9]
```

Contoh: Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
         1         2         3
       4/5         1       6/5
       7/9       8/9         1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga dapat digunakan untuk input matriks dan vektor, jika hal ini masuk akal. Sebagai contoh, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi, Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot sebuah fungsi (alternatif lainnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.

Pada contoh berikut, kita membuat vektor nilai t[i] dengan jarak 0.1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita membuat vektor nilai dari fungsi

lateks: s = t^3-t

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
-0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris diperluas menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
      1       2       3       4       5
      2       4       6       8      10
      3       6       9      12      15
      4       8      12      16      20
      5      10      15      20      25
```

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dengan hasil kali matriks. Hasil kali matriks dilambangkan dengan sebuah titik "." dalam EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
  55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

```
  [1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks, operator khusus . menyatakan perkalian matriks, dan A' menyatakan transposisi. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti halnya bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
  5
  25
```

Untuk mentransposisikan matriks, kita menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

```
              1
              2
              3
              4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
             30
             70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dengan v.v'.

```
>v'.v
```

```
            1             2             3             4
            2             4             6             8
            3             6             9            12
            4             8            12            16
```

v.v' menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang berfungsi seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
 30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linier lainnya).

```
>norm(v)^2
```

```
 30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ini adalah ringkasan aturannya.

- Sebuah fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen.

- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks.

- Jika dua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai tersebut dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikali vektor (dengan *, bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
 [1,  4,  9]
```

Ini adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom memperluas keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
            1             2             3
            2             4             6
            3             6             9
```

Perhatikan bahwa hasil kali skalar menggunakan hasil kali matriks, bukan tanda *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut mengenai perintah-perintah ini.

```
sum,prod menghitung jumlah dan hasil kali dari baris-baris
cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem
diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i
setdiag(A,i,v) menetapkan diagonal ke-i
id(n) matriks identitas
det(A) determinan
charpoly(A) polinomial karakteristik
eigenvalues(A) nilai eigen
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,  4,  9]
14
[1,  5,  14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris dengan spasi yang sama, opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,  2,  3,  4]
[1,  3,  5,  7,  9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor, terdapat operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
            1              2              3
            1              1              1
```

Elemen-elemen dari sebuah matriks disebut dengan "A[i,j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor tersebut. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,   8,   9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,   4]
            2
            5
            8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
            2             3
            5             6
            8             9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Sebuah matriks juga dapat diratakan, dengan menggunakan fungsi redim(). Hal ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
```

Untuk menggunakan matriks pada tabel, mari kita atur ulang ke format default, dan hitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dinyatakan dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
            0
           45
           90
          135
          180
          225
          270
          315
          360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
           0           0           1           0
          45    0.785398    0.707107    0.707107
          90      1.5708           0           1
         135     2.35619   -0.707107    0.707107
         180     3.14159          -1           0
         225     3.92699   -0.707107   -0.707107
         270     4.71239           0          -1
         315     5.49779    0.707107   -0.707107
         360     6.28319           1           0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat membuat beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Pada contoh berikut, kita menghitung t[j]^i untuk i dari 1 hingga n. Kita mendapatkan sebuah matriks, di mana setiap baris adalah tabel t^i untuk satu i. Dengan kata lain, matriks tersebut memiliki elemen-elemen lateks: a_{i, j} = t_j^i, \qad 1 \le j \le 101, \qad 1 \le i \le n

Sebuah fungsi yang tidak bekerja untuk input vektor harus "divektorkan". Hal ini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor.

Integrasi numerik integrate() hanya bekerja untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektornya.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" membuat vektor fungsi. Fungsi ini sekarang akan bekerja
untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
[0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Sub-Matriks dan Elemen Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi kurung.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
           1           2           3
           4           5           6
           7           8           9
5
```

Kita dapat mengakses baris lengkap dari sebuah matriks.

```
>A[2]
```

```
[4,  5,  6]
```

Untuk vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
 2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2,]
```

```
 [4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris-baris yang sesuai dari matriks.

Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua dari A.

```
>A[[1,2]]
```

```
              1             2             3
              4             5             6
```

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi susunan ulang dari A.

```
>A[[3,2,1]]
```

```
              7             8             9
              4             5             6
              1             2             3
```

Trik indeks juga bekerja dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

```
              2             3
              5             6
              8             9
```

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

```
              3
              6
              9
```

Sebagai alternatif, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

```
          2           3
          5           6
          8           9
```

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

```
 [7,  8,  9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen-elemen dari A dengan memberikan sebuah submatriks dari A ke suatu nilai. Hal ini sebenarnya mengubah matriks A yang tersimpan.

```
>A[1,1]=4
```

```
          4           2           3
          4           5           6
          7           8           9
```

Kita juga dapat menetapkan nilai pada deretan A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
         -1          -1          -1
          4           5           6
          7           8           9
```

Kami bahkan dapat menetapkan ke sub-matriks jika memiliki ukuran yang tepat.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
          5           6          -1
          7           8           6
          7           8           9
```

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
          0           0          -1
          0           0           6
          7           8           9
```

Peringatan: Indeks di luar batas akan mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Namun, ingatlah bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen-elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Pengurutan dan Pengacakan

Fungsi mengurutkan() mengurutkan vektor baris.

```
> sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Sering kali diperlukan untuk mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Hal ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengacak sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks berisi urutan v yang tepat.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Hal ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a
d
e
a
aa
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unique mengembalikan daftar terurut dari elemen unik sebuah vektor.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
[1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Hal ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

Aljabar Linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan sistem linier, sistem jarang, atau masalah regresi.

Untuk sistem linier Ax=b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau kecocokan linier. Operator A\b menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
         -4
        4.5
```

Sebagai contoh lain, kita membuat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan Ax = b dengan menggunakan matriks kebalikannya. Kita mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal dari semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
  8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
          1             2             3
          4             5             6
          7             8             9
```

Determinan dari matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

== Sisipan soal dari PDF ==
1)

```
>A=[2,-1;1,4]; b=[7;-5]; A/b
```

```
        0.285714      -0.142857
            -0.2           -0.8
```

2)

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linier sederhana. Kita bisa mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] yang biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan dalam Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$(a-1)^2\;(a+2)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah sebuah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan kelipatannya.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu, diperlukan pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti halnya ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

```
              1              4
              5              2
```

Dalam ekspresi simbolis, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Akses ke baris matriks simbolik bekerja seperti halnya matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

Ekspresi simbolik dapat berisi sebuah penugasan. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Terdapat fungsi-fungsi simbolik dalam Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk hal ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j+1},\frac{1}{j+2},\frac{1}{j+3}\right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
            -2             1
           1.5          -0.5
```

Euler juga memiliki sebuah fungsi yang kuat xinv(), yang melakukan usaha yang lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita dapat menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                         1                       0
                         0                       1
```

Misalnya, nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
  [16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah sebuah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai baik untuk ekspresi simbolik maupun ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&:=".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
              1        3.14159
              4              5
```

Masih ada perbedaan antara bentuk numerik dan bentuk simbolik. Ketika mentransfer matriks ke bentuk simbolik, perkiraan pecahan untuk bilangan real akan digunakan.

```
>$&A
```

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi "mxmset(variable)".

```
>mxmset(A); $&A
```

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka mengambang yang besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point yang besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
        3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  459230781640628620899862803482534211706 8b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun dengan menggunakan "@var".

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":=" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

$$-5.424777960769379$$

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kita asumsikan suku bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu suku bunga sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150
```

Euler juga akan memahami sintaks berikut ini.

```
>K+K*3%
```

```
5150
```

Tetapi lebih mudah untuk menggunakan faktor

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Untuk 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktor tersebut dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kita, kita bisa menetapkan formatnya menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
    6719.58
```

Mari kita cetak angka yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun ke-1 hingga tahun ke-9? Untuk hal ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis perulangan, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan sebuah vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi dalam Euler dapat diterapkan pada vektor elemen demi elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q^0 hingga q^10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan vektor nilai.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found: K*q^(0:10) (character 75)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
VK=:K*q^(0:10) ...
    ^
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setiap tahunnya. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
                 1271.61
                1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler menyediakan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah iterasi fungsi, yang mengulang fungsi yang diberikan beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
Variable q not found!
Use global or local variables defined in function oneyear.
oneyear:
    useglobal; return round(K*q,2)
niterate:
    x=f$(x,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
iterate:
    return niterate(f$,x,n,till;args());
```

Kita bisa mencetaknya dengan cara yang bersahabat, menggunakan format kami dengan angka desimal yang tetap.

```
>VKr'
```

```
    5000.00
    5150.00
    5304.50
    5463.64
    5627.55
    5796.38
    5970.27
    6149.38
    6333.86
    6523.88
    6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen vektor tertentu, kita menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
    5150.00
    5000.00      5150.00      5304.50
```

Yang mengejutkan, kita juga dapat menggunakan vektor indeks. Ingatlah bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
    6719.60
    6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Menyelesaikan Persamaan

Sekarang kita ambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kami memilih R = 200.

```
>q=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
[5000,  1.0002e+06,  2.0004e+08,  4.0008e+10,  8.00161e+12,
1.60032e+15,  3.20064e+17,  6.40129e+19,  1.28026e+22,  2.56051e+24,
5.12103e+26]
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>q=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
[5000,  -999800,  1.9996e+08,  -3.9992e+10,  7.99841e+12,
-1.59968e+15,  3.19936e+17,  -6.39873e+19,  1.27975e+22,
-2.55949e+24,  5.11898e+26]
```

Kami melihat bahwa uangnya berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kita harus menulis perulangan untuk ini. Cara termudah adalah dengan melakukan perulangan yang cukup lama.

```
>VKq=iterate("onepay",5000,50)
```

```
[5000,  -999800,  1.9996e+08,  -3.9992e+10,  7.99841e+12,
-1.59968e+15,  3.19936e+17,  -6.39873e+19,  1.27975e+22,
-2.55949e+24,  5.11898e+26,  -1.0238e+29,  2.04759e+31,  -4.09518e+33,
8.19037e+35,  -1.63807e+38,  3.27615e+40,  -6.5523e+42,  1.31046e+45,
-2.62092e+47,  5.24184e+49,  -1.04837e+52,  2.09673e+54,
-4.19347e+56,  8.38694e+58,  -1.67739e+61,  3.35478e+63,
-6.70955e+65,  1.34191e+68,  -2.68382e+70,  5.36764e+72,
-1.07353e+75,  2.14706e+77,  -4.29411e+79,  8.58823e+81,
-1.71765e+84,  3.43529e+86,  -6.87058e+88,  1.37412e+91,
-2.74823e+93,  5.49646e+95,  -1.09929e+98,  2.19859e+100,
-4.39717e+102,  8.79434e+104,  -1.75887e+107,  3.51774e+109,
-7.03547e+111,  1.40709e+114,  -2.81419e+116,  5.62838e+118]
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKq<0))
```

```
2
```

Alasannya adalah karena nonzeros(VKR<0) mengembalikan vektor dengan indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, maka jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Fungsi ini dapat menerima kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian fungsi ini akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-999800
1
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Anggaplah kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapakah tingkat suku bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kami akan menurunkan rumus yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk suku bunga. Namun untuk saat ini, kita akan mencari solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan sebuah fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita tambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Perulangannya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Tetapi kita tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kita. Fungsi-fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus dalam Euler. Anda bisa mengoper nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Selain itu, kita hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita mengambil indeks [-1].

Mari kita coba sebuah tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
Function f not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
f(5000,-200,3,47) ...
                 ^
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutin penyelesaian menyelesaikan ekspresi = 0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kita mengambil nilai awal 3% untuk algoritma ini. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita hapus per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
      -336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kita mengasumsikan n sebagai nilai bilangan bulat.

Solusi Simbolik untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik dari Euler untuk mempelajari masalah ini. Pertama, kita mendefinisikan fungsi onepay() secara simbolik.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R+q\,K$$

Sekarang kita bisa mengulangi hal ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q^3\,R+q^2\,R+q\,R+R+q^4\,K$$

Kita melihat sebuah pola. Setelah n periode, kita memiliki

lateks: K_n = q^n K + R (1+q+\ titik-titik+q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n-1}{q-1} R

Rumus tersebut adalah rumus untuk jumlah geometris, yang dikenal dengan Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1}{q^{k}}=\frac{q^{n}-1}{q-1}$$

Ini sedikit rumit. Penjumlahan dievaluasi dengan flag "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi. Mari kita buat sebuah fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^n-1\right)R}{P}+K\left(\frac{P}{100}+1\right)^n$$

Fungsi ini melakukan hal yang sama seperti fungsi f kita sebelumnya. Tetapi fungsi ini lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kita adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa nilai tersebut akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga bisa menggunakan sisi simbolis dari Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n kali pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) sehingga menyisakan sisa utang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus untuk hal ini adalah sebagai berikut

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

lateks: i = \frac{P}{100}

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

Kita dapat menyelesaikan laju R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

Seperti yang dapat Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i = 0. Euler tetap memplotnya.

Tentu saja, kita memiliki batas berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

Jelasnya, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 suku bunga 500.

Persamaan ini juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih baik jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

[]

== Sisipan Soal dari PDF ==

1)James deposits $250 in a retirement account each month beginning at age 40. If the investment earns 5% interest, compounded monthly, how much will have accumulated in the account when he retires 27 years later?

```
>P=250; r=5%; n=12; t=27; P*((1+(r/n))^(n*t))
```

```
961.655430384
```

2) The cost of a house is $98,000. The down payment is $16,000, the interest rate is and the loan period is 25 years. What is the monthly mortgage payment?

```
>P=135-18; r=6.5% ; n=20*12; P*((r*(1+r)^n)/((1+r)^n-1))
```

```
7.60500207584
```

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada beberapa fungsi dasar plot. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Selain itu, ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
```

```
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
>reset;
```

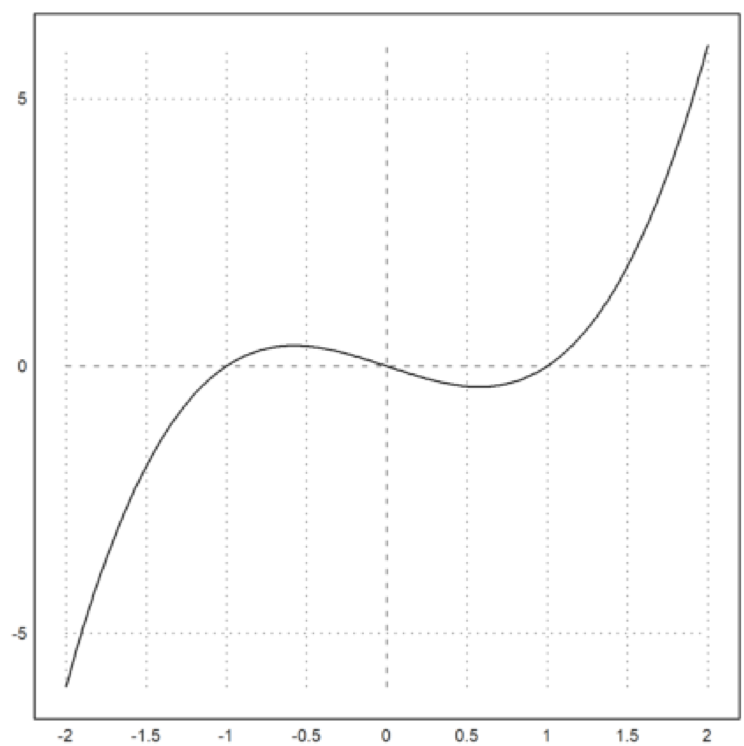
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan membersihkan jendela plot.

Untuk membersihkan semua yang telah kita lakukan, kita menggunakan reset().

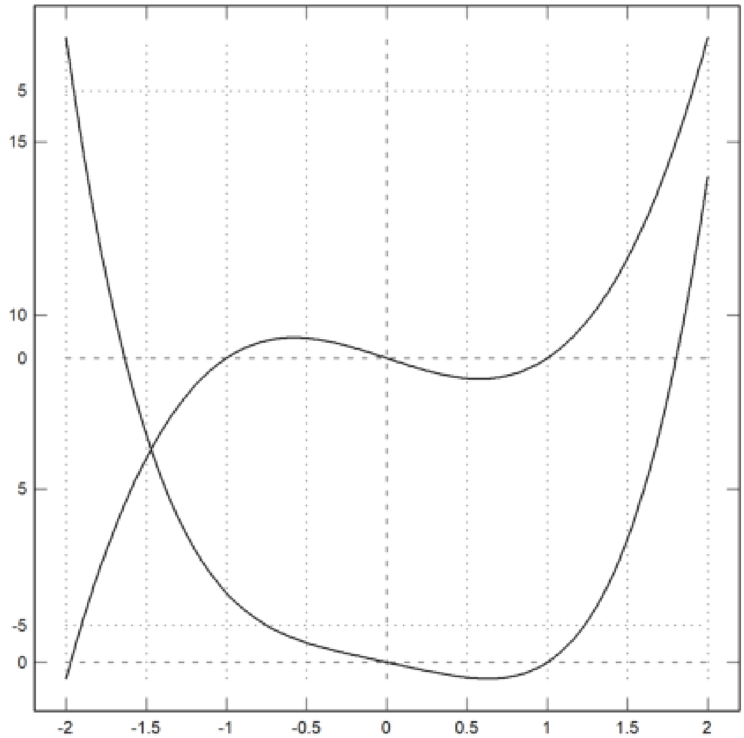
Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lainnya adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Sebagai contoh lain, kita menggambar plot sebagai inset di plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x"):
```




```
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```




```
>hold off;
>window(ow);
```

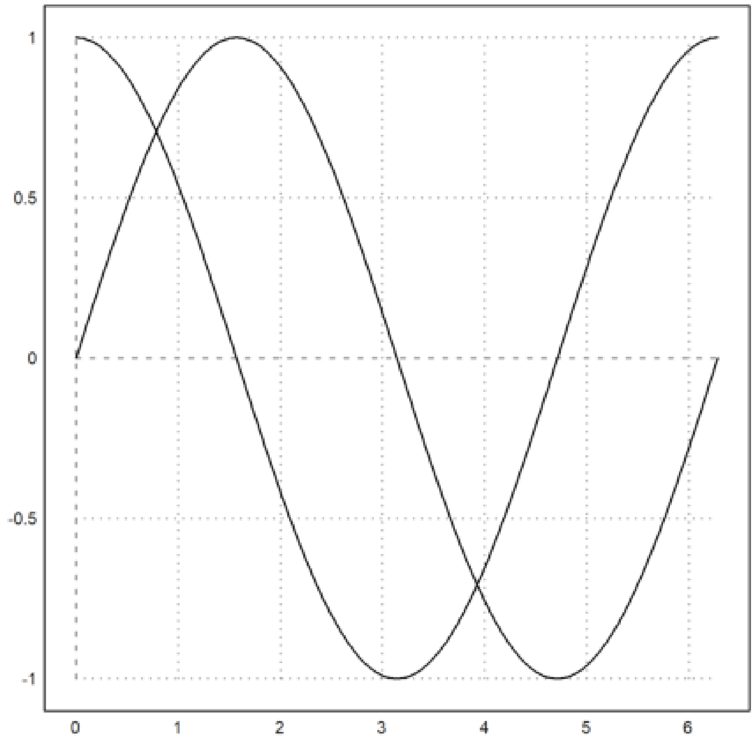
Plot dengan beberapa gambar dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi utilitas figure() untuk ini.

Plot Aspect

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspek nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
> aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```




```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.

Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk memplot di Maxima menggunakan Gnuplot atau di Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di bidang,
- kurva implisit dengan level atau daerah level.
- Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.

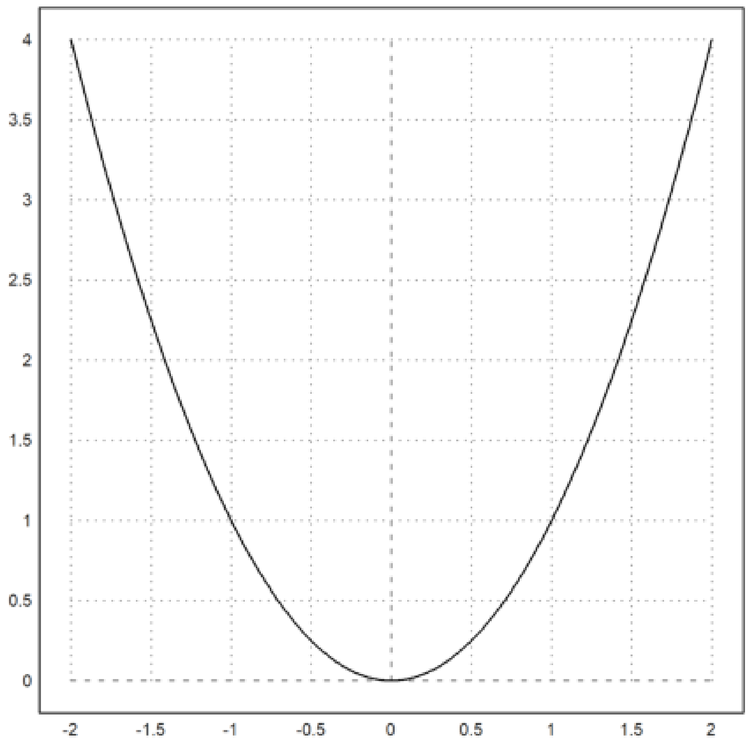
Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi.

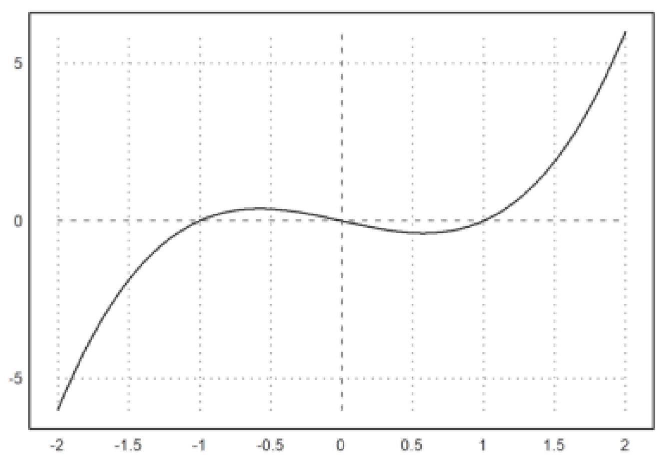
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan disisipkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

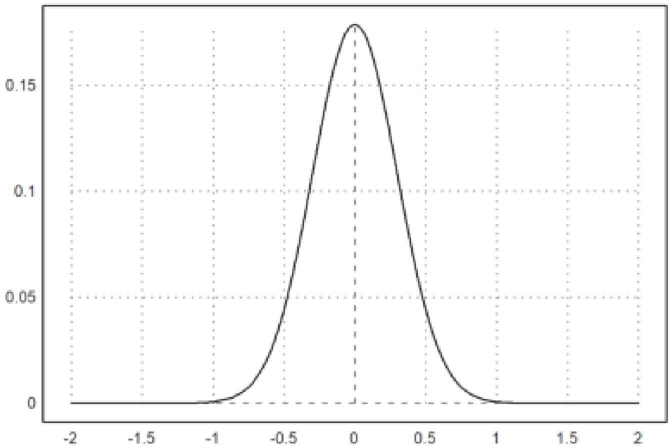
```
>plot2d("x^2"):
```




```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```



```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```



Rentang plot ditetapkan dengan parameter yang ditetapkan berikut ini

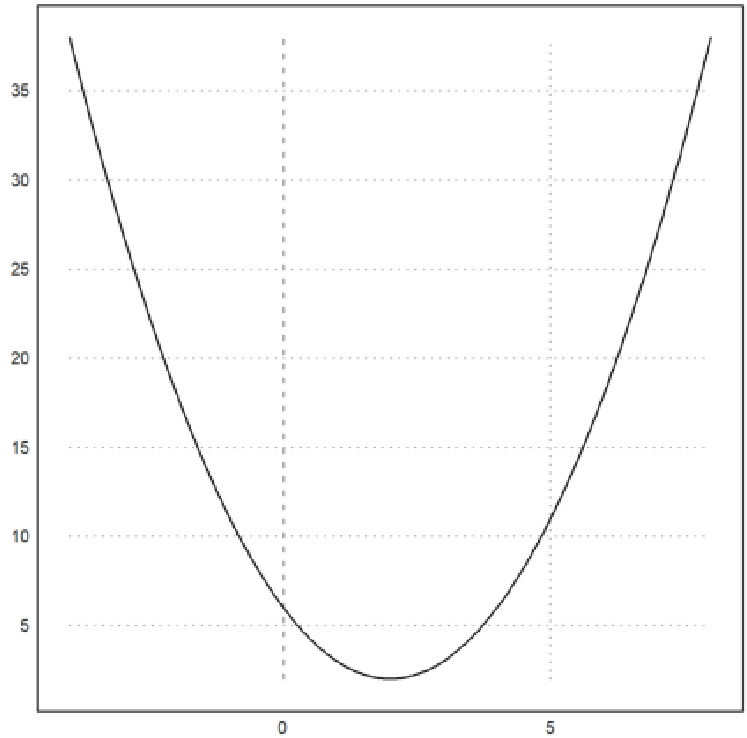
- a,b: rentang x (default -2,2)
- c, d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif, radius di sekitar pusat plot
- cx, cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

Contoh soal :

Visualisasikan fungsi linear berikut ini:

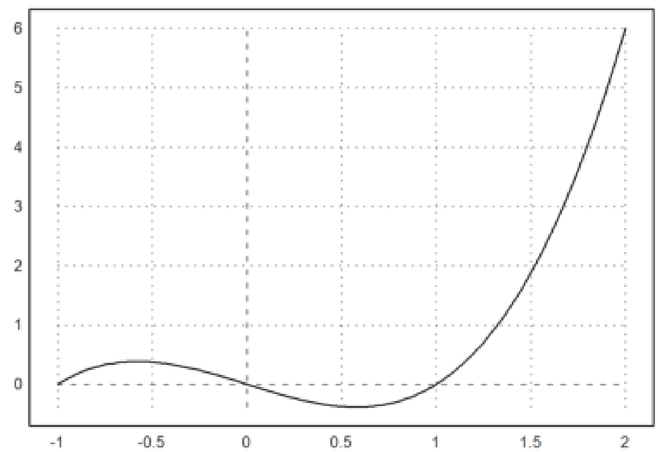
$$x^2 - 4x + 6$$

```
>plot2d("x^2-4*x+6",-4,8):
```

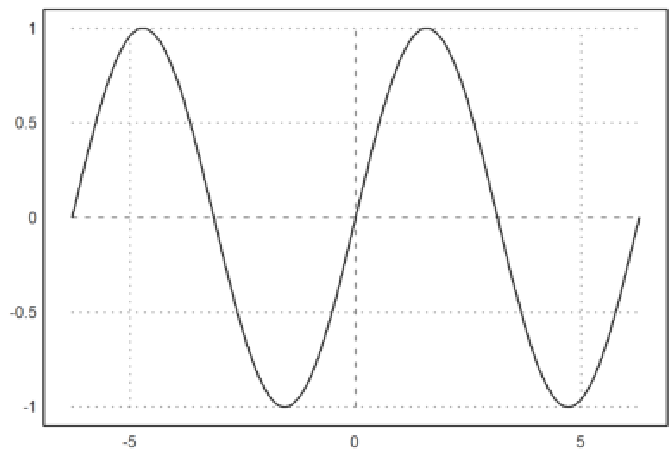


Grafik yang divisualisasikan dari fungsi di atas merupakan grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas. Grafik yang divisualisasikan hanya dari rentang -8 sampai 4

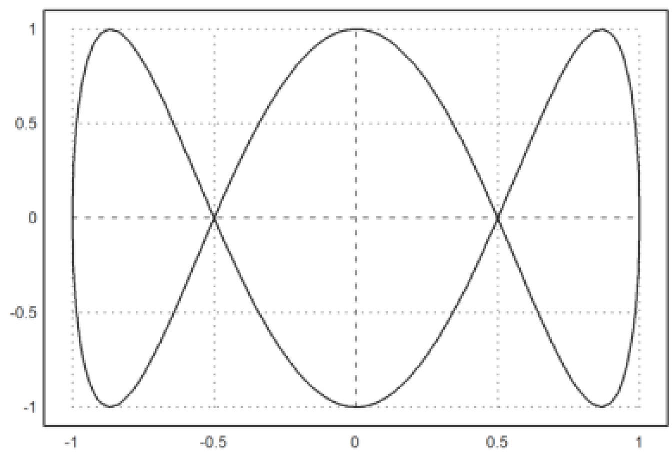
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```




```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```



```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Alternatif untuk tanda titik dua adalah perintah insimg(lines), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul

- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya yang dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Dalam hal apa pun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel yang Rumusnya Disimpan dalam

Variabel Ekspresi.

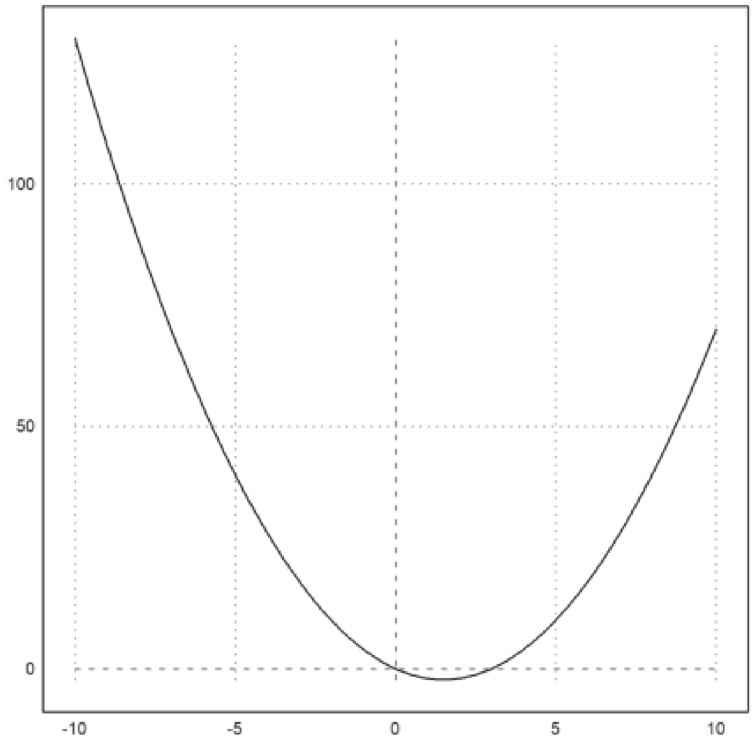
Contoh Soal

Diketahui bahwa

$$z = x^2 - 3x$$

Maka bagaimanakah visualisasinya?

```
>plot2d("x^2-3*x",-10,10):
```



Grafik fungsi yang dihasilkan dari kurva tersebut merupakan grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas dengan hanya menampilkan grafik pada rentang -10 sampai 10

Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel yang Fungsinya Didefinisikan

sebagai Fungsi Numerik.

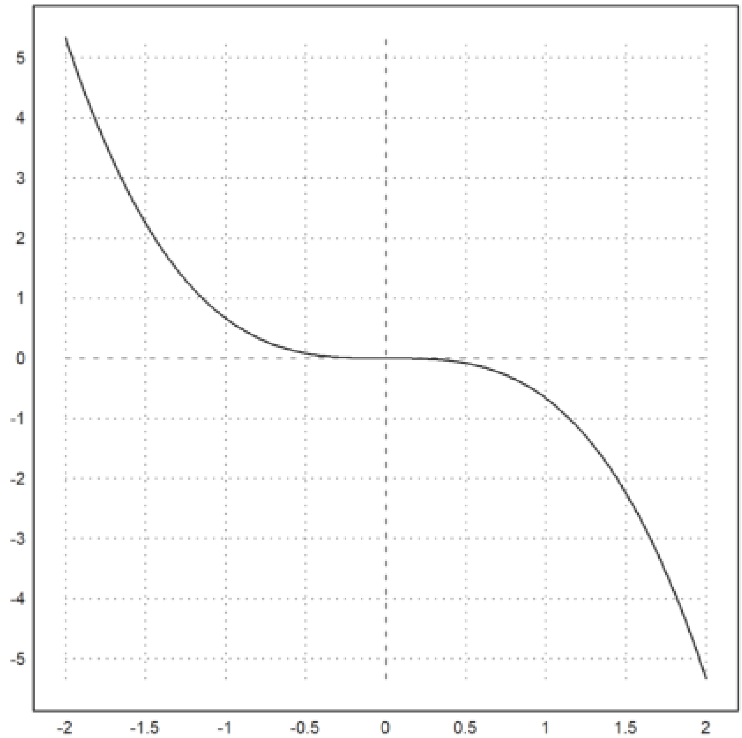
Contoh Soal

Diketahui bahwa terdapat suatu fungsi

$$f(x) = -2/3x^3$$

Bagaimanakah visualisasi dari fungsi tersebut?

```
>plot2d("-2/3*x^3"):
```



grafik tersebut merupakan visualisasi dari fungsi polinomial pangkat 3

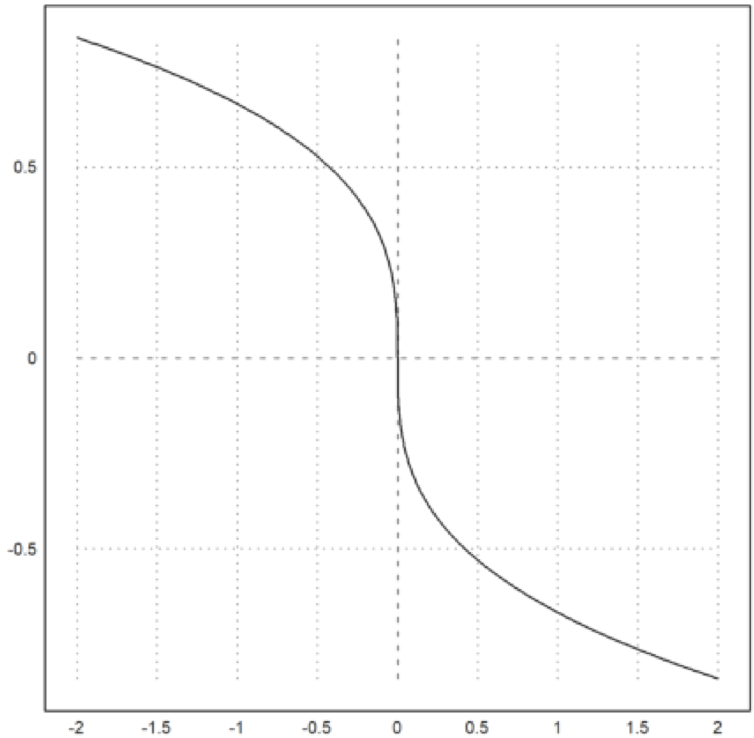
Menggambar Grafik Fungsi Satu Variabel yang Fungsinya Didefinisikan

sebagai Fungsi Simbolik.
Contoh Soal
Terdapat sebuah fungsi

$$g(x) = -2/3\sqrt[3]{x}$$

Bagaimanakah visualisasi dari fungsi tersebut?

```
>plot2d("-2/3*x^(1/3)"):
```

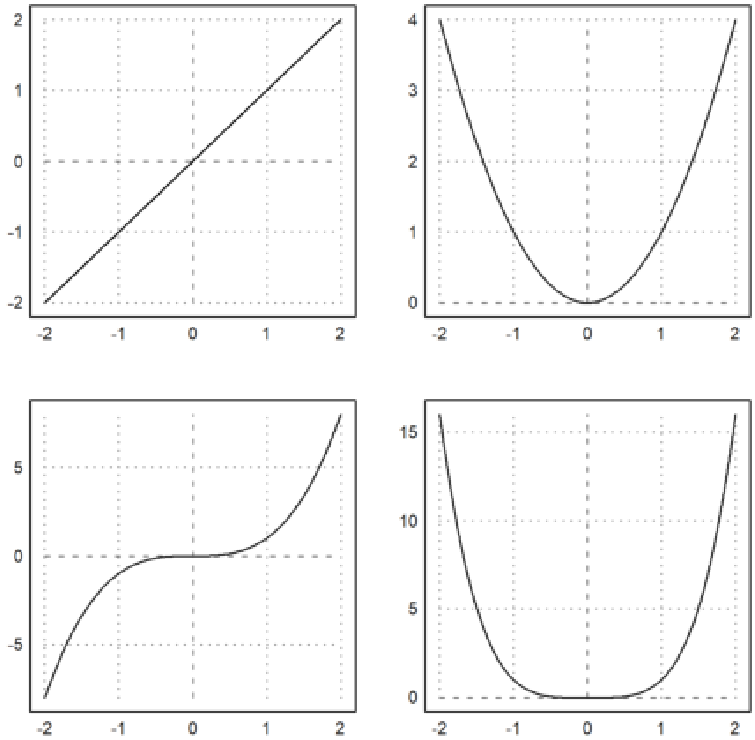


Visualisasi grafik yang muncul dari fungsi di atas ternyata hampir mirip dengan fungsi sebelumnya, hanya beda arahnya saja.

Menggambar Beberapa Kurva Sekaligus

Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Pada contoh, kita memplot x^1 sampai x^4 ke dalam 4 bagian jendela. figure(0) akan mereset jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



Dalam plot2d(), tersedia gaya alternatif dengan grid=x. Sebagai gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya grid dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Gaya ini tidak menampilkan grid dan frame.

Contoh Soal

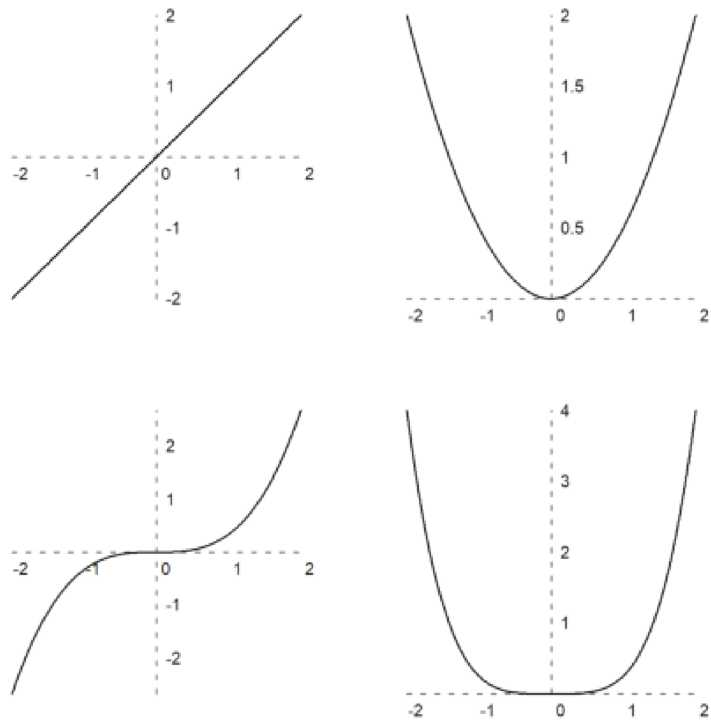
Diberikan suatu fungsi

$$f(x) = \frac{x^n}{n}$$

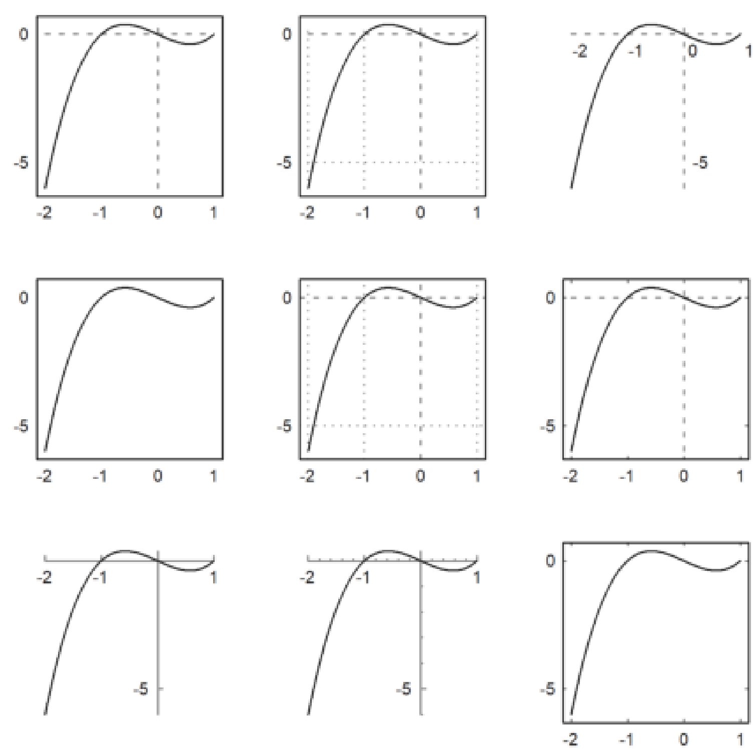
dengan n dari 1 sampai 4

Bagaimanakah visualisasi dari fungsi tersebut

```
>figure(2,2); ...
>for n=1:4; figure(n); plot2d("x^n/n",-2,2,grid=3); end; ...
>figure(0):
```



```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

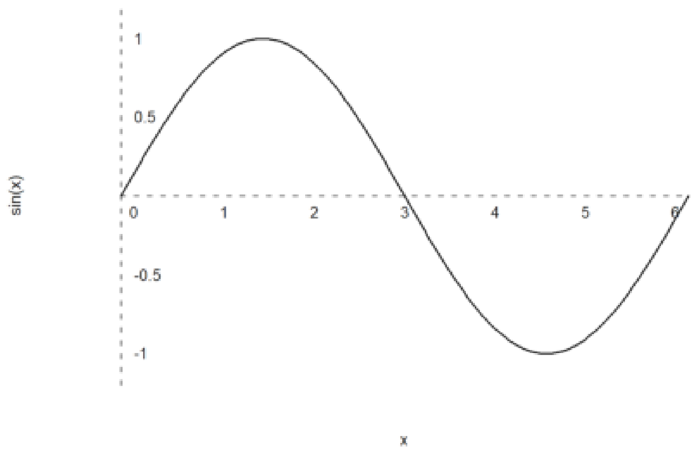


Jika argumen untuk plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

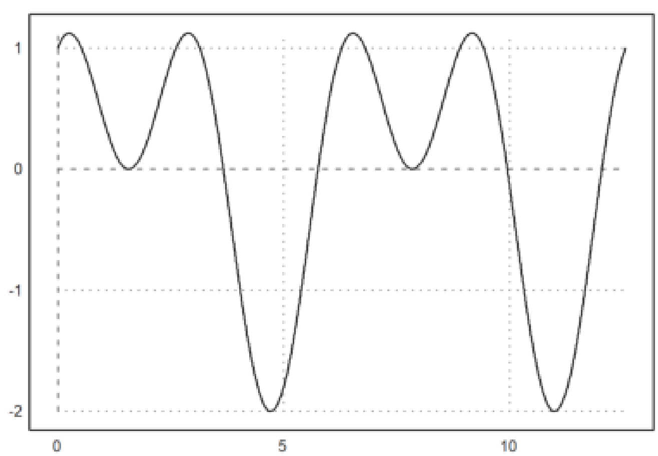
Atau, a, b, c, d dapat ditetapkan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dst.

Dalam contoh berikut, kami mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```




```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```



Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan dalam direktori yang sama dengan buku catatan, secara default dalam subdirektori bernama "images". Gambar tersebut juga digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa pun dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi-fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```

Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai memplot segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar rentang definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```

Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

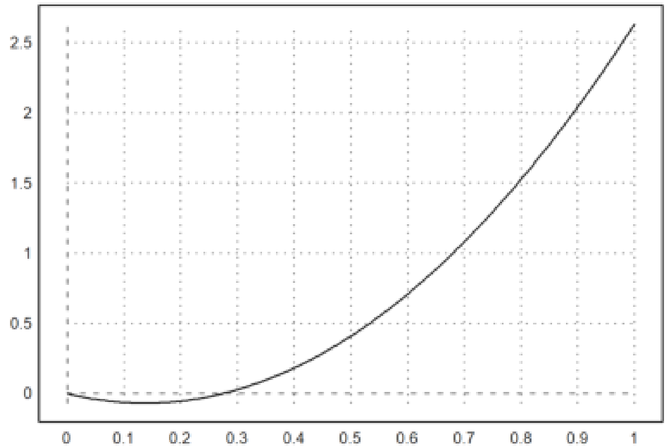
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```

Fungsi dalam satu Parameter

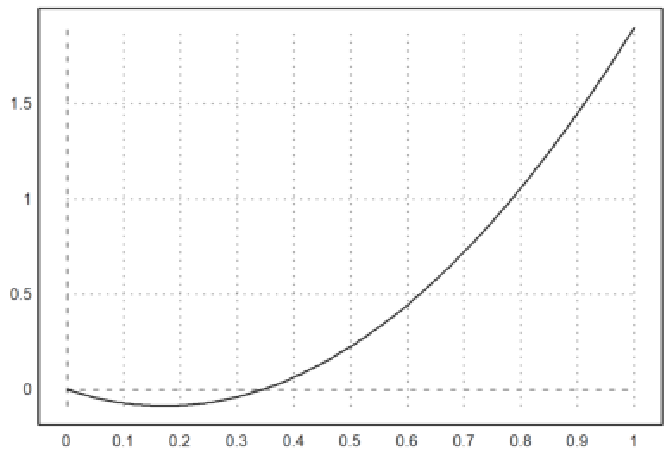
Fungsi plotting yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.

Berikut ini beberapa contoh penggunaan fungsi. Seperti biasa dalam EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

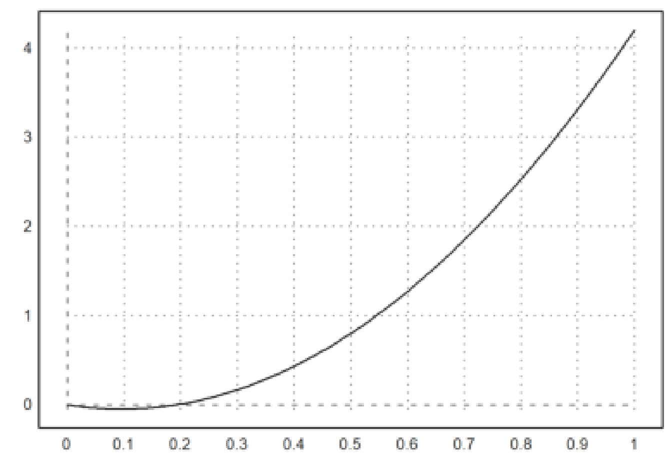
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```




```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```




```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```



```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```

Berikut ini adalah ringkasan fungsi yang diterima

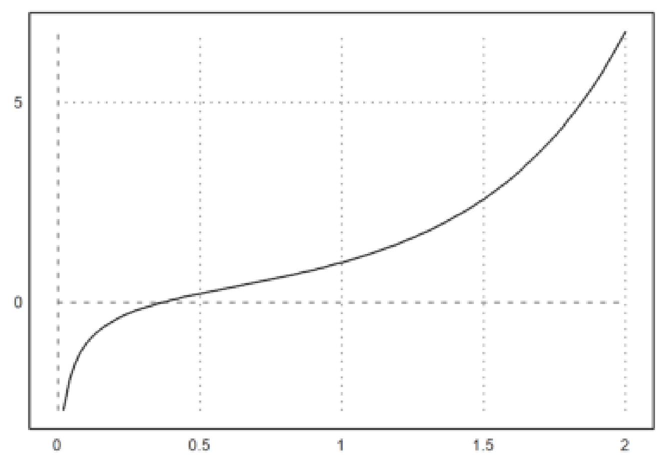
- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolik berdasarkan nama seperti "f"
- fungsi simbolik hanya berdasarkan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, hanya nama yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                         x
                        x   (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

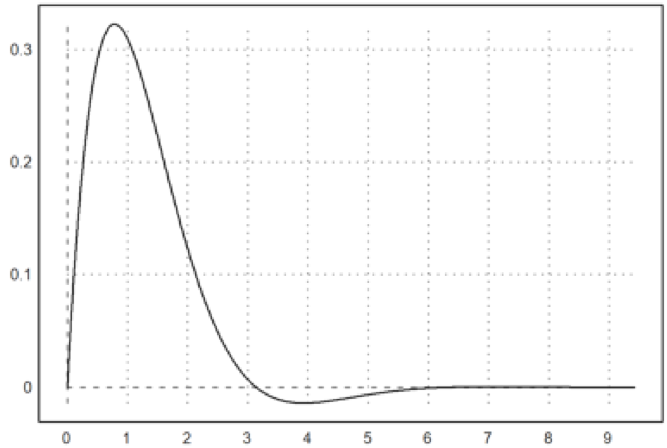


Tentu saja, untuk ekspresi atau ungkapan simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

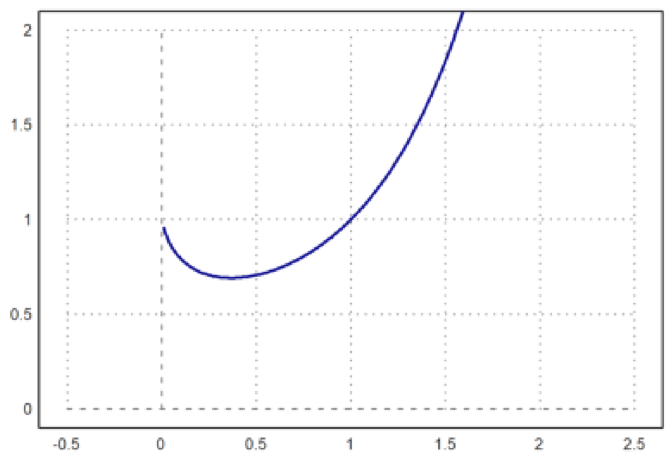
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                           - x
                          E    sin(x)
```

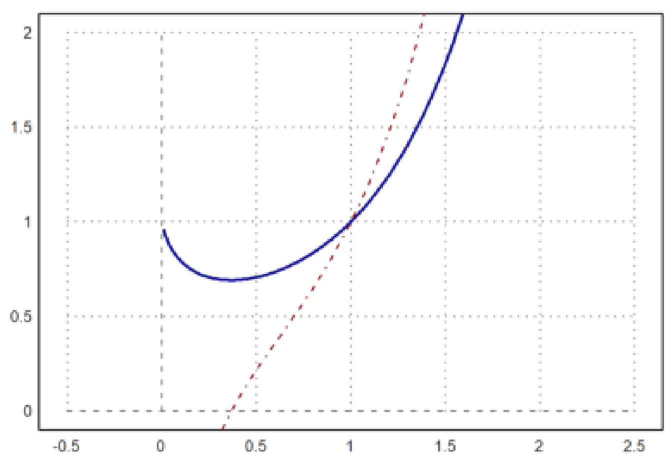
```
>plot2d(expr,0,3pi):
```




```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2):
```




```
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



Untuk gaya garis, ada berbagai pilihan.

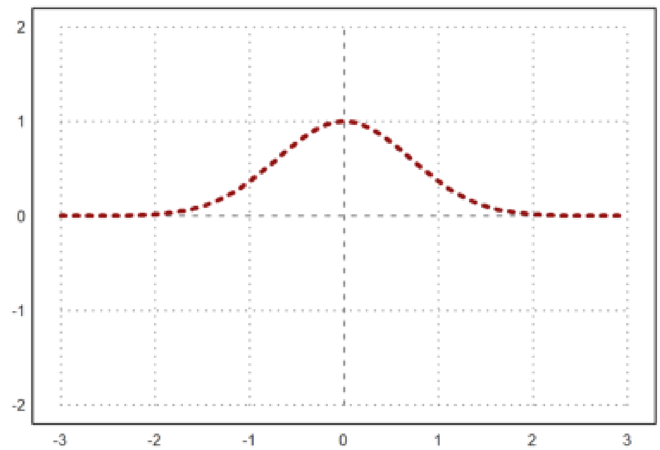
- style="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- color: Lihat di bawah untuk warna.

thickness: Default adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

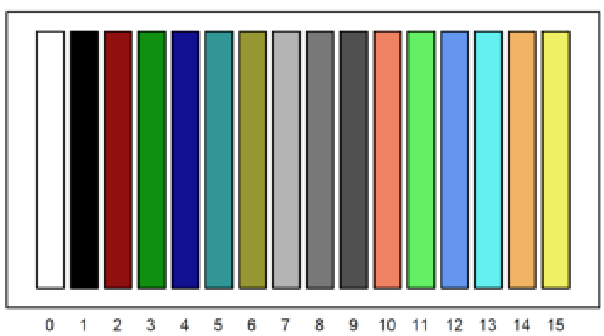
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, biru kehijauan, biru muda, oranye muda, kuning
- rgb(merah,hijau,biru): parameter adalah bilangan real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



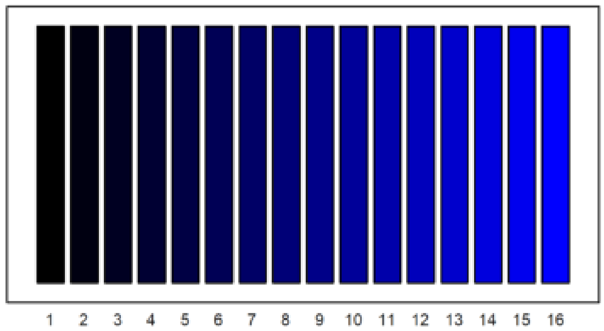
Berikut ini tampilan warna EMT yang telah ditetapkan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Namun Anda dapat menggunakan warna apa pun.

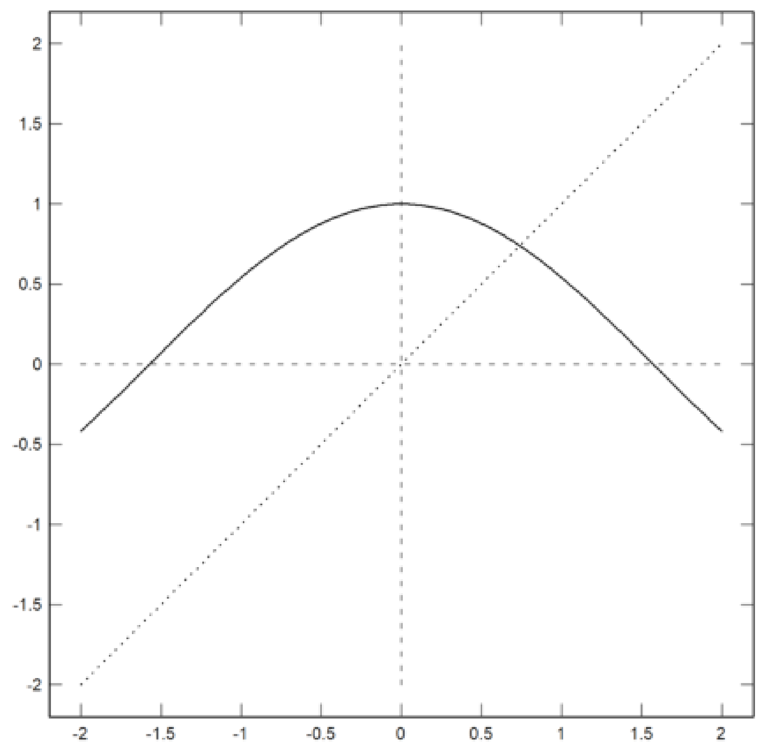
```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```



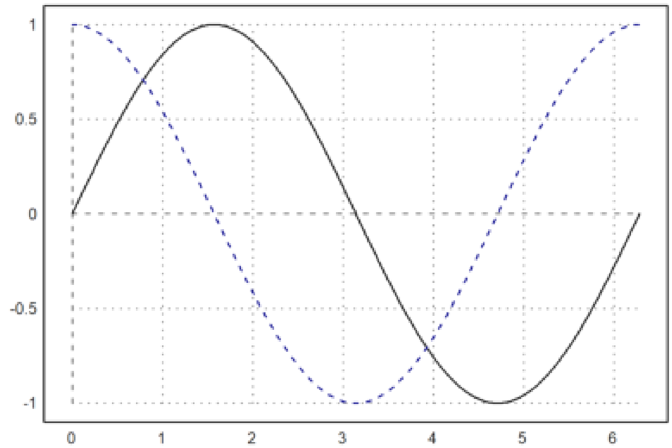
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plotting lebih dari satu fungsi (multifungsi) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya adalah menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```

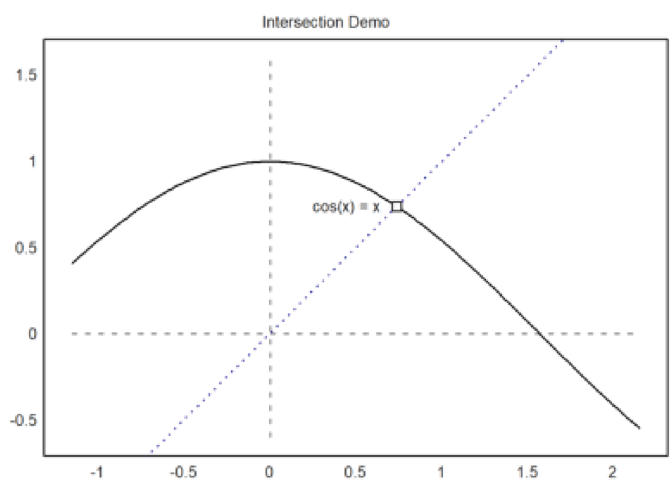


Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```

Kami menambahkan titik potong dengan label (pada posisi "cl" untuk tengah kiri), dan memasukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul pada plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



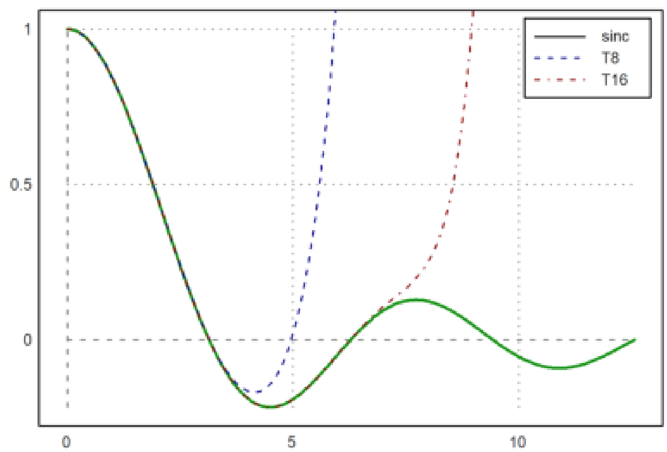
Dalam perintah berikut, kami memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi-fungsi tersebut.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

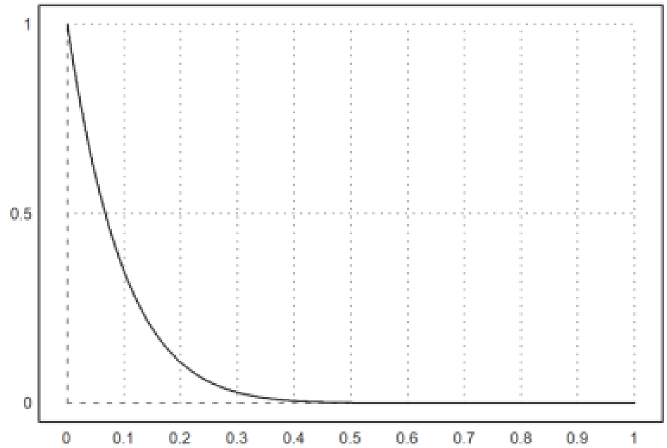
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```



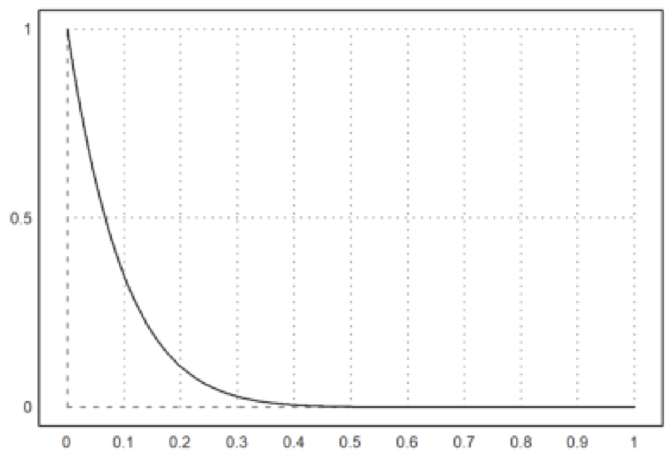
Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1): // plot first function
```




```
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



Metode kedua menggunakan sepasang matriks nilai-x dan matriks nilai-y dengan ukuran yang sama.

Kita buat matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Maka setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan array warna, array gaya, dan array ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```

Kita bisa mendapatkan vektor tersebut dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                10              9                8   2                7   3
        [(1 - x)  , 10 (1 - x)  x, 45 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
            6   4                5   5                4   6                3   7
  210 (1 - x)  x , 252 (1 - x)  x , 210 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
           2   8                9    10
  45 (1 - x)  x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```
  (1-x)^10
  10*(1-x)^9*x
  45*(1-x)^8*x^2
  120*(1-x)^7*x^3
  210*(1-x)^6*x^4
  252*(1-x)^5*x^5
  210*(1-x)^4*x^6
  120*(1-x)^3*x^7
  45*(1-x)^2*x^8
  10*(1-x)*x^9
  x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```

Menggambar Sekumpulan Kurva dengan satu Perintah plot2d.

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot menjadi satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, array tersebut akan digunakan untuk setiap baris plot.

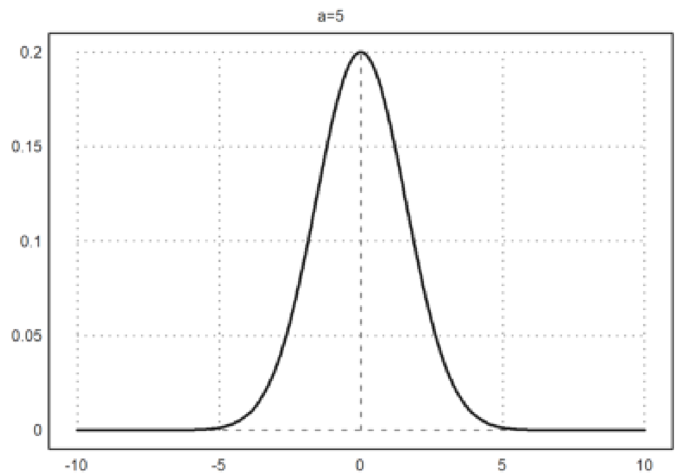
```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh ini, kami meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kami plot dari -10 hingga 10.

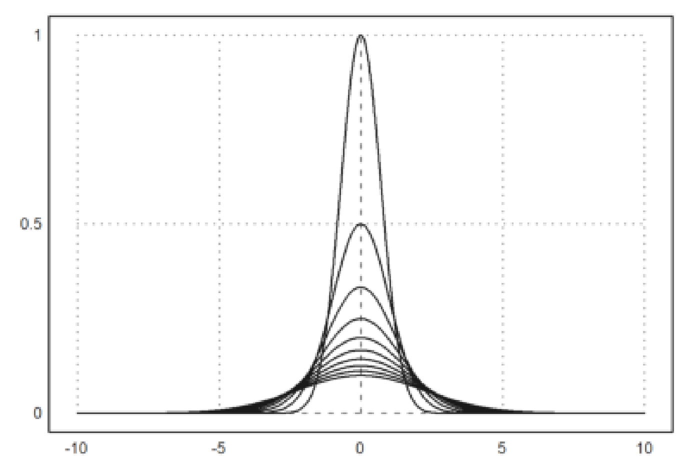
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

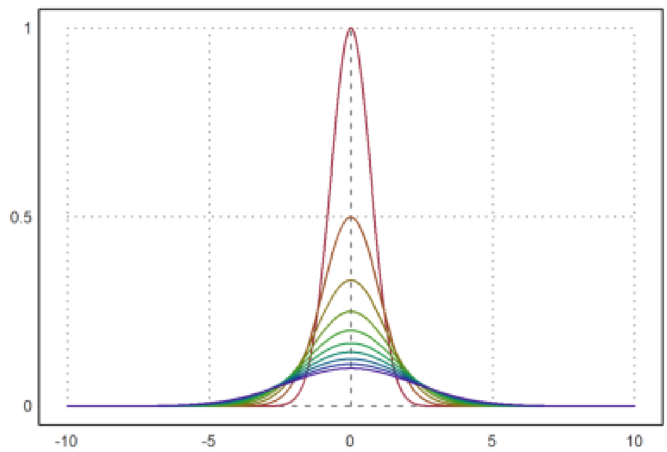
Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat memperoleh hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```



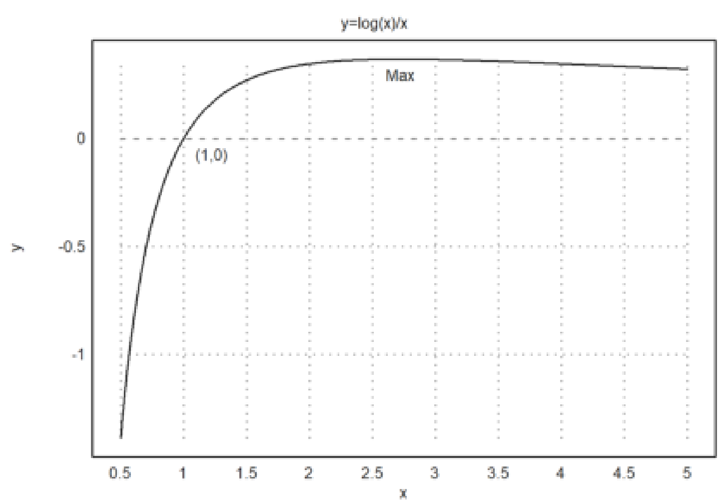
Label Teks

Dekorasi sederhana dapat berupa

- judul dengan title="..."
- label x dan y dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

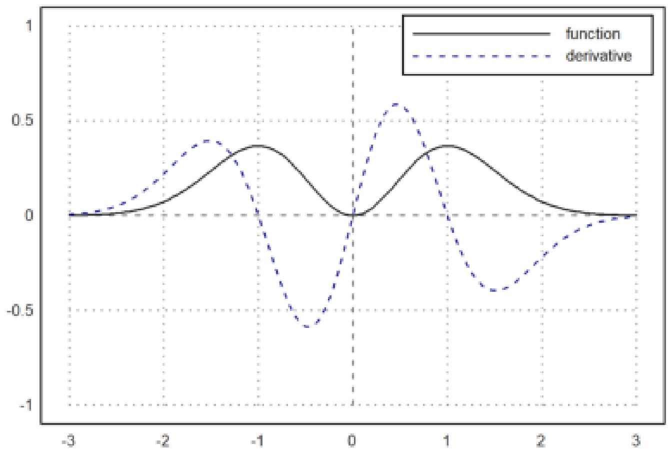
Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Perintah ini dapat mengambil argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Fungsi ini mengambil vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

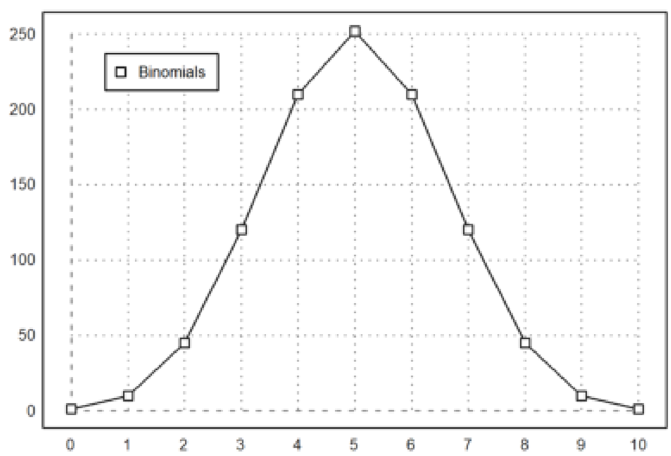


Kotak tersebut ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi >left menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angka-angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

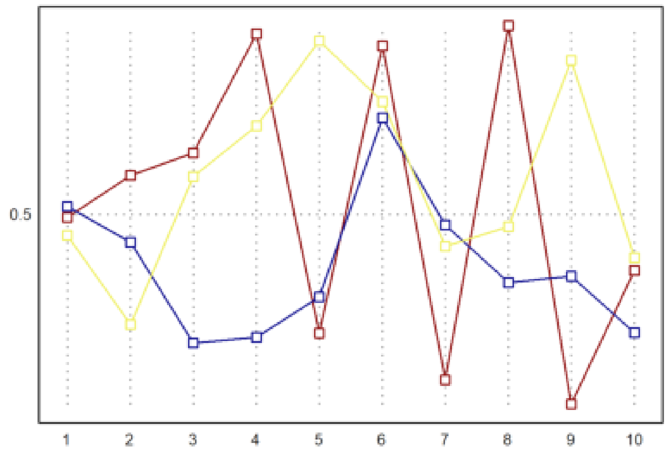
Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi, kita dapat menggunakan string alih-alih vektor string. Kita tetapkan warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d(), warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada plot yang lebih khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(3,10),color=[red,blue,yellow]):
```



Fitur serupa adalah fungsi textbox().

Lebar secara default adalah lebar maksimal baris teks. Namun, pengguna juga dapat mengaturnya.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```

Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaksis EMT untuk informasi lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```

Label pada sumbu x dan y dapat vertikal, begitu pula sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```

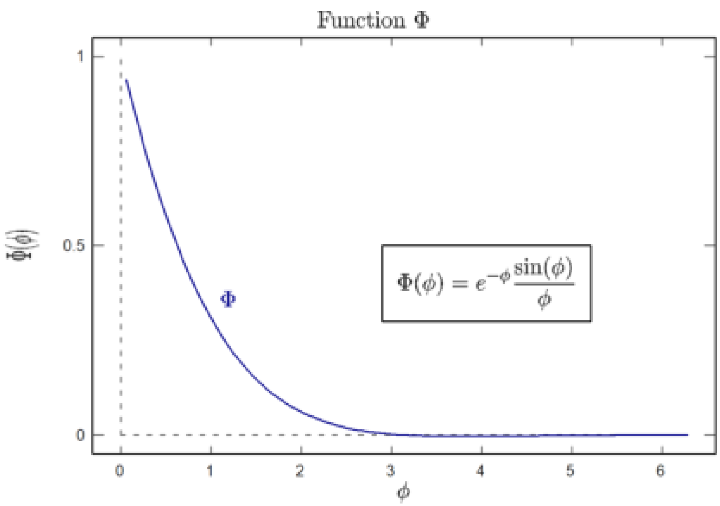
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "latex" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perlu dicatat, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

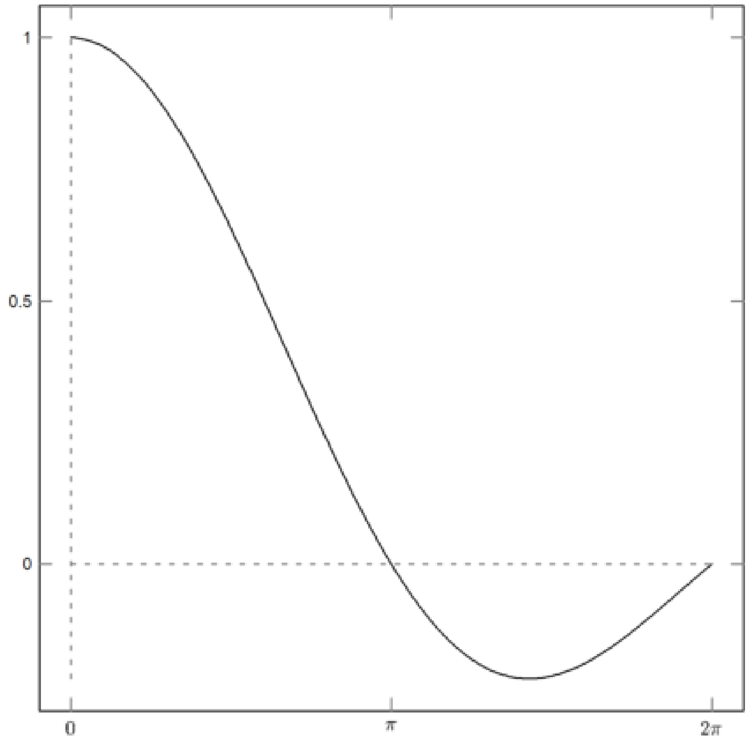
```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Sering kali, kita menginginkan spasi nonkonformal dan label teks pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikut, kita menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

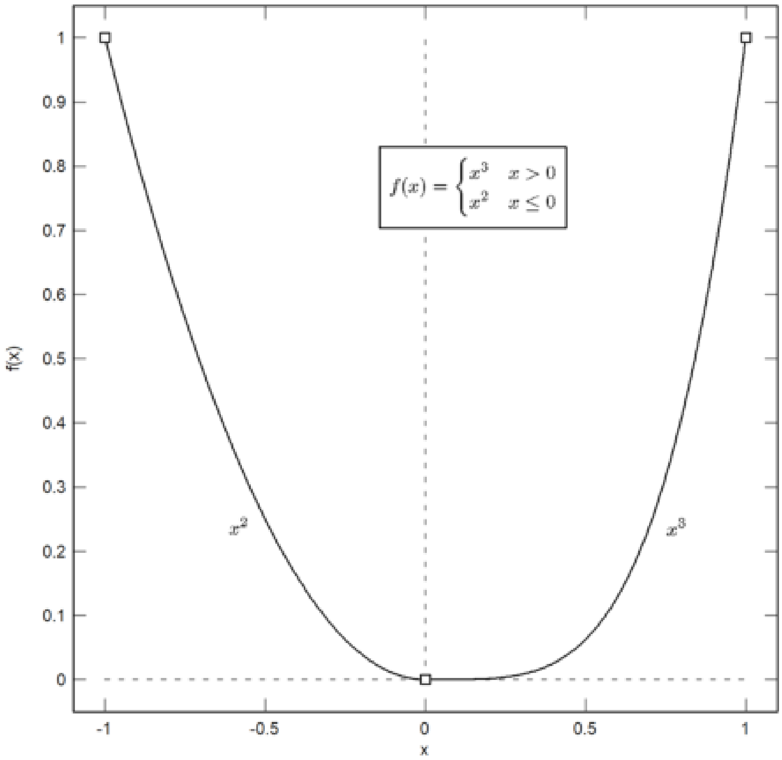
```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, parameter tersebut tidak diperlukan. Namun, untuk menunjukkan bahwa vektorisasi berguna, kami menambahkan beberapa poin penting ke plot pada x=-1, x=0, dan x=1.

Dalam plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



Interaksi Pengguna

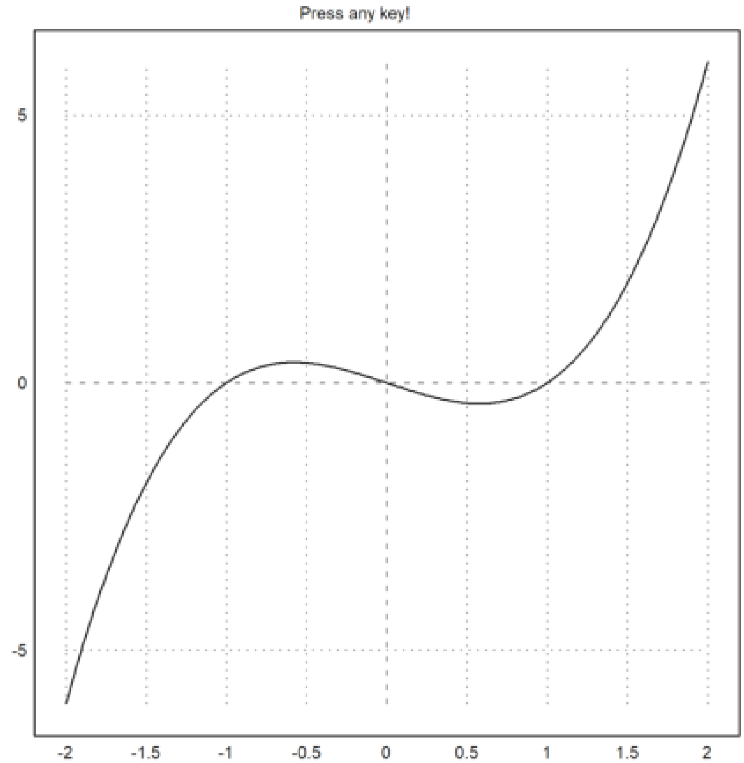
Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau tetikus. Pengguna dapat

- memperbesar dengan + atau -
- memindahkan plot dengan tombol kursor
- memilih jendela plot dengan tetikus
- mengatur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

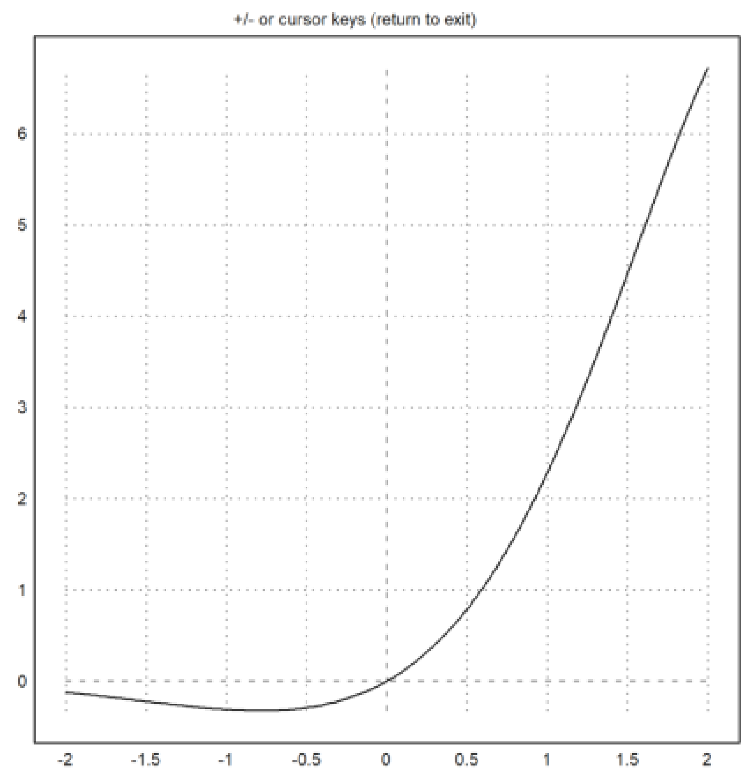
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, tanda >user akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu kejadian tetikus atau papan ketik. Fungsi ini melaporkan gerakan tetikus ke bawah, gerakan tetikus ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan fungsi ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Pertama-tama, kita memerlukan fungsi plot. Misalnya, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi ini harus memplot ke dalam area plot yang tetap.

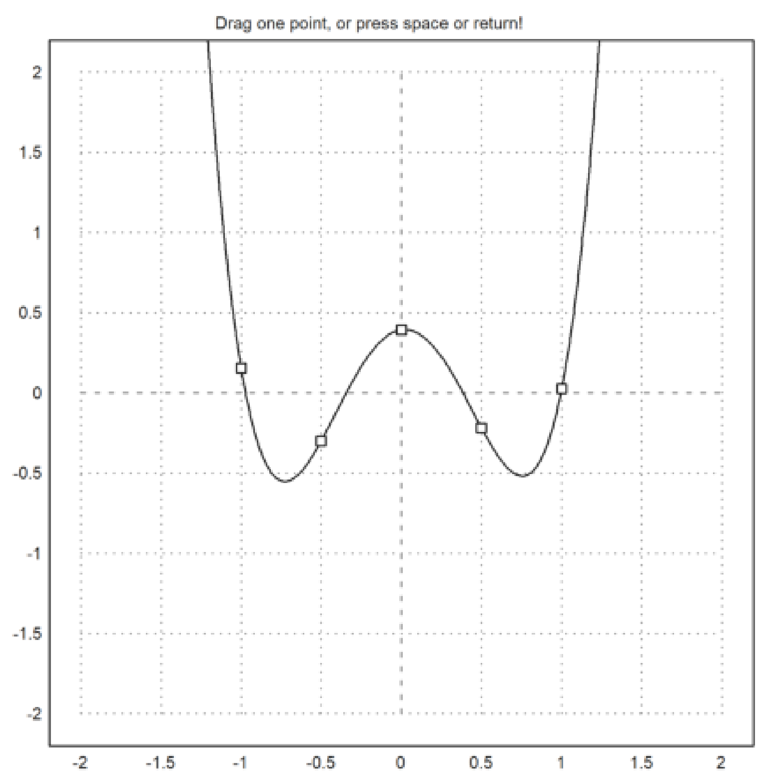
```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita buat beberapa nilai acak, dan biarkan pengguna menyeret titik-titiknya.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



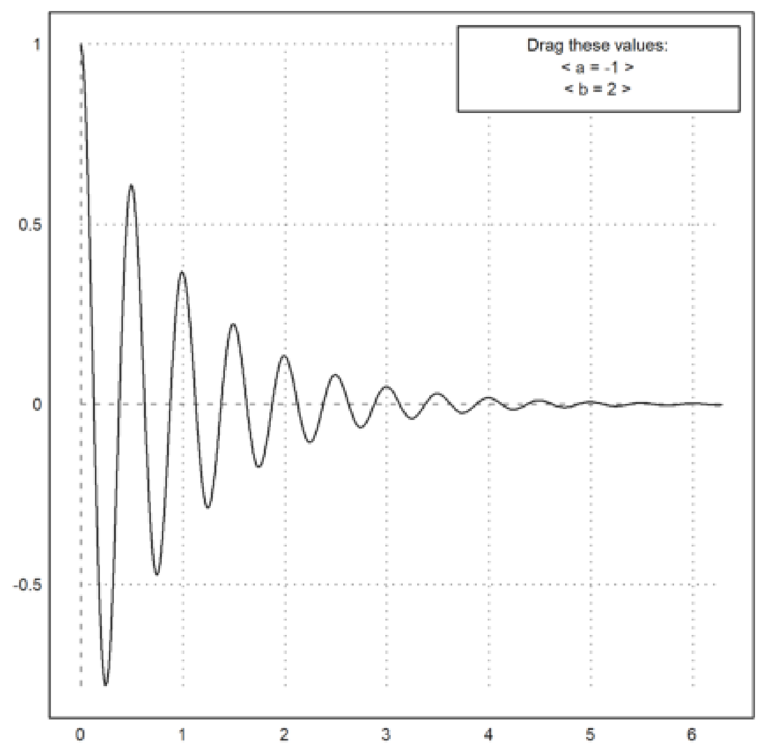
Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter tersebut.

Pertama, kita perlu fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita perlu nama untuk parameter, nilai awal, dan matriks rentang nx2, secara opsional baris judul. Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



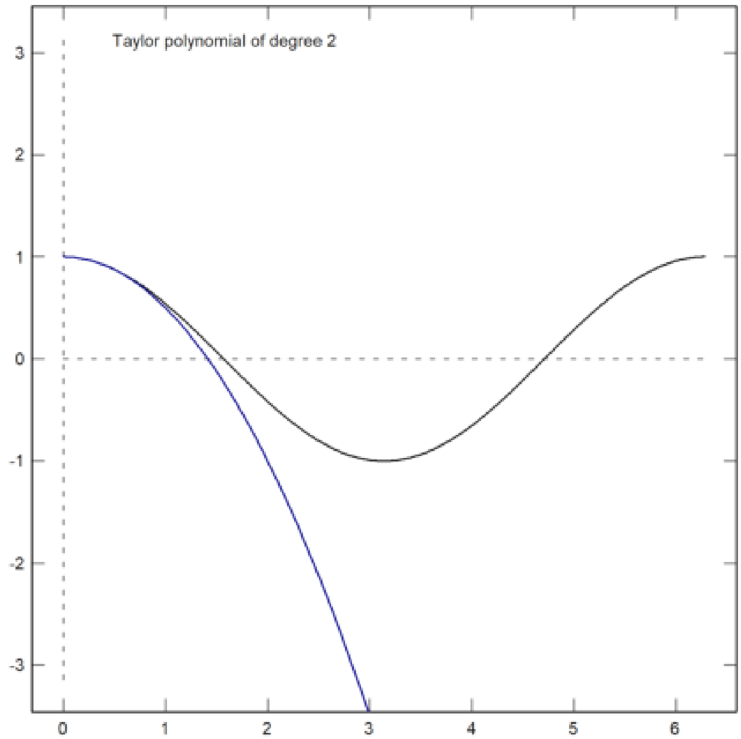
Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Misalnya, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
endfunction
```

Sekarang kita biarkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 stop. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak titik-titik.

```
>function dragtest ...
```

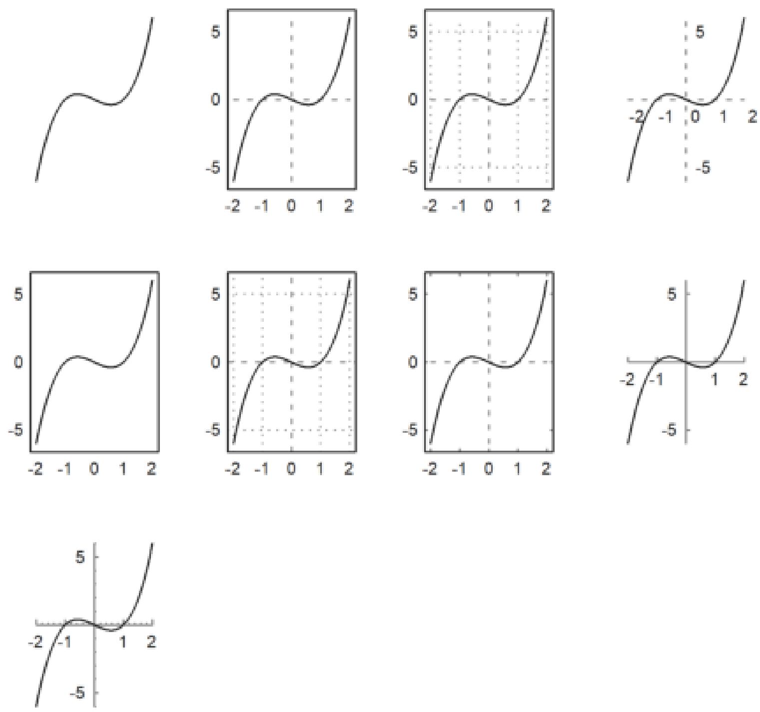
```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tanda centang sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tanda centang. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

```
>aspect():
```



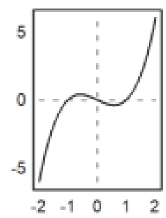
```
>figure(3,4); ...
> figure(1): plot2d("x^3-x",grid=0): ... // no grid, frame or axis
> figure(2): plot2d("x^3-x",grid=1): ... // x-y-axis
> figure(3): plot2d("x^3-x",grid=2): ... // default ticks
```

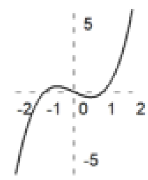
```
The : allows only real arguments!
Error in:
 figure(3): plot2d("x^3-x",grid=2): ... // default ticks ...
          ^
```

```
> figure(4): plot2d("x^3-x",grid=3): ... // x-y- axis with labels inside
```

```
The : allows only real arguments!
Error in:
 figure(4): plot2d("x^3-x",grid=3): ... // x-y- axis with labe ...
          ^
```

```
> figure(5): plot2d("x^3-x",grid=4): ... // no ticks, only labels
> figure(6): plot2d("x^3-x",grid=5): ... // default, but no margin
> figure(7): plot2d("x^3-x",grid=6): ... // axes only
> figure(8): plot2d("x^3-x",grid=7): ... // axes only, ticks at axis
> figure(9): plot2d("x^3-x",grid=8): ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10): plot2d("x^3-x",grid=9): ... // default, small ticks inside
> figure(11): plot2d("x^3-x",grid=10): ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```

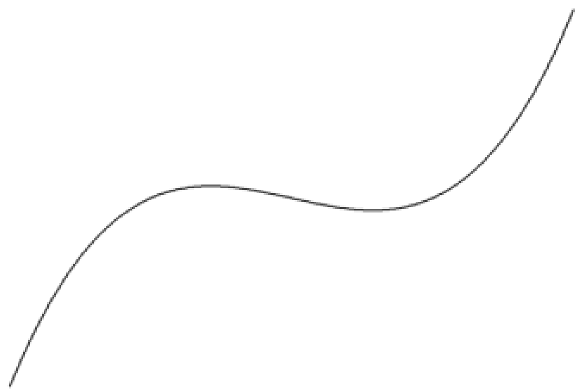




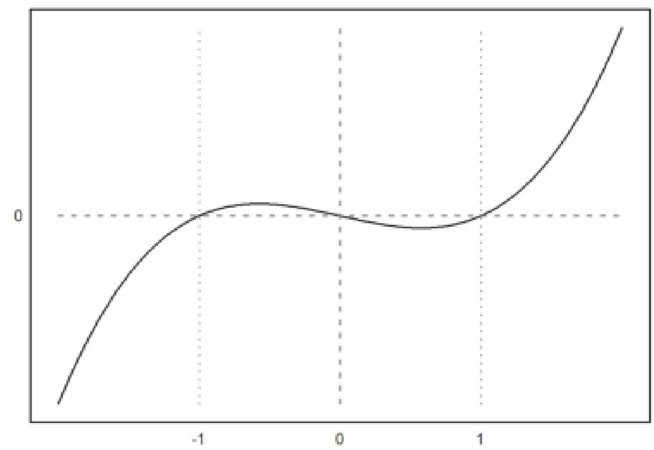
Parameter <frame menonaktifkan bingkai, dan framecolor=blue menyetel bingkai ke warna biru.

Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5); // untuk menentukan luas gambar dengan rasio 1 banding 5
>plot2d("x^3-x",grid=0): // plot
```

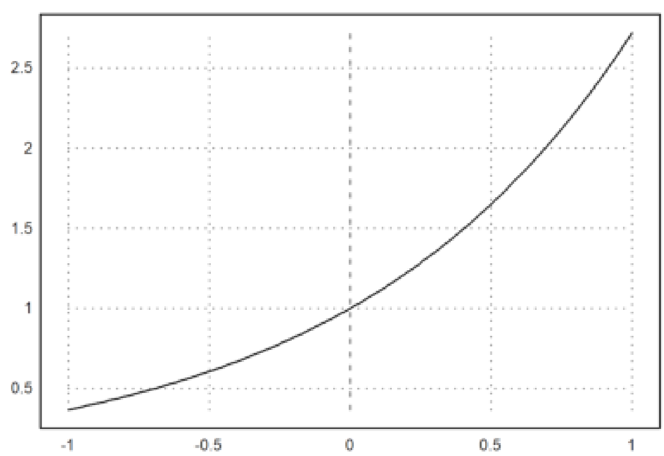


```
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```

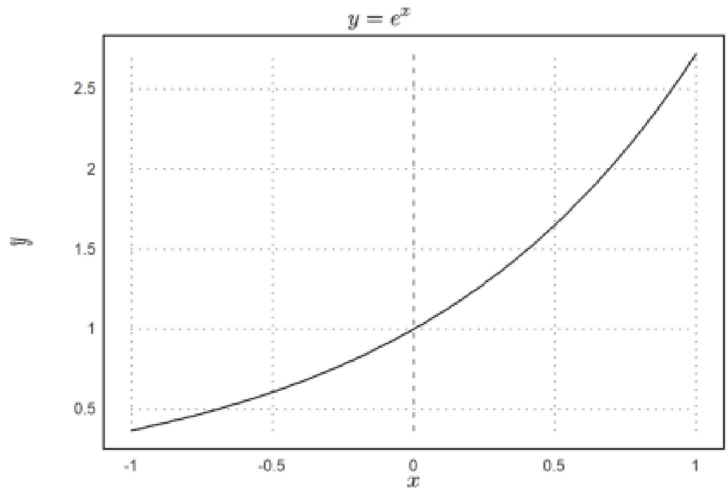


Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

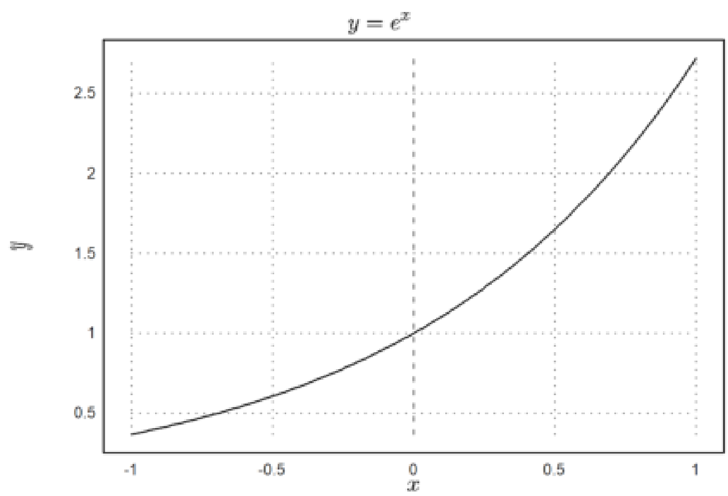
```
>plot2d("exp(x)",-1,1):
```



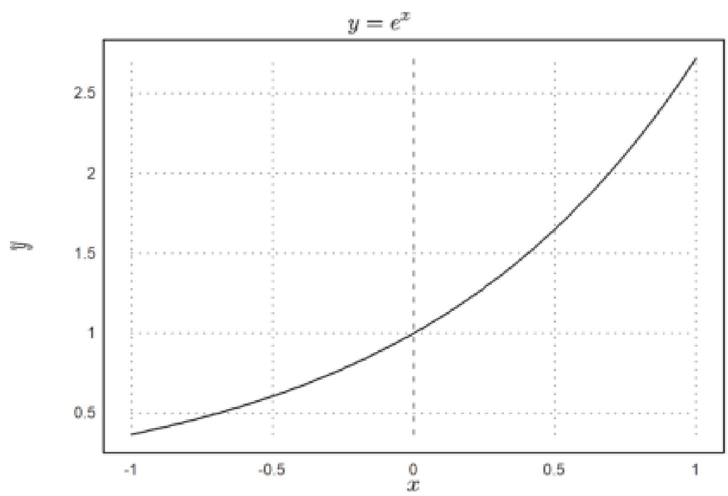
```
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")): // title above the plot
```



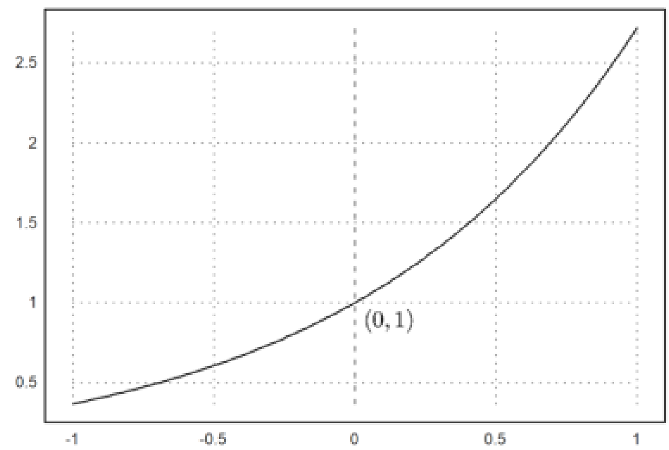
```
>xlabel(latex("x")): // "x" for x-axis
```



```
>ylabel(latex("y"),>vertical): // vertical "y" for y-axis
```

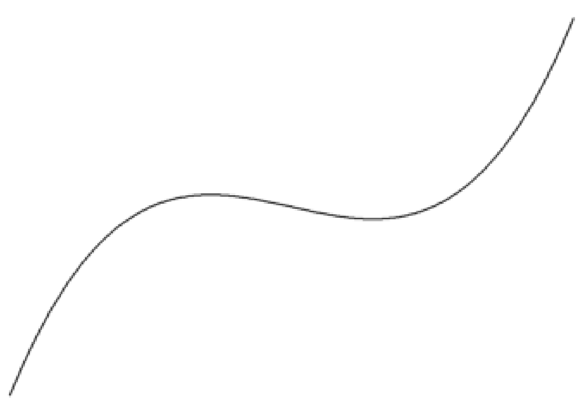



```
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```

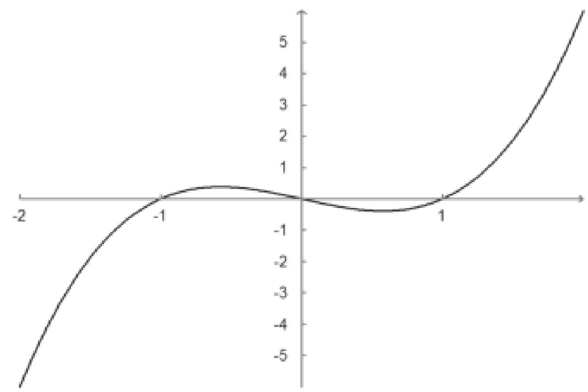


Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame):
```



```
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

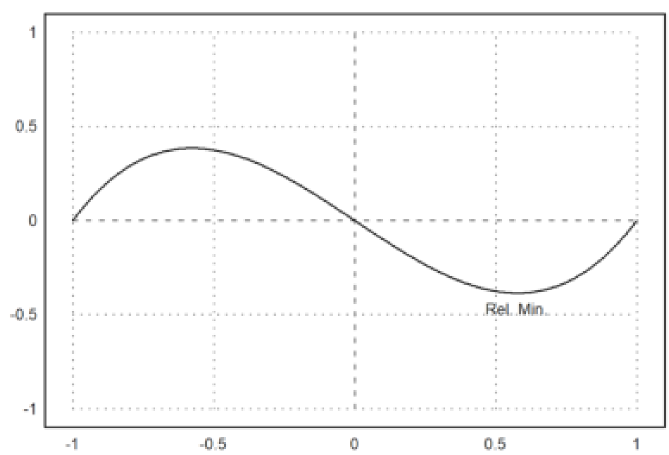


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

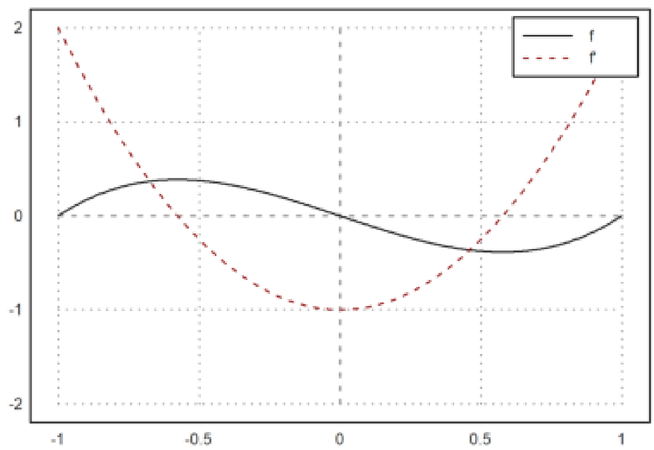
```
                              3
                             x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

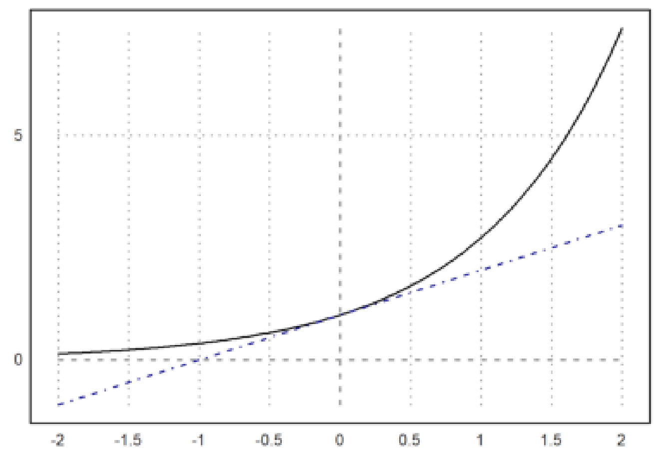


Ada juga kotak teks.

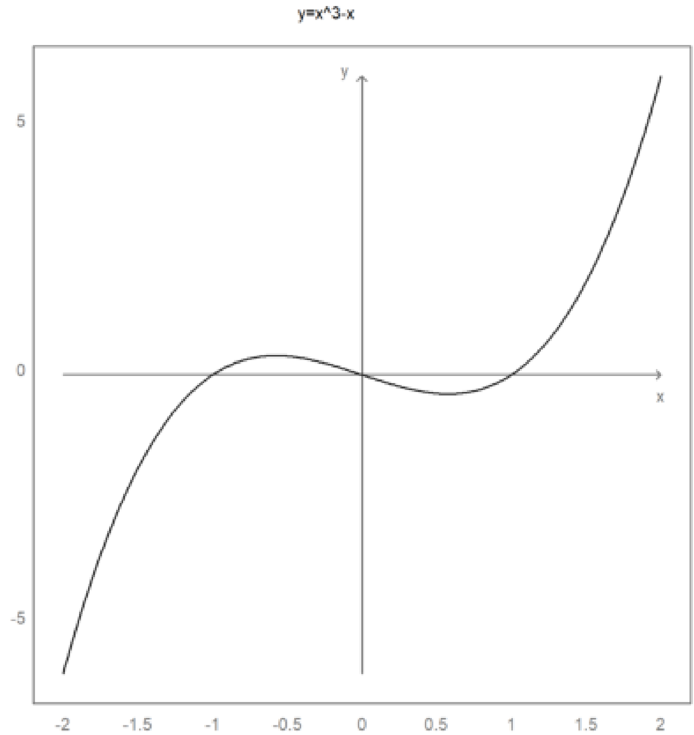
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```




```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```



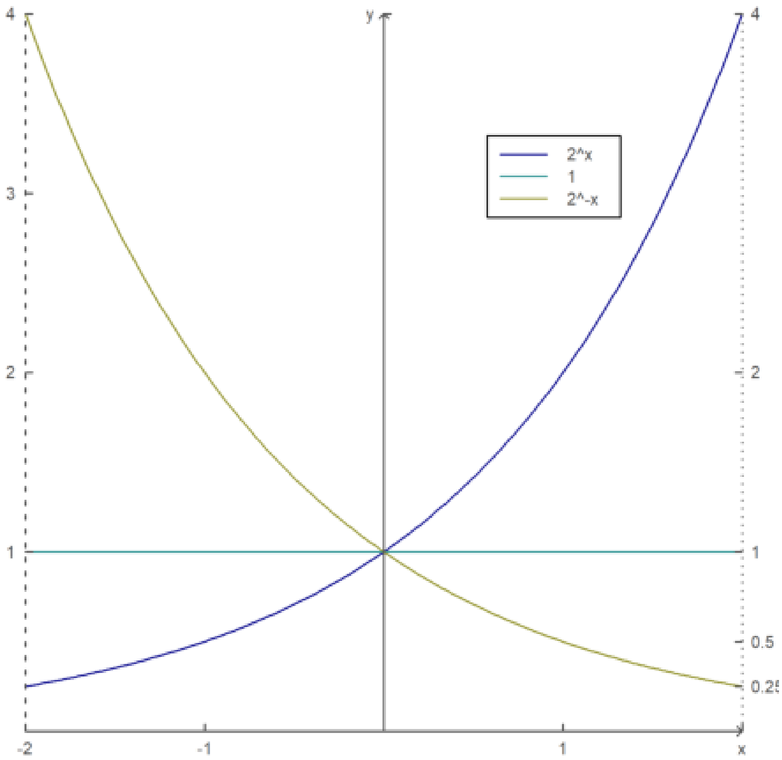
```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



Untuk kontrol yang lebih baik, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

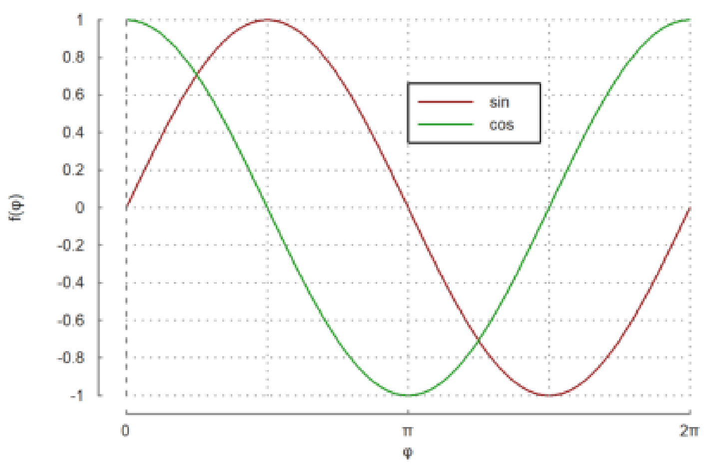
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi memerlukan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu berada di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```



Jika x dan y adalah vektor data, maka data tersebut akan digunakan sebagai koordinat x dan y pada suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Alternatifnya, >persegi dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.

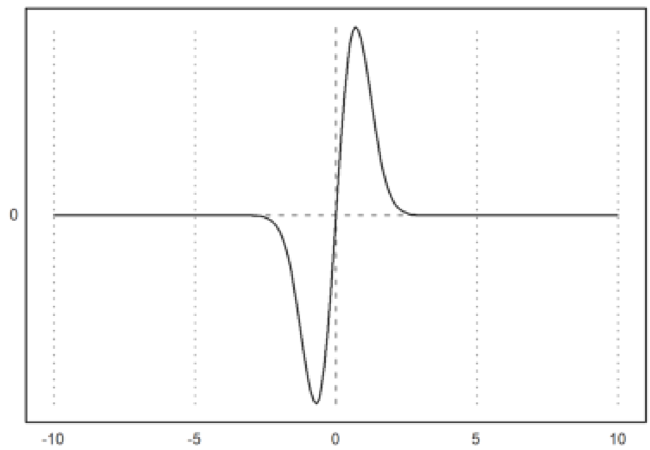
Merencanakan ekspresi hanyalah singkatan dari plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

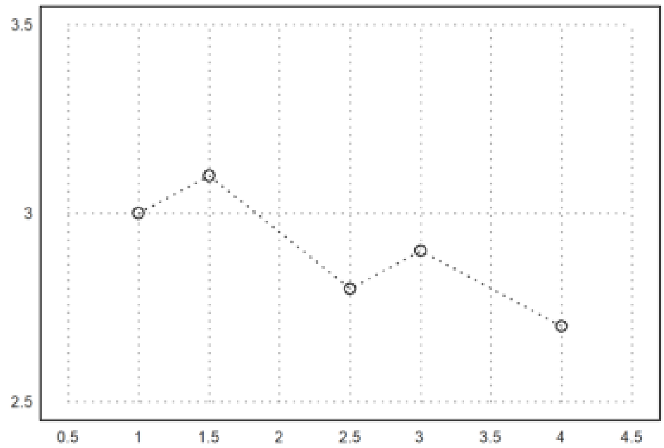


Data juga dapat diplot sebagai poin. Gunakan points=true untuk ini. Plotnya berfungsi seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya saja.

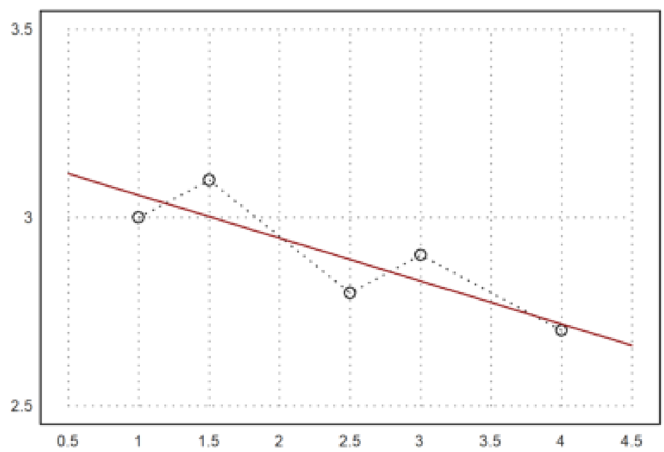
- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "< >", "o", "..", "", "|".

Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >titik. Jika warna merupakan vektor warna, masing-masing titik mendapat warna berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna diterapkan pada baris matriks. Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```



```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```



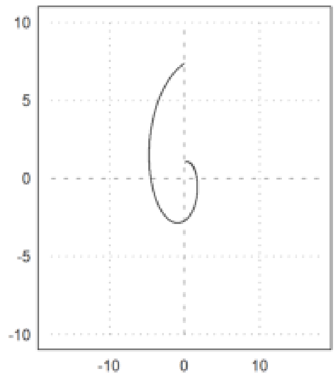
Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

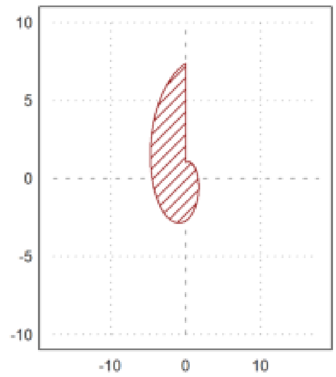
Plot data sebenarnya berbentuk poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- Fillcolor : Lihat di atas untuk mengetahui warna yang tersedia.

Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional, mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default.

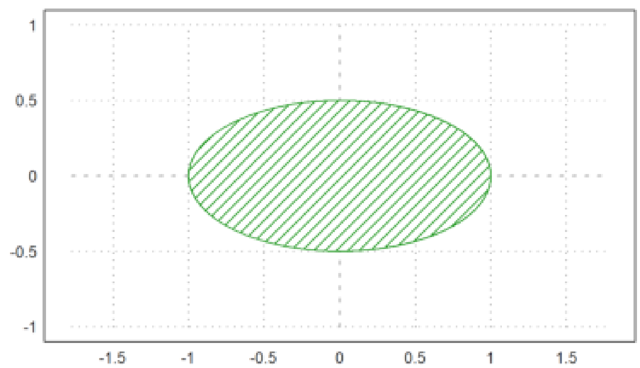
```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```



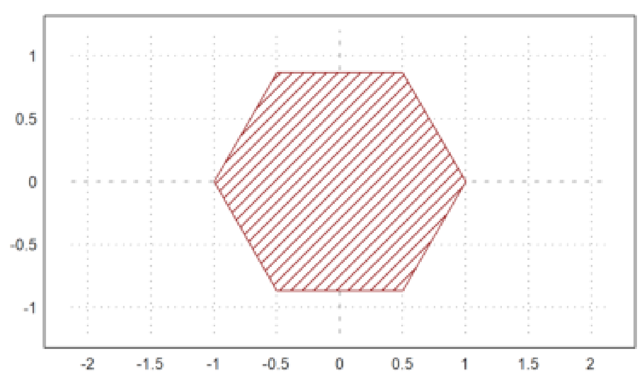


Dalam contoh berikut kita memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

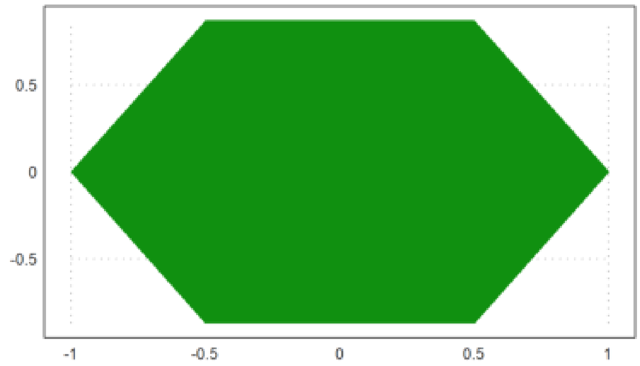
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```




```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

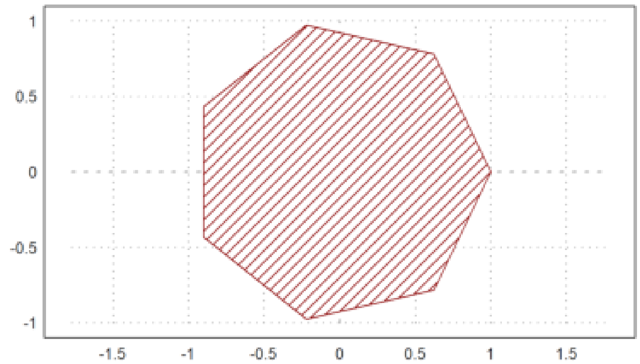


```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



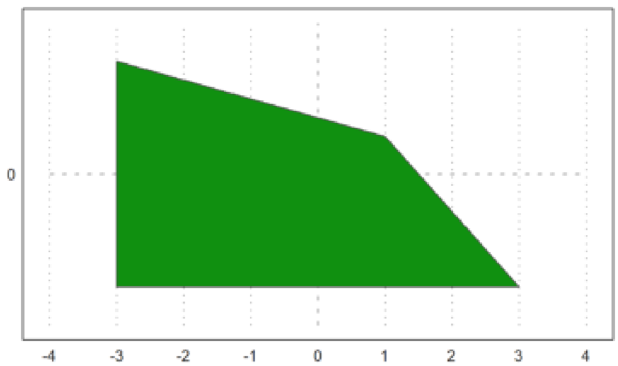
Contoh lainnya adalah septagon yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

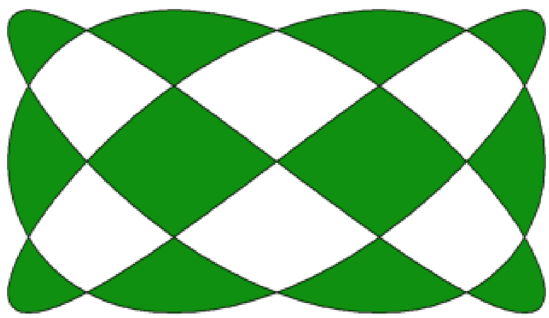


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan pembuatan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki nilai vektor x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Plotnya bisa diisi. Dalam hal ini ini memberikan hasil yang bagus karena aturan belitan, yang digunakan untuk isi.

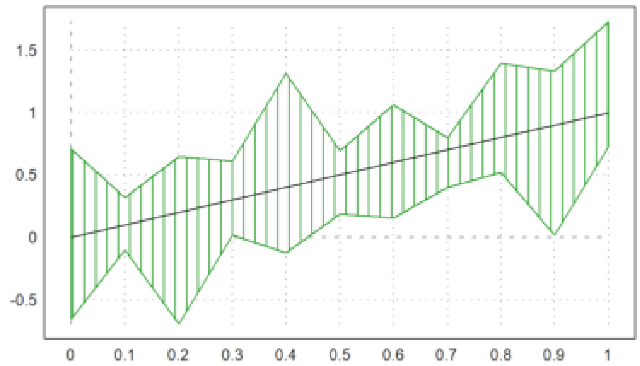
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi.

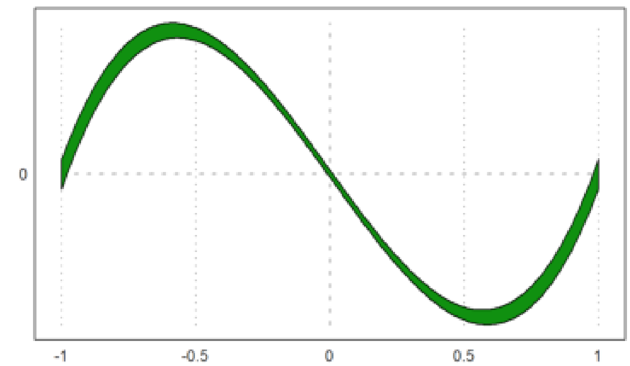
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



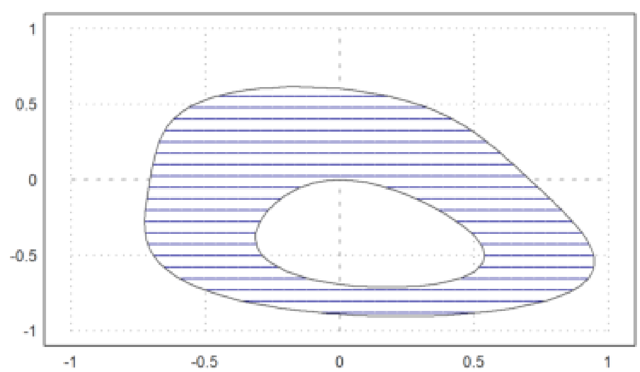
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang. Gaya isiannya sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

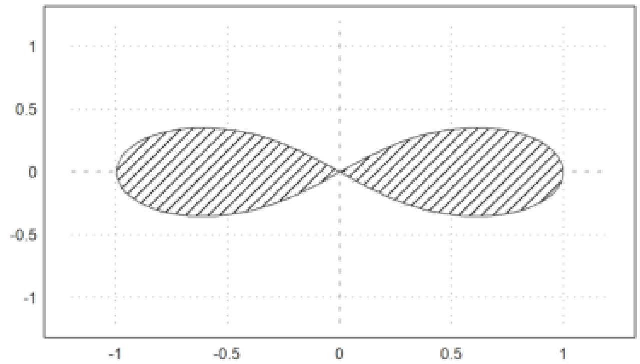
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



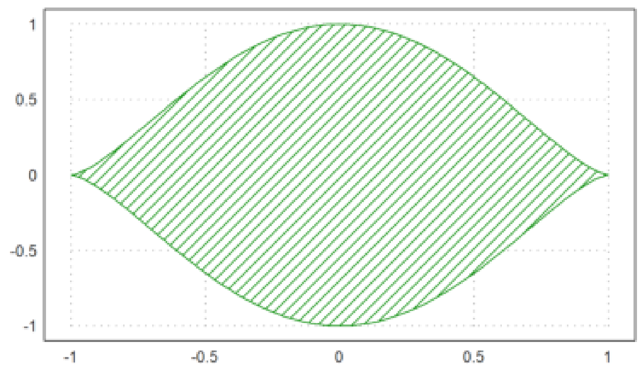
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```



Grafik Fungsi Parametrik

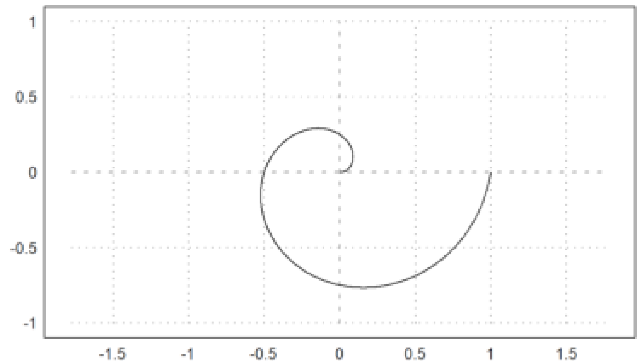
Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik suatu fungsi.

Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

lateks: \gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))

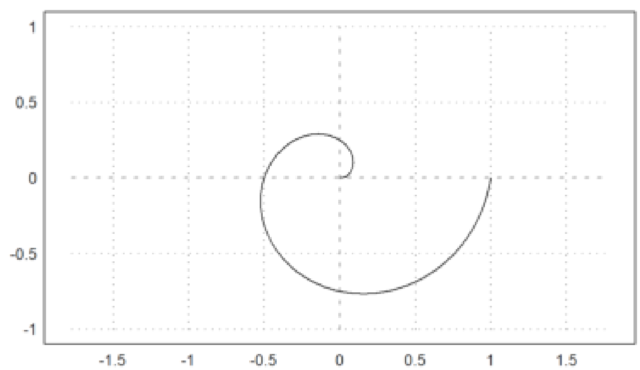
Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptive() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptive() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

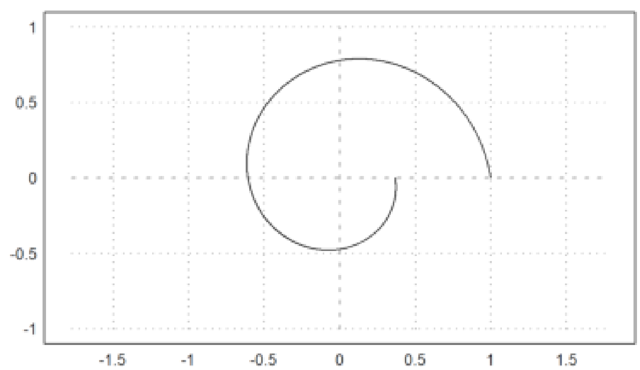


Sebagai alternatif, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```




```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



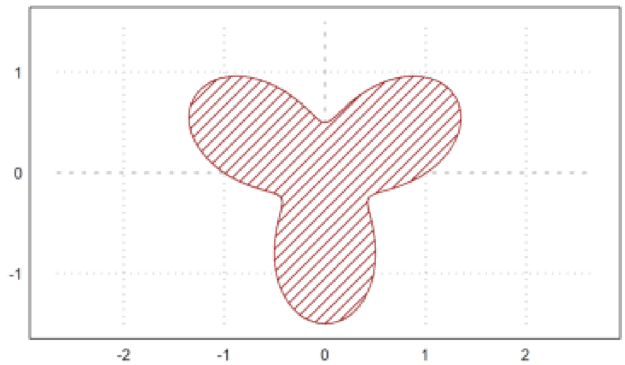
Pada contoh berikutnya, kita memplot kurvanya

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



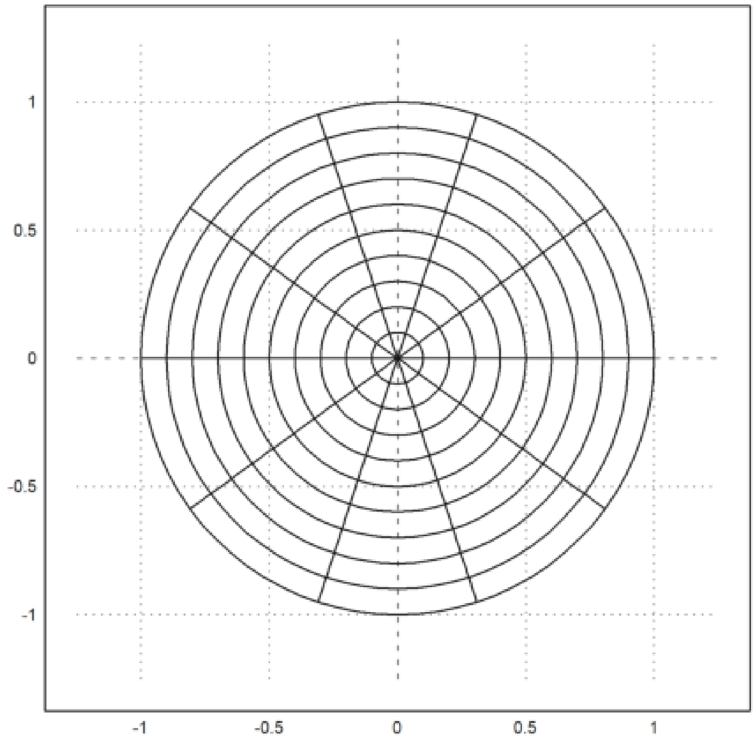
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Serangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

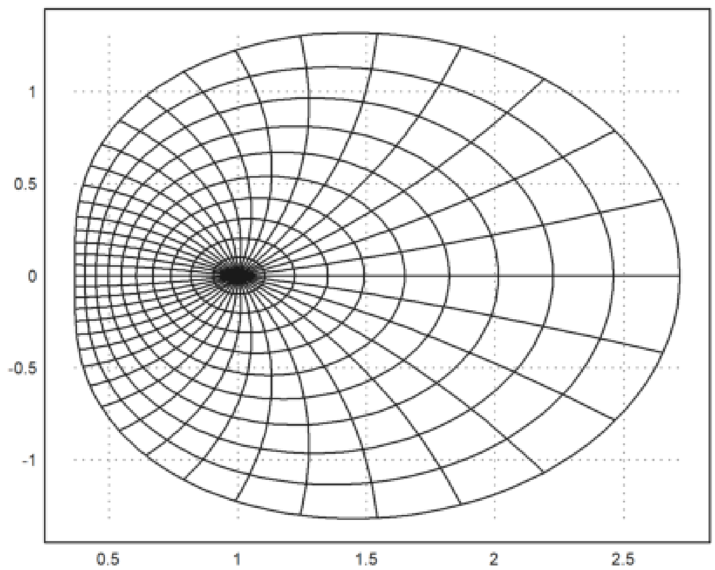
Matriks bilangan kompleks secara otomatis akan diplot sebagai kisi-kisi pada bidang kompleks.

Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

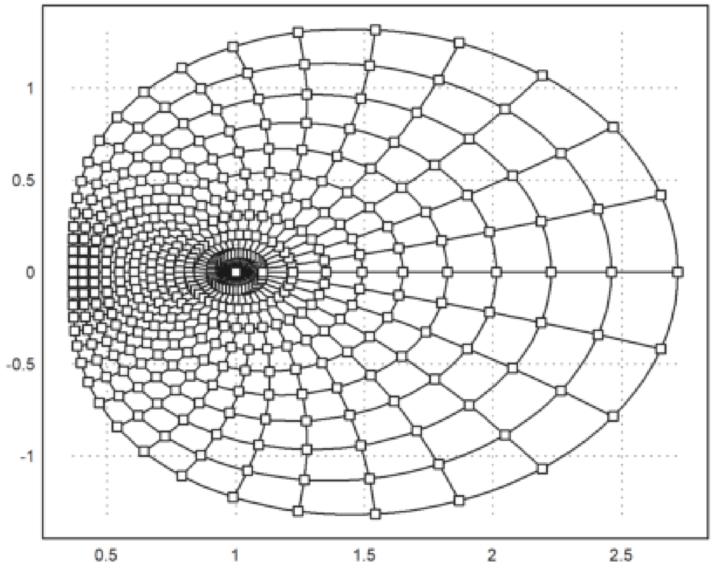
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```




```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```




```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

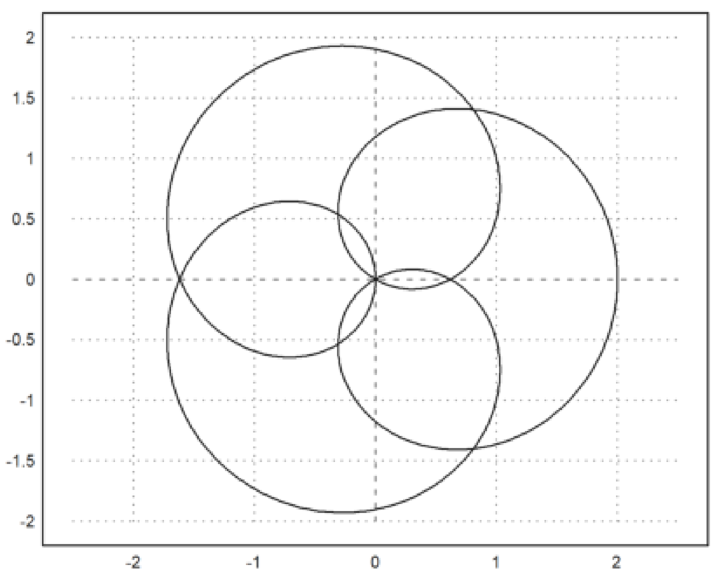


Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



Plot Statistik

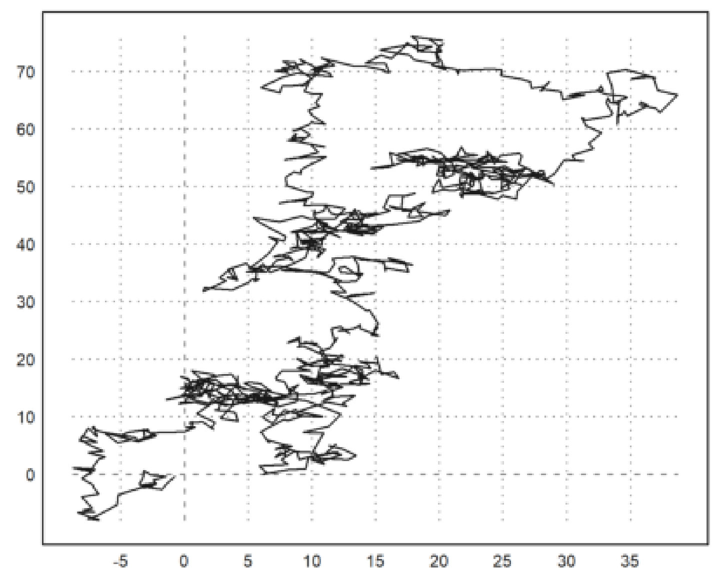
Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

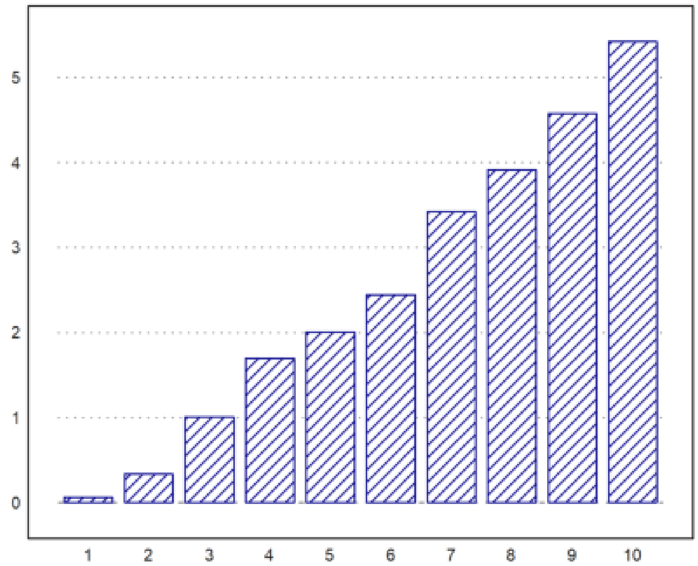
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

Penggunaan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

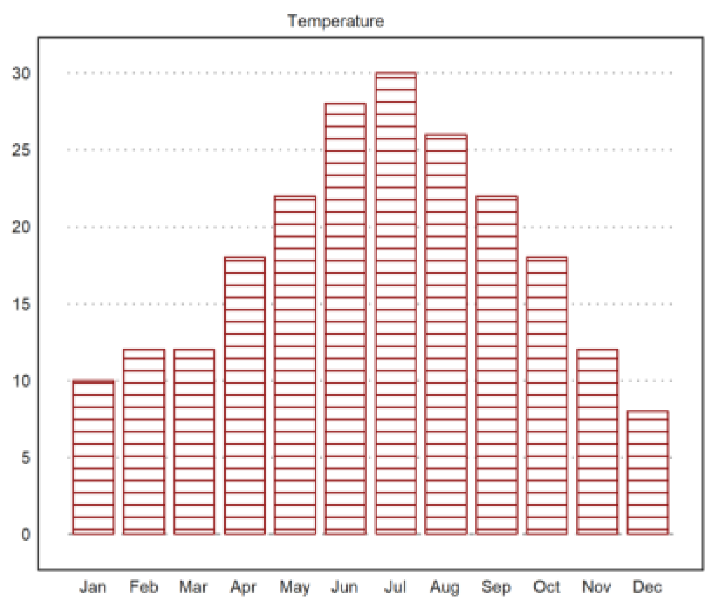


```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

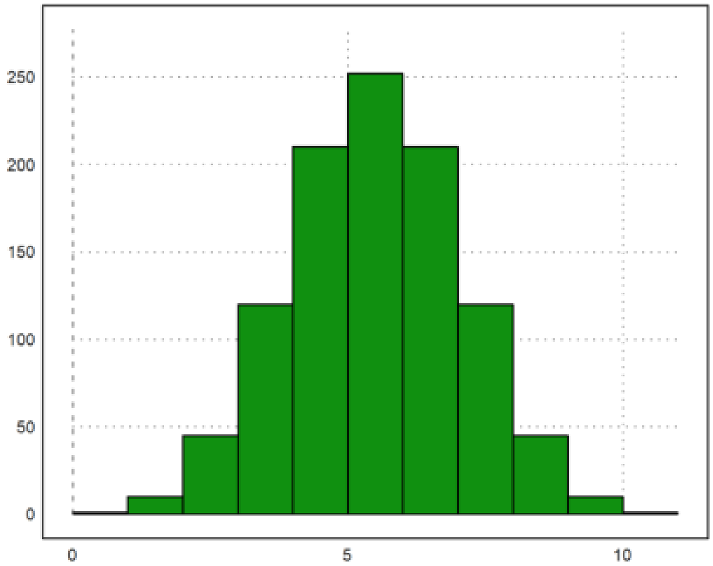


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

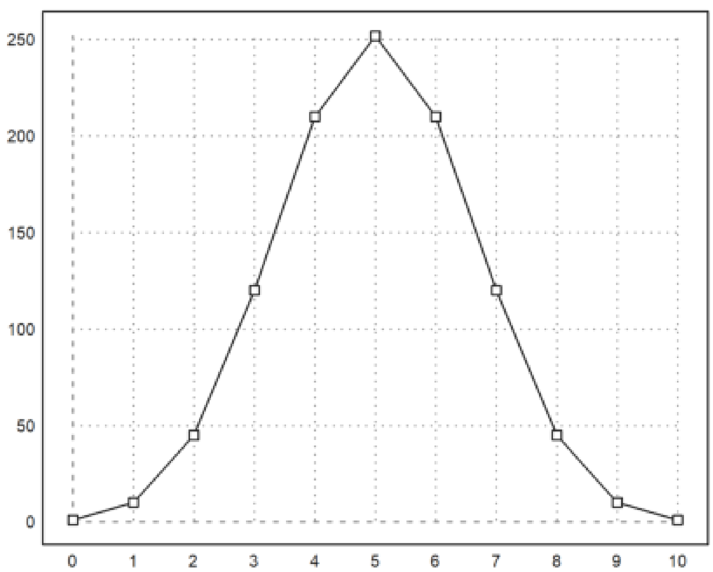
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



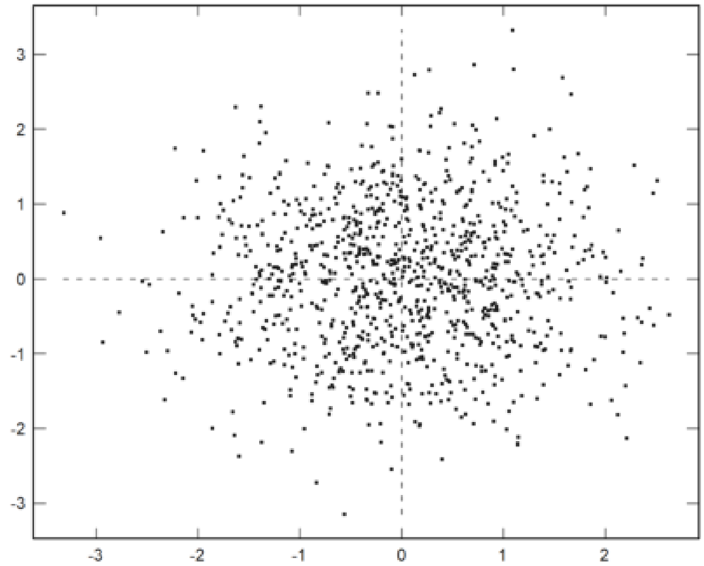
```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



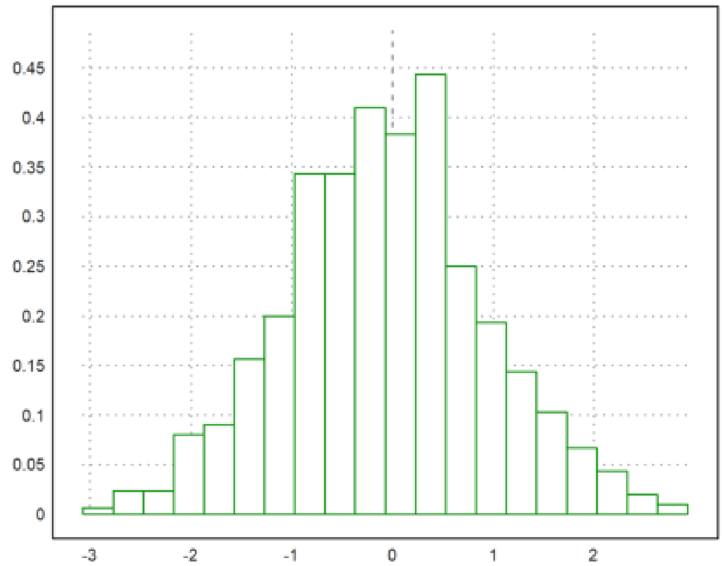

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



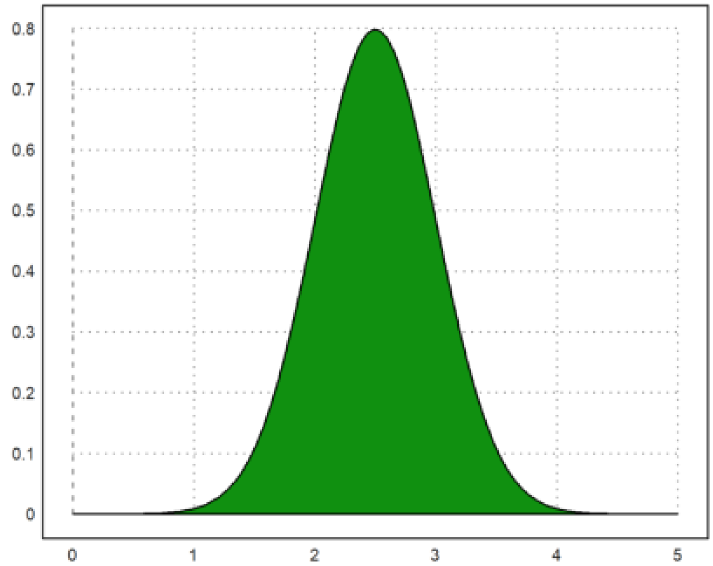

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```




```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

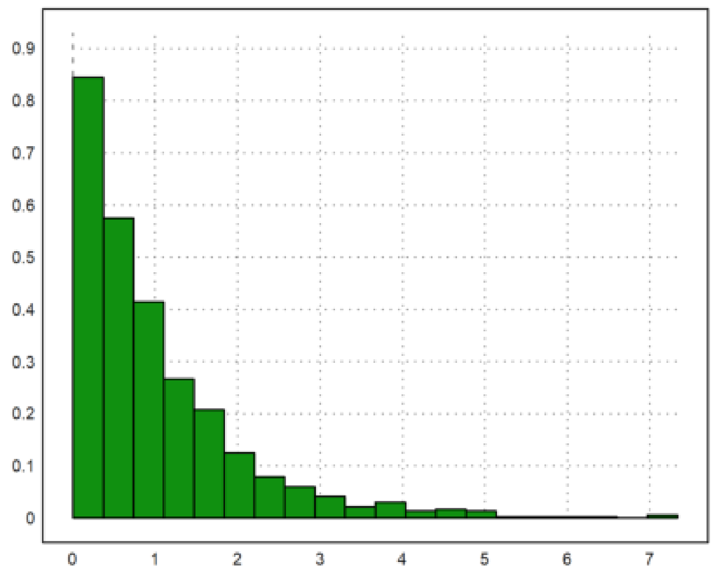



```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



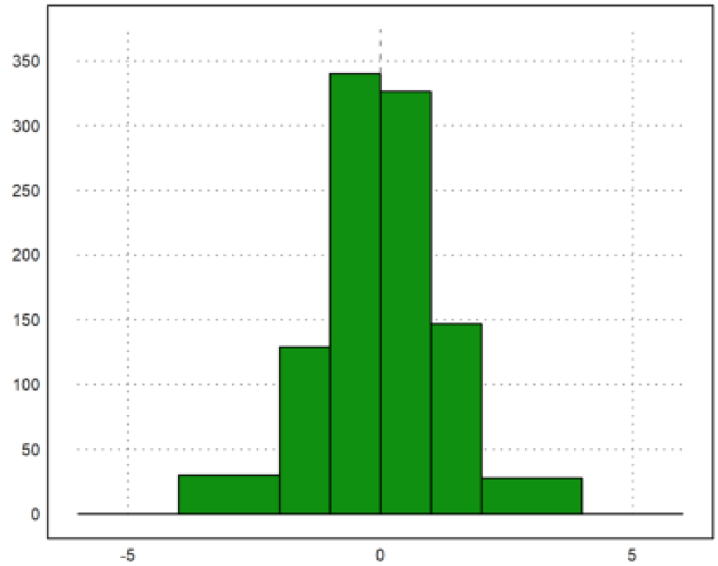
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



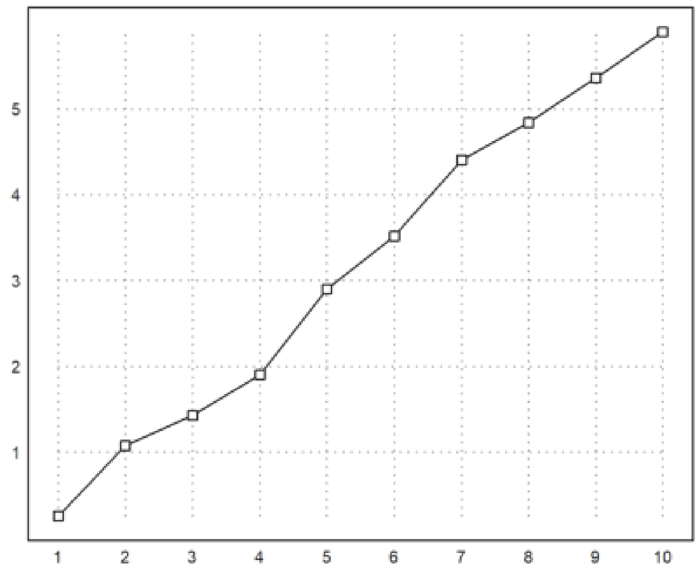
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

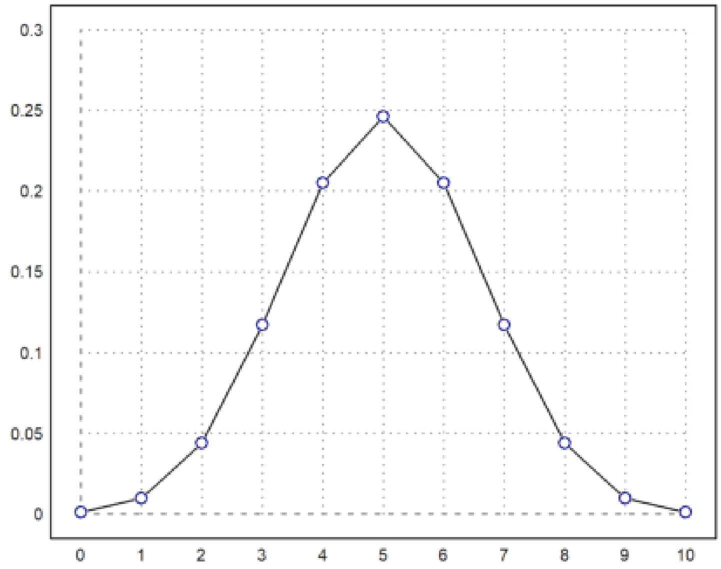


Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```



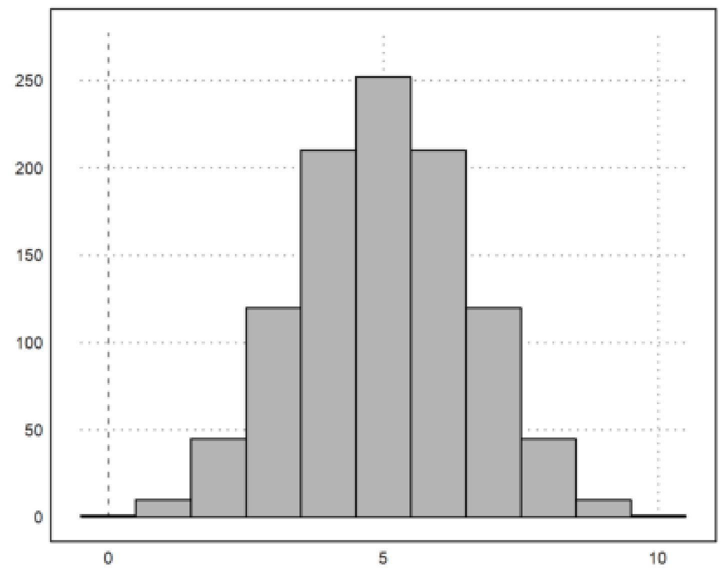

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batangnya akan memanjang dari x[i] hingga x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x berukuran sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

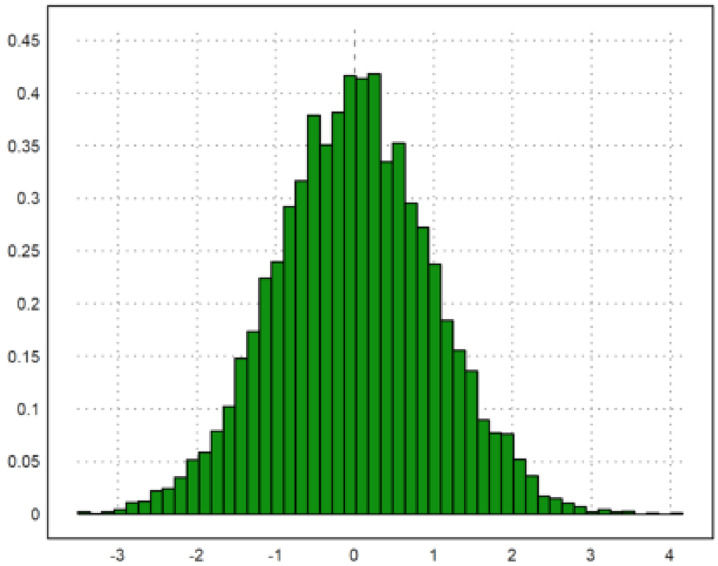
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

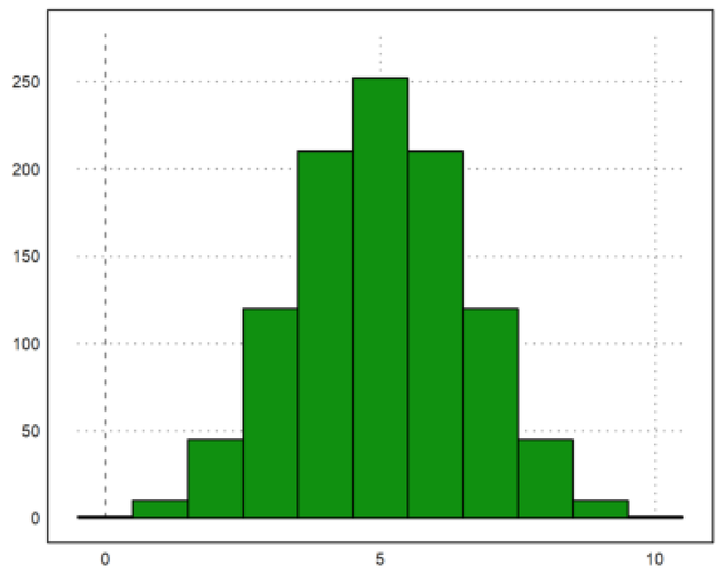


Data untuk plot batang (batang=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

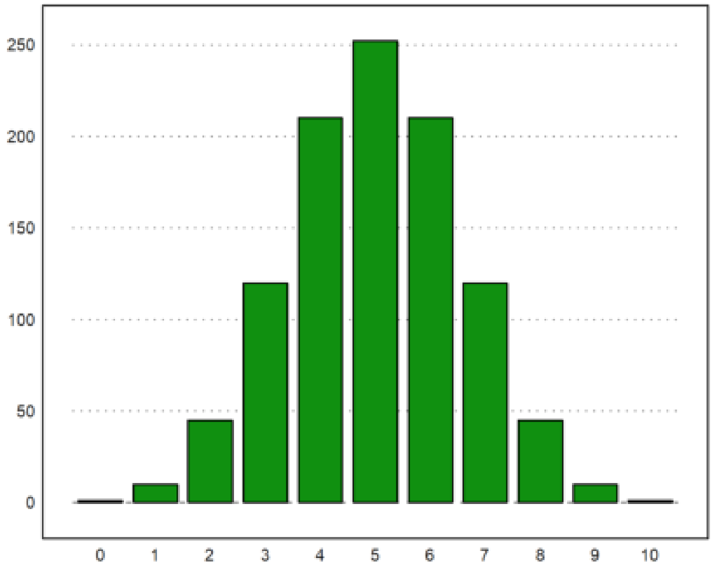
```
> plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



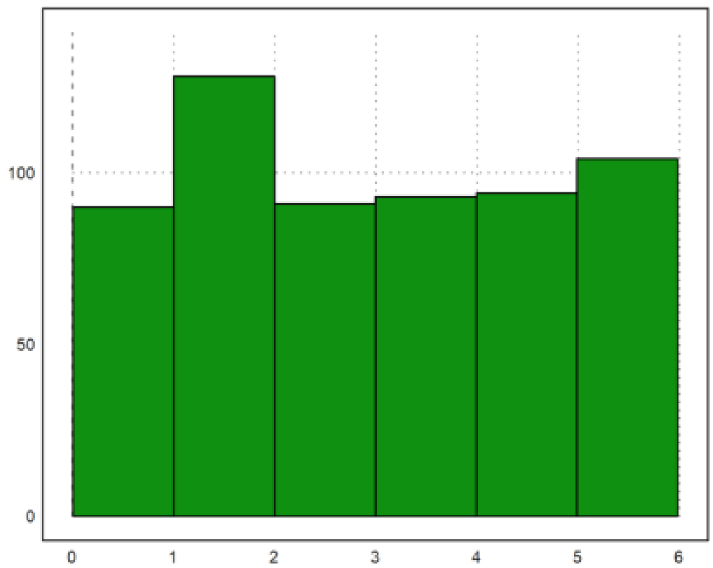

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```




```
>columnsplot(m,k):
```

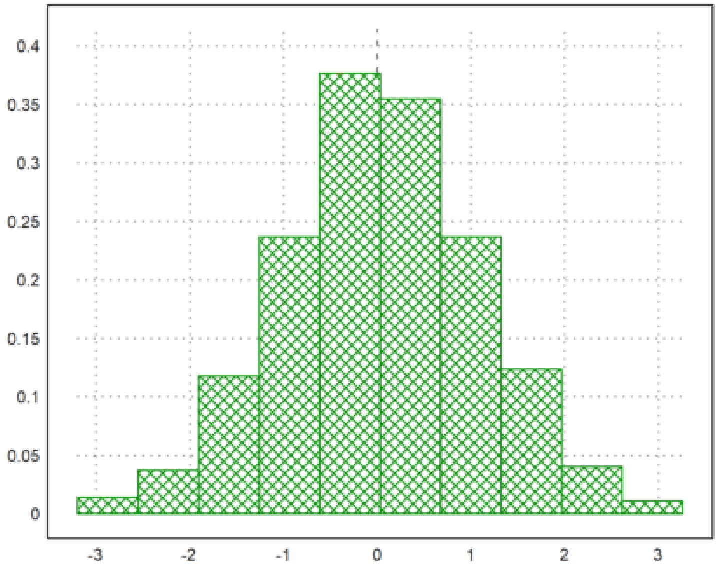



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



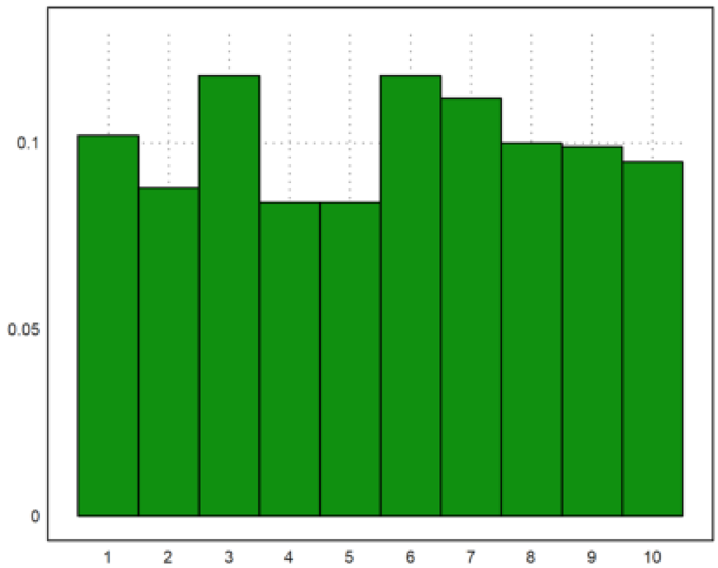
Untuk distribusi, terdapat parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



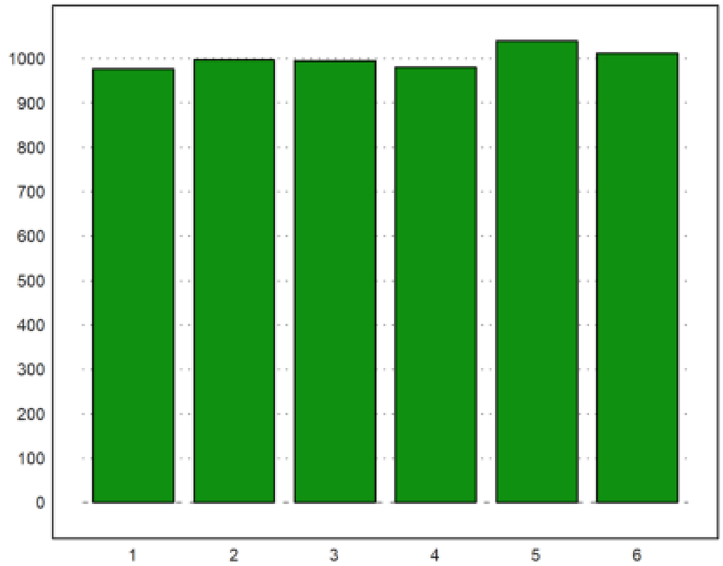
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

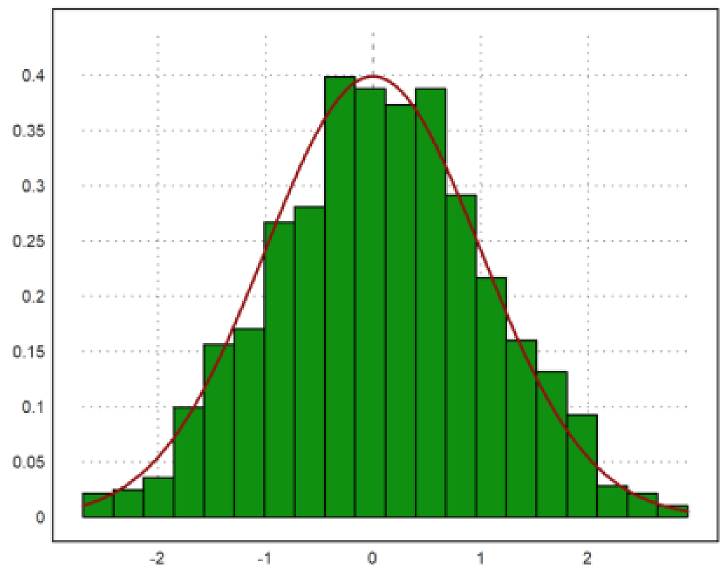


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

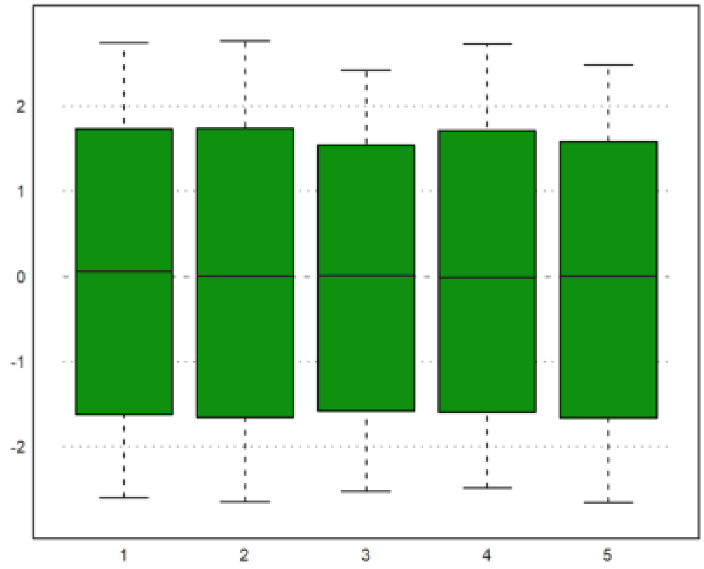



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Plot kotak menunjukkan kuartil distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisinya, outlier dalam plot kotak adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan penyelesaian garis level f(x,y)=level, dengan "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level = "auto", akan ada garis level nc, yang akan tersebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau alternatifnya, xv dapat berupa matriks nilai.

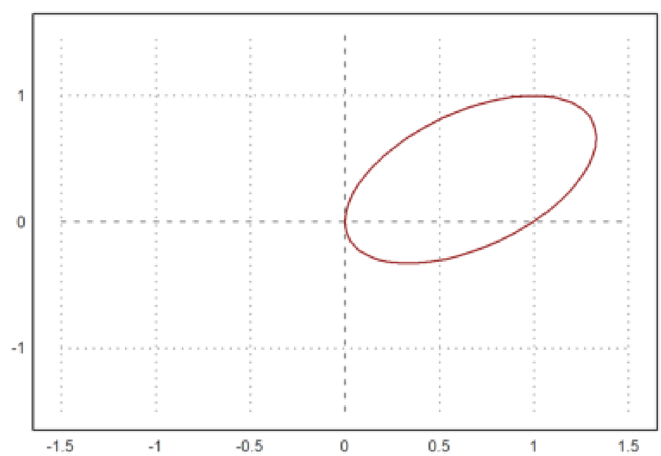
Euler dapat menandai garis level

lateks: f(x,y) = c

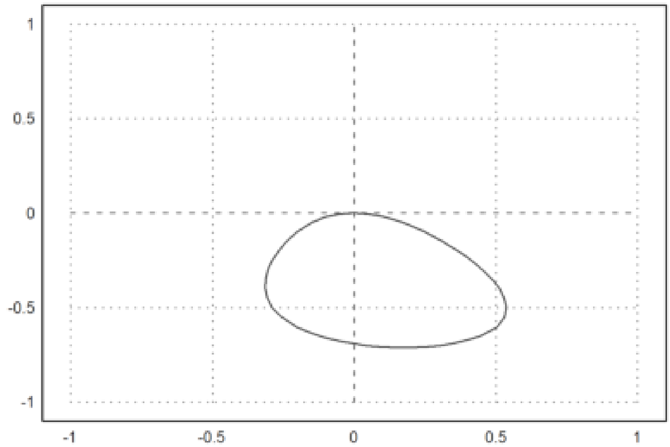
dari fungsi apa pun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter c adalah level=c, dimana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

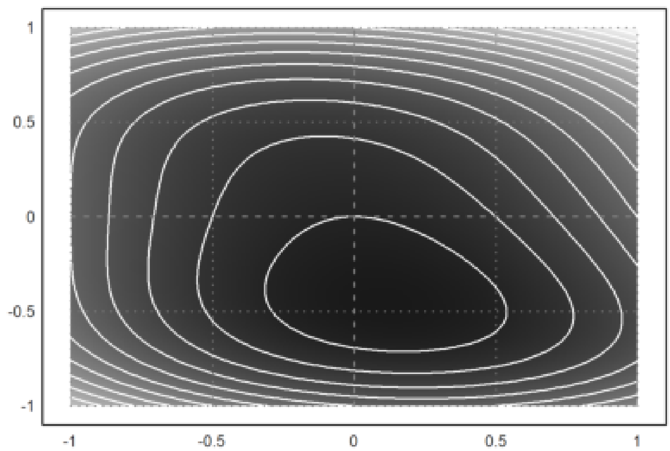
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



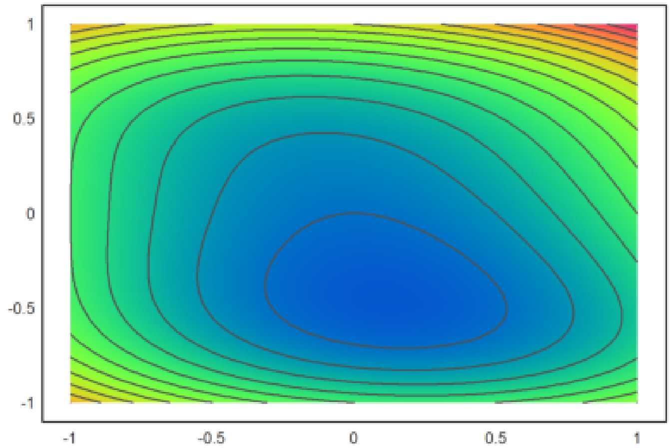
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

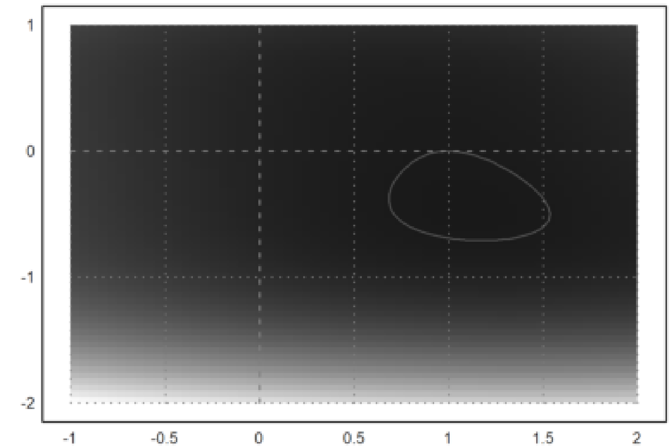



```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

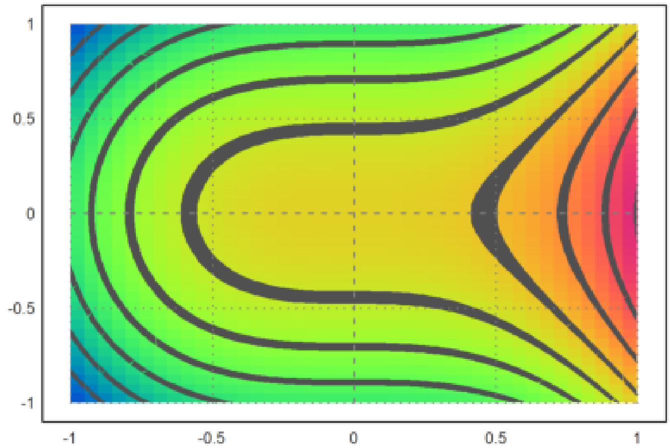


Ini juga berfungsi untuk plot data. Namun Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

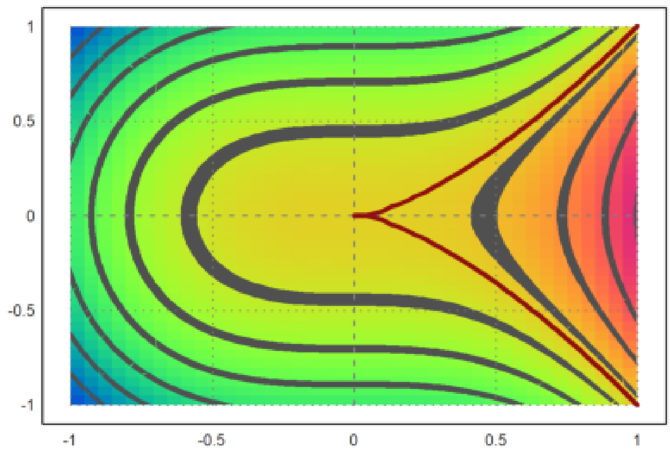
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



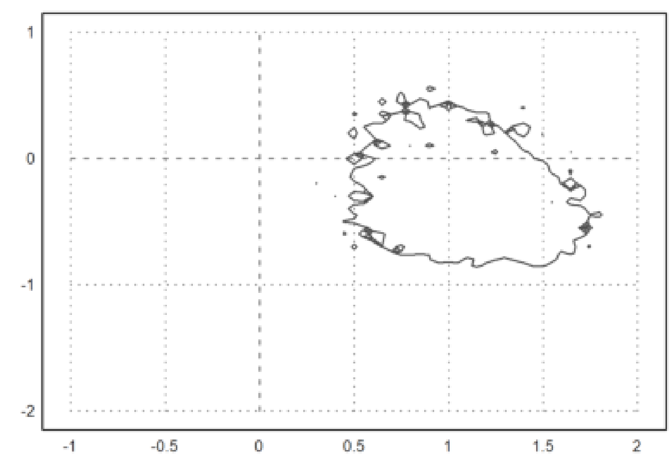

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



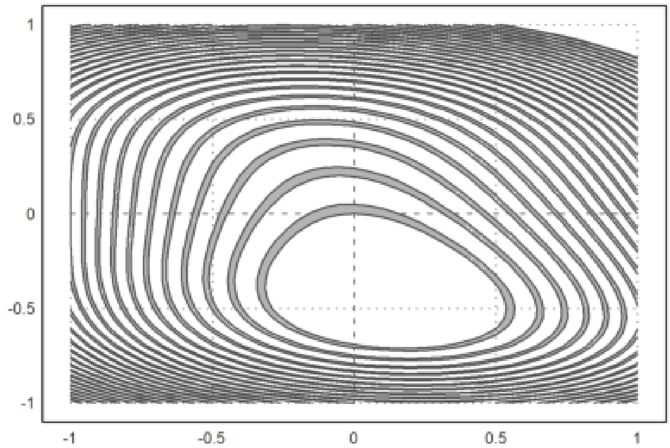

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



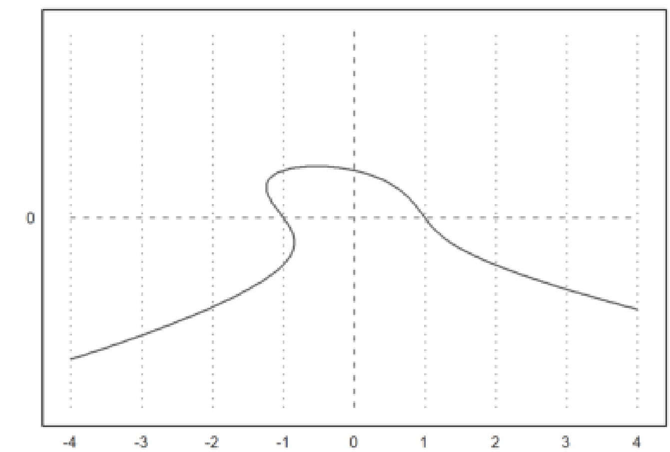

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



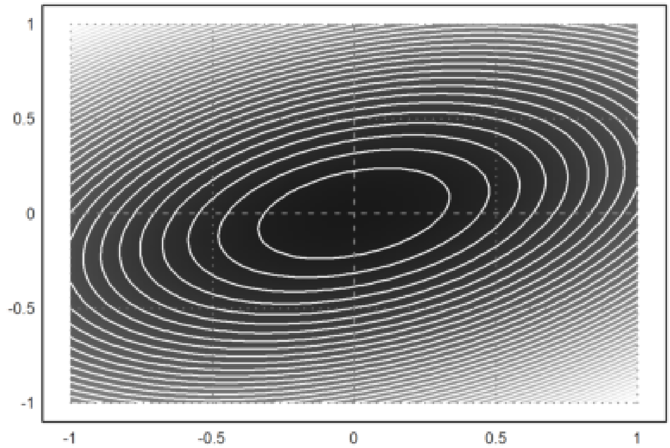
```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```



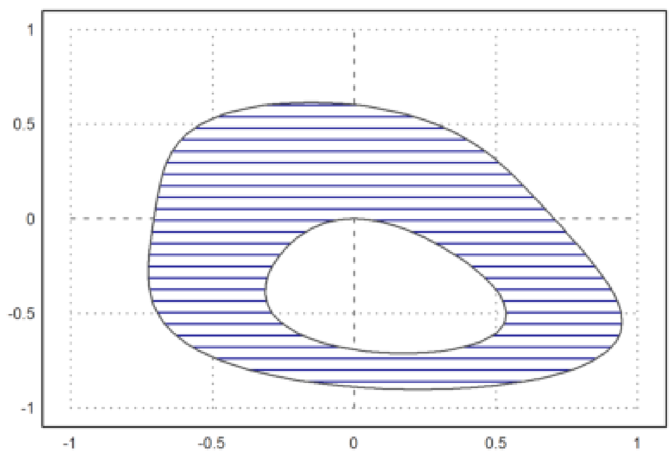
Dimungkinkan juga untuk mengisi set

$$a \leq f(x,y) \leq b$$

dengan rentang level.

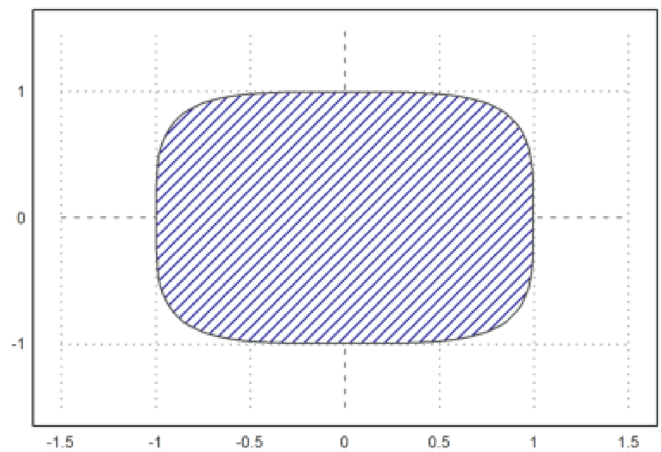
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

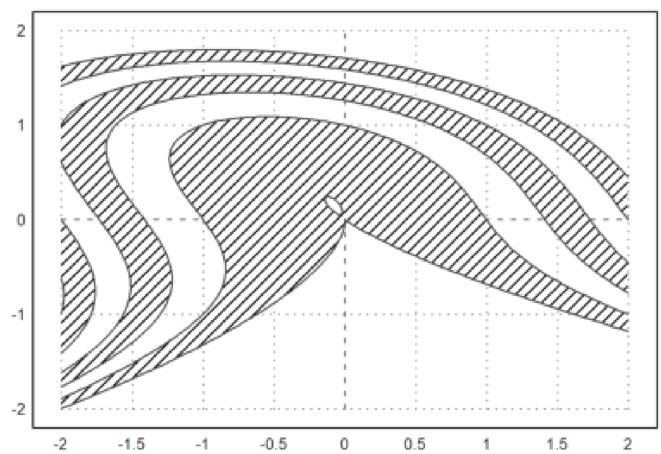


Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Maka level harus berupa matriks interval level 2xn, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua berisi akhir setiap interval. Alternatifnya, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

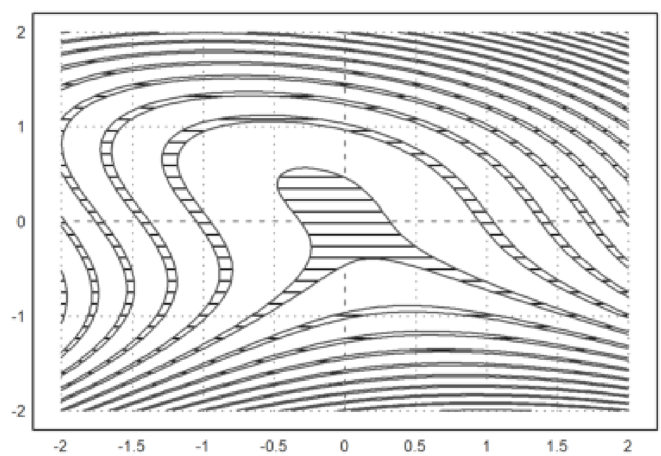
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



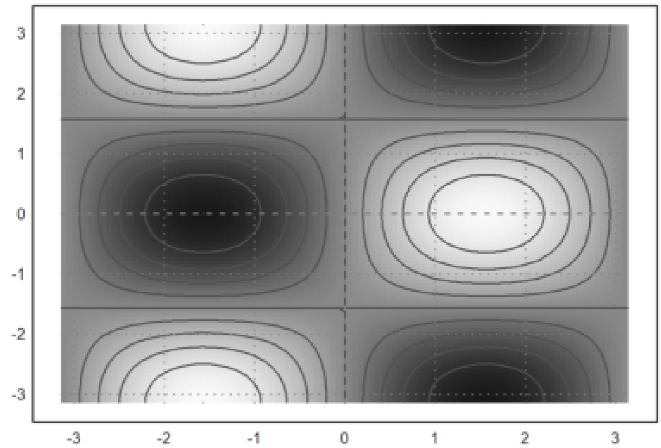

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```



```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

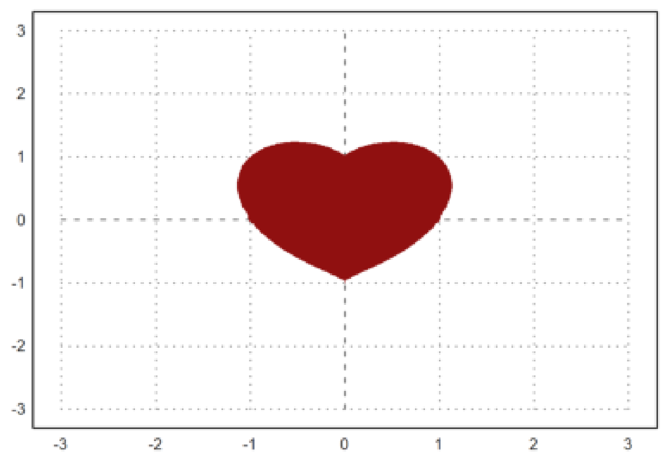


Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x,y) \leq b.$$

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

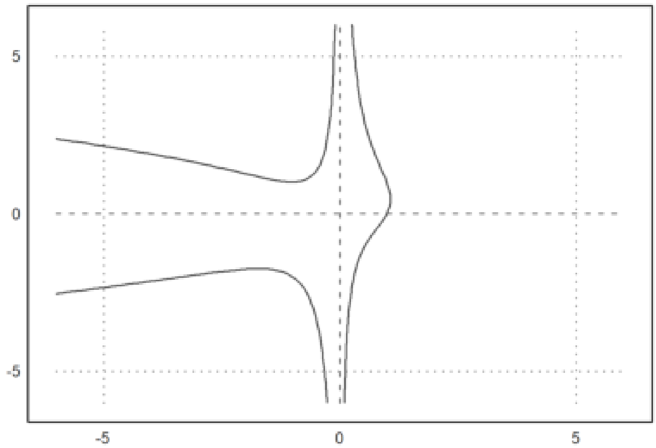
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```



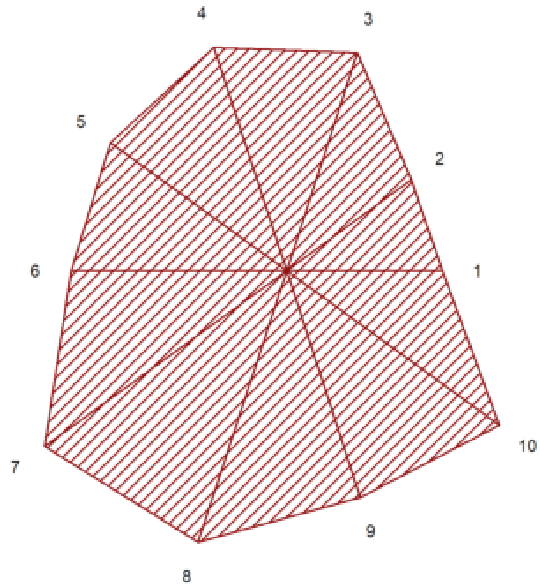

```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada tanda centang kotak atau sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot-nya.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu dilakukan jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang plot2d tidak bisa lakukan, tapi hampir.

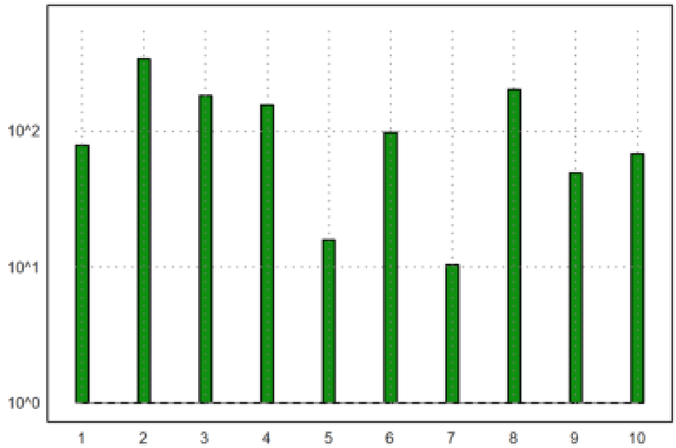
Dalam fungsi berikut, kita membuat plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) menyetel jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot muncul di jendela grafis. Jika tidak, pengundian ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

Tekan tombol apa saja untuk menghentikan animasi ini.

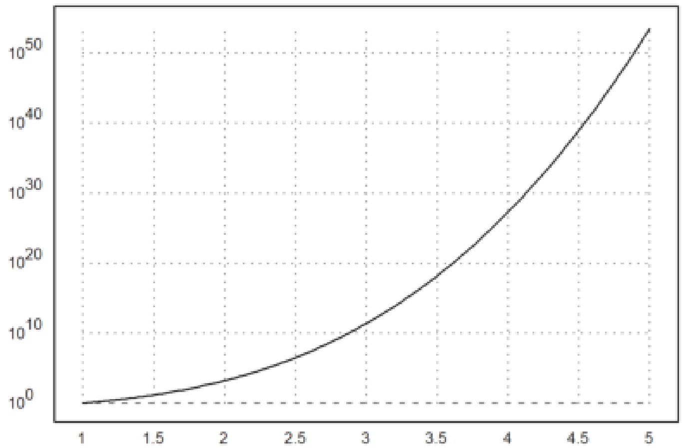
```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

Plot Logaritmik

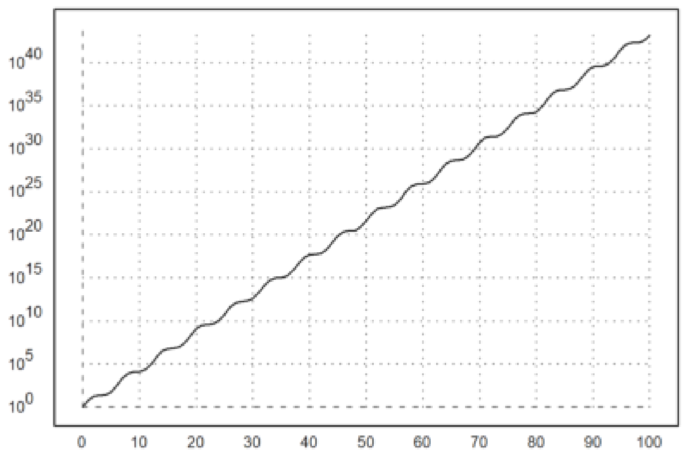
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot menggunakan skala logaritma di y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma di x dan y dengan logplot=2, atau di x dengan logplot=3.

```
 - logplot=1: y-logaritma
 - logplot=2: x-y-logaritma
 - logplot=3: x-logaritma
```

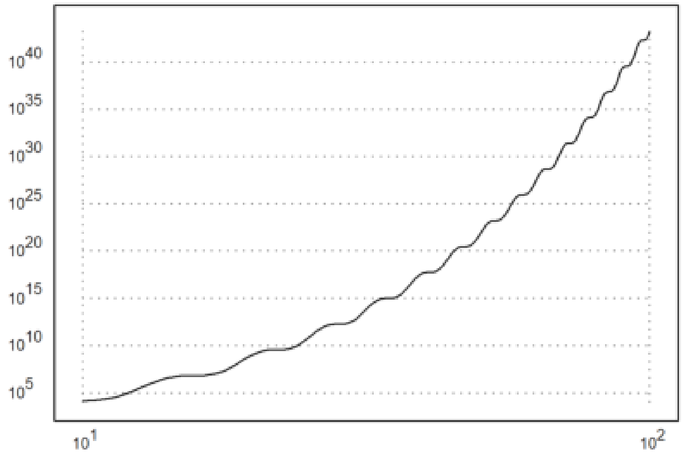
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



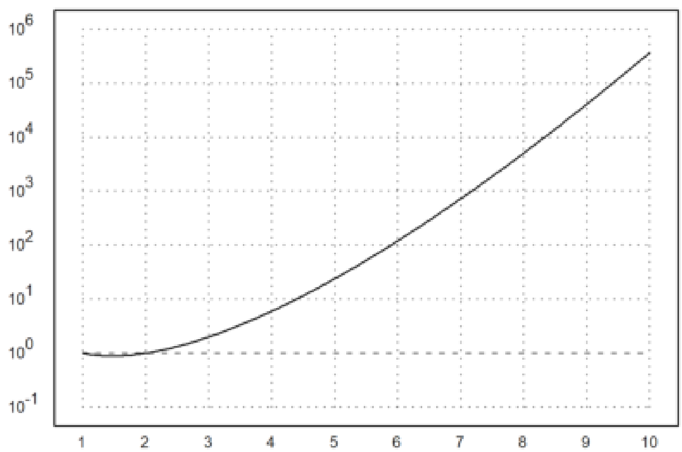

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



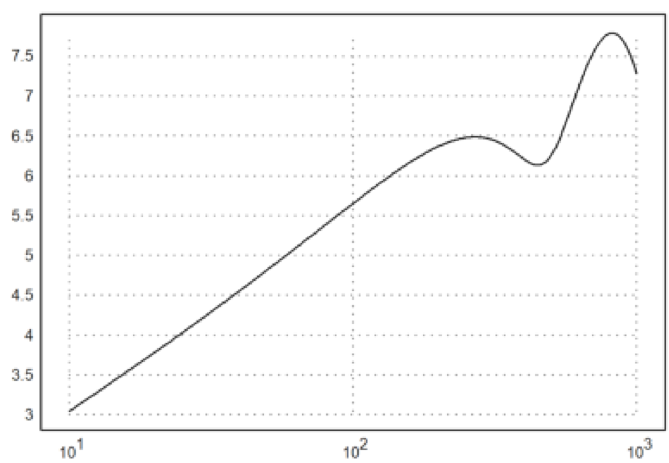

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```




```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

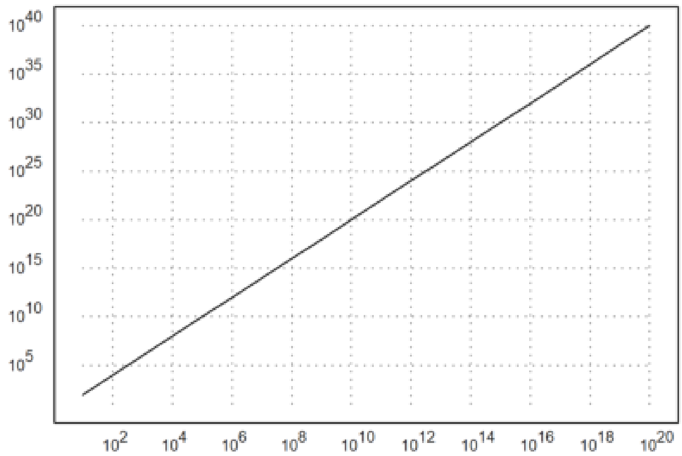



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```

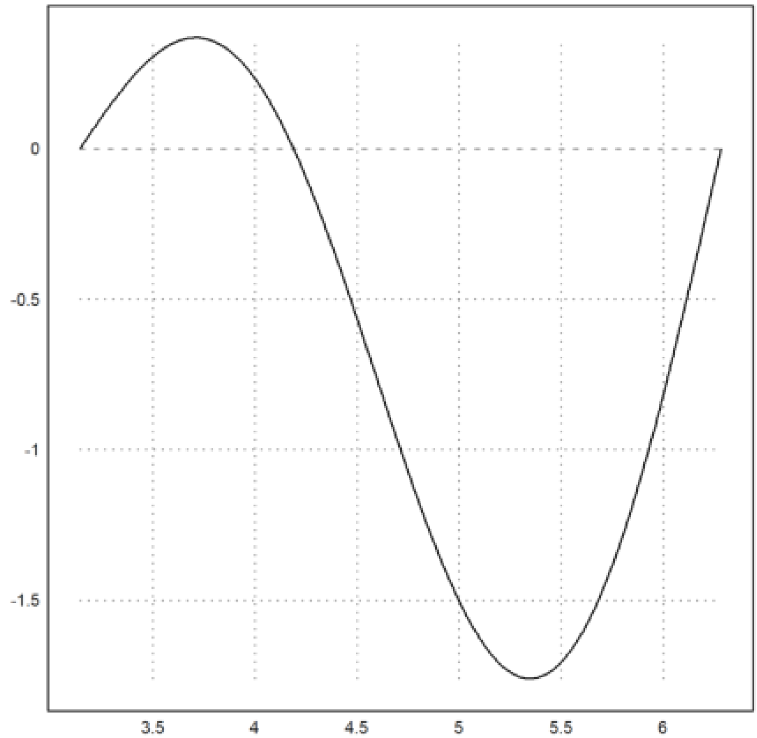


Contoh-contoh soal

1) Buatlah plot2d dari fungsi berikut dari interval pi sampai 2pi

$$f(x) = sinx + sin2x$$

```
> plot2d("sin(x)+sin(2x)",pi,2*pi):
```

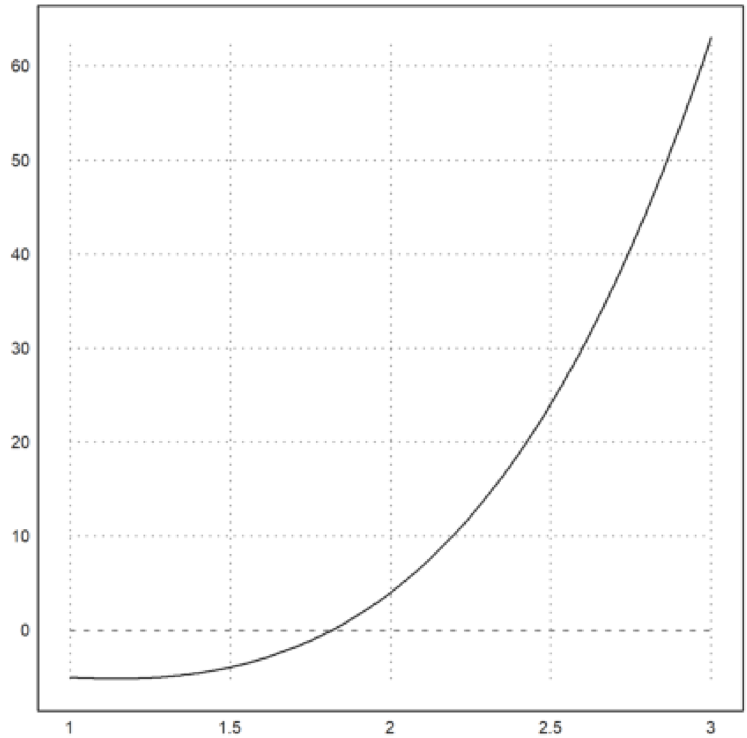


2) Buatlah plot2d dari fungsi

$$y(x,a) = x^4 - 2a \cdot x$$

dengan nilai parameternya adalah 3, dan interval x nya dari 1 sampai 3

```
>function f(x,a):= x^4-2*a*x;
>a=3; plot2d("f",1,3;a):
```

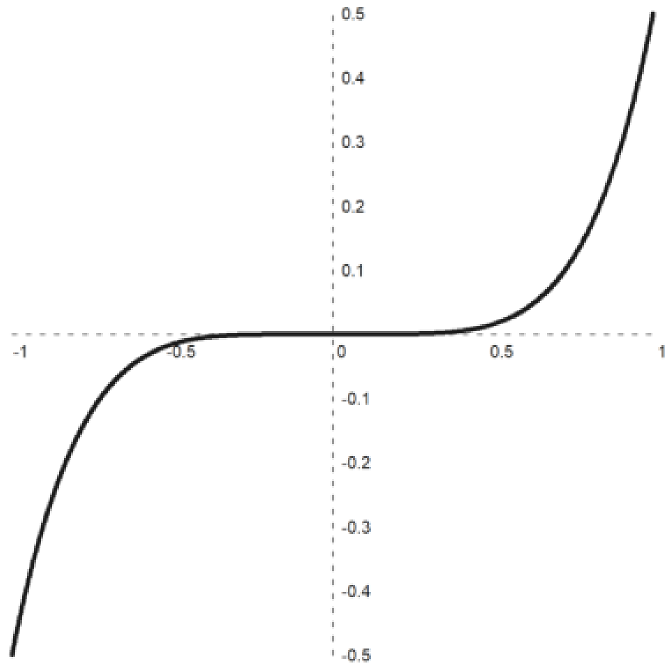


3)Buatlah plot 2d dari fungsi

$$y = \frac{1}{2}ax^2 \cdot \frac{x^3}{a}$$

dengan a=2 dan interval dari x=-1 samapai x=1 . Kemudian, buatlah plot tersebut dalam grid 3 dan ketebalan 3!

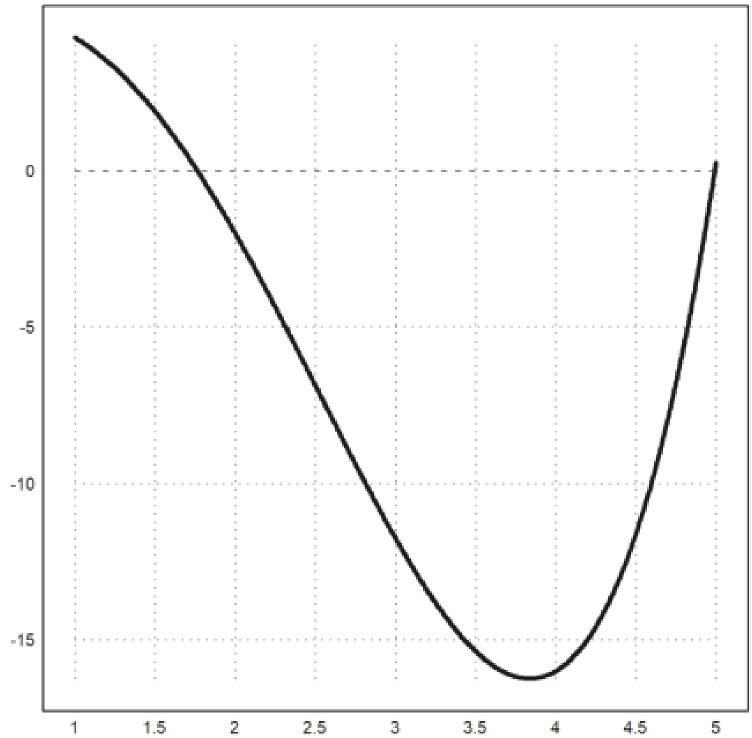
```
>a:=2; plot2d("1/2*a*x^2*x^3/a",-1,1,grid=3,thickness=3):
```



4) selidikilah dimanakah fungsi f(x) berikut naik dan turun, dengan parameter 1 sampai 5

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

```
>aspect(); plot2d("(1/4)*x^4-x^3-2*x^2+3*x+4",1,5,grid=2,thickness=3):
```

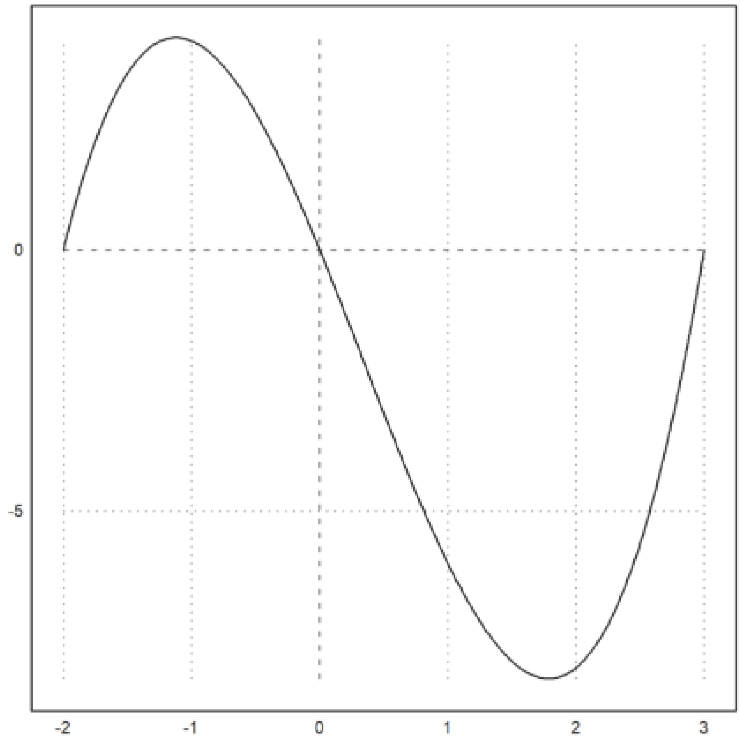


Contoh-contoh soal

1) Buatlah plot2d dari fungsi berikut ini dengan parametetr -2 sampai -3

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

```
>plot2d("x^3-x^2-6*x",-2,3):
```



Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters
x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used for
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn
in the color using the given fill style. If outline is true, it
will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of

f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

Kelompok 3 Matematika B 2023:
1. Aulia Agnes Luistin (23030630001)
2. Alfi Nur Azumah (23030630002)
3. Pradika Larasati(23030630003)
4. Berliana Ata Rizky Safitri (23030630005)
5. Azifah Azka Apriliana (23030630006)
6. Nanda Permatasari (23030630007)
7. Diva Nagita (23030630024)
8. Rengganis Mutiara Savana (23030630069)

Menggambar Plot 3D dengan EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```

1) Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel dalam Bentuk Ekspresi Langsung

Grafik fungsi dua variabel dalam bentuk ekspresi langsung adalah representasi visual dari hubungan matematis antara dua variabel independen yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau ekspresi matematis. Biasanya, grafik ini digunakan untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel dalam bidang dua dimensi dan tiga dimensi. Dalam konteks ini, variabel independen (x dan y) adalah variabel input, sedangkan variabel dependen (z) adalah variabel output yang dihasilkan oleh ekspresi matematis.

Rumus umum untuk menggambar grafik fungsi dua variabel dalam bentuk ekspresi langsung adalah:

$$z = f(x, y)$$

Dalam rumus ini:
- z adalah variabel dependen yang ingin kita gambar dalam grafik.
- f(x, y) adalah ekspresi matematis yang menghubungkan variabel z dengan variabel independen x dan y. Ekspresi ini dapat berupa fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi akar kuadrat, eksponensial, logaritma, trigonometri, nilai mutlak, atau jenis fungsi matematis lainnya, tergantung pada hubungan yang ingin diilustrasikan.

1. Grafik Fungsi Linear

Fungsi linear dua variabel biasanya dinyatakan dalam bentuk

$$f(x, y) = ax + by + c$$

dimana a,b, dan c adalah konstanta. Grafik fungsi linear ini adalah sebuah bidang datar, dan bentuknya akan bervariasi tergantung pada nilai a dan b.

Contoh:

$$f(x, y) = 2x + 3y + 5$$

```
>plot3d("2*x+3*y+5"):
```

$$f(x, y) = -2x - 3y - 5$$

```
>plot3d("-2*x-3*y-5"):
```

$$f(x,y) = 5x - 7y + 9$$

```
>plot3d("5*x-7*y+9"):
```

2. Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat dua variabel biasanya dinyatakan dalam bentuk

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

dimana a, b, c, d, e, dan f adalah konstanta. Grafik fungsi kuadrat ini adalah sebuah permukaan yang dapat memiliki berbagai bentuk tergantung pada nilai-nilai konstantanya.
Contoh:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy + 8x + 3y + 1$$

```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*y+8*x+3*y+1"):
```

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 7xy - 5$$

```
>plot3d("3*x^2-y^2+7*x*y-5"):
```

3. Grafik Fungsi Akar Kuadrat

Grafik fungsi akar kuadrat dua variabel

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

adalah grafik permukaan yang menggambarkan jarak titik (x, y) dari titik asal (0, 0) dalam ruang tiga dimensi.
Contoh:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
>plot3d("sqrt(x^2+y^2)"):
```

$$f(x,y)=\sqrt{2x^2+7y^2}$$

```
>plot3d("sqrt(2*x^2+7*y^2)"):
```

$$f(x,y)=\sqrt{10x^2+y^2}$$

```
>plot3d("sqrt(10*x^2+y^2)"):
```

4. Grafik Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial dua variabel bisa dinyatakan

$$f(x,y)=a.b^{xy}$$

dimana a dan b adalah konstanta, x dan y adalah variabel. Fungsi ini menggambarkan pertumbuhan eksponensial yang bergantung pada nilai x dan y.
Contoh:

$$f(x,y)=2.3^{xy}$$

```
>plot3d("2*3^(x*y)"):
```

$$f(x,y)=-3.8^{xy}$$

```
>plot3d("-3*8^(x*y)"):
```

5. Grafik Fungsi Logaritma

Grafik fungsi logaritma dua variabel adalah grafik yang menggambarkan nilai logaritma dari suatu ekspresi yang melibatkan dua variabel (biasanya x dan y). Fungsi logaritma dua variabel ini dinyatakan sebagai

$$f(x,y)=log_b(xy)$$

dimana b adalah basis logaritma. Basis logaritma ini dapat berbeda-beda.
Contoh:

$$f(x,y) = log(xy), basis10$$

```
>plot3d("log(x*y)"):
```

$$f(x,y) = log(2x.9y), basis10$$

```
>plot3d("log(2x*9y)"):
```

6. Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri dua variabel adalah fungsi matematika yang melibatkan operasi trigonometri (seperti sin, cos, tan) pada kedua variabel x dan y.
Contoh:

$$f(x,y) = sin(x).cos(y)$$

```
>plot3d("sin(x)*cos(y)"):
```

$$f(x,y) = sin(2x).cos(y)$$

```
>plot3d("sin(2x)*cos(y)"):
```

$$f(x,y) = sin(x).tan(y)$$

```
>plot3d("sin(x)*tan(y)"):
```

$$f(x,y) = cos(x).tan(y)$$

```
>plot3d("cos(x)*tan(y)"):
```

$$f(x,y) = cosec(x).sec(y)$$

```
>plot3d("cosec(x)*sec(y)"):
```

$$f(x,y) = cot(x).cosec(y)$$

```
>plot3d("cot(x)*cosec(y)"):
```

7. Grafik Fungsi Nilai Mutlak

Fungsi nilai mutlak dua variabel, juga dikenal sebagai fungsi modul dua variabel, dinyatakan sebagai

$$f(x,y) = |g(x,y)|$$

dimana g(x,y) adalah fungsi dua variabel.
Contoh:

$$f(x,y) = |x^2 - y^2|$$

```
>plot3d("abs(x^2 - y^2)"):
```

$$f(x,y) = |x^2 + y^2|$$

```
>plot3d("abs(x^2 + y^2)"):
```

$$f(x,y) = | - 2x^2 - 5y^2|$$

```
>plot3d("abs(-2x^2 - 5y^2)"):
```

$$f(x,y) = |x^2 - 8y^2|$$

```
>plot3d("abs(x^2 - 8y^2)"):
```

Latihan soal

Buatkan grafik dari fungsi berikut:
1.

$$f(x,y) = 8x - 3y + 7$$

```
>plot3d("8*x - 3*y +7"):
```

2.

$$f(x,y) = cos(5x).sin(9y)$$

```
>plot3d("cos(5*x)*sin(9*y)"):
```

3.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 20y^2}$$

```
>plot3d("sqrt(x^2+20*y^2)"):
```

2) Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Rumusnya Disimpan dalam Variabel Ekspresi

Apa yang dimaksud dengan Grafik Fungsi Dua Variabel?

Grafik fungsi dua variabel adalah representasi visual dari hubungan antara sebuah fungsi matematika dengan dua variabel independen (biasanya disebut sebagai "x" dan "y") dan variabel dependen (biasanya disebut sebagai "z" atau "f(x, y)").

Dalam grafik ini, sumbu x dan sumbu y digunakan untuk menggambarkan nilai-nilai dua variabel independen, sementara permukaan atau grafik 3D digunakan untuk menggambarkan nilai-nilai variabel dependen yang dihasilkan oleh fungsi tersebut.

Grafik fungsi dua variabel membantu memvisualisasikan bagaimana nilai variabel dependen (z) berubah seiring perubahan kedua variabel independen (x dan y) sesuai dengan aturan fungsi tersebut.

Fungsi matematika yg terlibat dalam Menggambar Grafik

Fungsi Dua Variabel

1. Fungsi Linear
Bentuk umum
f(x, y) = ax + by + c, di mana a, b, dan c adalah konstanta. Grafiknya adalah bidang datar.

2. Fungsi Kuadratik
Bentuk umum f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.
Grafiknya dapat berupa permukaan yang berbentuk paraboloid, baik terbuka ke atas atau ke bawah.

3.Fungsi Trigonometri
Bentuk umum sinus dan cosinus
(x, y) = sin(x) + cos(y)
akan menghasilkan permukaan yang berulang-ulang naik dan turun.

4.Fungsi Pecahan
Bentuk umum f(x, y) = g(x, y) / h(x, y), di mana g(x, y) dan h(x, y) adalah fungsi-fungsi lain.
grafiknya dapat menghasilkan berbagai pola yang tergantung pada sifat fungsi g dan h.

Menggambar Grafik Fungsi

Perintah yang digunakan untuk menggambar grafik fungsi dalam EMT yaitu dengan menggunakan plot3d.
Untuk menampilkan grafik, akhiri perintah plot3d dengan tanda (:).
Tanda (:) akan menampilkan grafik di layar yang berbeda.

```
>plot3d("x^2+y^2"):
>plot3d("x^3+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```

Menyimpan Variabel Ekspresi

Untuk menyimpan sebuah fungsi, dapat dilakukan dengan menggunakan perintah function. Lalu, ketika ingin memanggil atau membuat grafik dari fungsi tersebut, cukup dengan memanggil nama fungsi tersebut.

```
>function a(x,y):= x^2+y^3
>plot3d("a"):
>function f(x,y):= x^3-y^2
>plot3d("f"):
```

$$f(x, y) = x^3 + y^4$$

```
>function f(x,y):= x^3+y^4
>plot3d("f"):
>plot3d("a",>user, ...
>title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```

Perintah ini mengizinkan pengguna untuk menggambar grafik 3D dari fungsi yang mereka masukkan sendiri, serta memberikan petunjuk interaktif tentang cara berinteraksi dengan grafik. Pengguna dapat memutar tampilan grafik menggunakan tombol arah pada keyboard, dan menekan "return" untuk menyelesaikan interaksi.

```
>plot3d("a",r=5,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```

perintah ini akan menggambar grafik tiga dimensi dari fungsi "a" dalam rentang x dan y dari -5 hingga 5, dengan 80 titik untuk detail yang lebih halus. Nilai fungsi akan diperbesar 4 kali, dan grafik akan ditampilkan dengan skala 1.2 untuk tampilan yang lebih jelas. Bingkai grafis akan ditentukan oleh parameter frame=3.

```
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

```
>plot3d("a",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>center=[0.4,0,0],zoom=5):
>plot3d("a",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
> center=[0,0,-2],frame=3):
>plot3d("a",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):
>plot3d("x","a","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

FUNGSI LINEAR

```
>function e(x,y):= 20x+10y-5
>plot3d("e"):
>plot3d("e",>user, ...
>title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
>plot3d("e",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

```
>plot3d("e",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
>plot3d("e",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>center=[0.4,0,0],zoom=5):
>plot3d("e",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>center=[0,0,-2],frame=3):
>plot3d("e",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
>plot3d("x","e","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

FUNGSI TRIGONOMETRI

```
>function f(x,y):= sin(x+y)
>plot3d("f")
>plot3d("f",>user, ...
>title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
>plot3d("f",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

```
>plot3d("f",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
>plot3d("f",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>center=[0.4,0,0],zoom=5):
>plot3d("f",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
```

3) Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Fungsinya Didefinisikan sebagai Fungsi Numerik

Sebelum masuk ke cara memvisualisasikan grafik, perlu diketahui apa itu fungsi dua variabel dan apa itu fungsi numerik.

Fungsi Dua Variabel

Fungsi dua variabel adalah jenis fungsi di mana ada dua variabel bebas (biasanya dinotasikan sebagai x dan y) yang menentukan nilai dari fungsi tersebut. Dengan kata lain, untuk setiap kombinasi nilai dari x dan y, fungsi ini akan menghasilkan satu nilai output tertentu. Fungsi dari dua variabel yang mana setiap kombinasi nilai dari kedua variabel tersebut menghasilkan sebuah nilai tunggal.

Fungsi Numerik

Fungsi dimana setiap pasangan variabel independen adalah angka atau bilangan nyata. Secara sederhana, ketika memasukkan angka atau bilangan nyata ke variabel-variabel dalam fungsi maka hasil akhir yang dihasilkan juga angka atau bilangan nyata, bukan simbol atau ekspresi yang belum dihitung.
Contoh:
ada fungsi

$$f(x, y) = 2x + y$$

Ketika kita memasukkan bilangan nyata ke x dan y maka akan dihasilkan suatu bilangan nyata juga. Misal masukkan x=1 dan y=1. Akan diperoleh

$$2(1) + 1 = 3$$

Visualisasi Grafik

Untuk memvisualisaikan fungsi dua variabel dengan fungsinya didefinisikan sebagai fungsi numerik, akan dibuat grafik 3D dengan sintaks plot3d. Untuk membedakan fungsi numerik dengan simbolik, pada kali ini untuk setiap fungsi numerik dua variabel hanya akan memuat variabel x dan y. Namun, dalam pemakaian secara umum, bisa digunakan variabel apapun.

Penulisan Sintaks:
1) definisikan fungsi numerik
function f(x,y):= ax+by dengan a dan b adalah suatu konstanta dan fungsi tidak selalu direpresentastikan dengan f tetapi bisa dengan huruf apapun. Contoh : g(x,y)
2) sintaks plot3d
plot3d("f"):

Contoh Visualisasi Grafik:
1. Visualisasi grafik fungsi linear dua variabel

$$f(x, y) = 3x + 7y$$

```
>function f(x,y):= 2*x+5*y
>plot3d("f"):
```

2. Visualisasi grafik fungsi kuadrat dua variabel

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

```
>function f(x,y):= x^2+2*x*y+y^2
>plot3d("f"):
```

3. Visualisasi Grafik Fungsi Eksponen Dua Variabel

$$g(x, y) = x^{2y+8}$$

```
>function g(x,y):= x^(2y+8)
>plot3d("g"):
```

4. Grafik Fungsi Logaritma Dua Variabel

$$f(x, y) = \log(xy)$$

```
>function f(x,y):= log(x*y)
>plot3d("f"):
```

5. Grafik Fungsi Trigonometri Dua Variabel

$$h(x, y) = sin(xy)cos(y)$$

```
>function h(x,y):= sin(x*y)*cos(y)
>plot3d("h"):
```

6. Grafik Fungsi Nilai Mutlak Dua Variabel

$$i(x, y) = |(2x + y)|$$

```
>function i(x,y):= abs(2x+y)
>plot3d("i"):
```

Latihan Soal

Buatlah visualisasi grafik dari fungsi berikut ini!

$$f(x, y) = 2^x + 3y$$

```
>function f(x,y):=2^x+3*y
>plot3d ("f"):
```

$$g(x, y) = sin(x^2y + 1)$$

```
>function g(x,y):= sin(x^2*y+1)
>plot3d("g"):
```

$$h(x,y) = |4x + sin(y^3 + 1)|$$

```
>function h(x,y):=abs(4*x + sin(y^3+1))
>plot3d("h"):
```

4) Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Fungsinya Didefinisikan sebagai Fungsi Simbolik

Grafik Fungsi dua variabel yang fungsinya didefinisikan sebagai fungsi simbolik adalah suatu grafik yang memvisualisasikan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV) dalam koordinat kartesius dengan fungsinya merupakan fungsi simbolik.

Proses visualisasi ini memungkinkan Kita untuk melihat dan memahami bagaimana fungsi tersebut berperilaku dalam tiga dimensi.

Sedangkan yang dimaksud dengan fungsi simbolik yaitu fungsi yang didefinisikan dalam bentuk matematika simbolik, artinya kita memiliki ekspresi matematika yang menggambarkan hubungan antara dua variabel. misalnya, jika kita memiliki fungsi

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

kita dapat menggambar grafiknya untuk melihat bentuk permukaan yang dihasilkan oleh fungsi ini dalam tiga dimensi. Grafik ini mungkin akan berupa tumpukan parabola yang membentuk kerucut.
Karakteristik fungsi simbolik adalah dengan mengganti tanda := menjadi &=

Perbedaan utama antara fungsi numerik dan fungsi simbolik adalah bahwa fungsi numerik memberikan hasil numerik secara langsung (menghasilkan angka), sementara fungsi simbolik memungkinkan kita untuk bekerja dengan simbol matematika sebelum menghitung nilai numeriknya. Pilihan antara keduanya tergantung pada kebutuhan analisis matematika yang kita lakukan.

Tujuan menggambar grafik fungsi dua variabel adalah untuk memahami pola, sifat, dan hubungan antara dua variabel tersebut secara visual, yang dapat membantu dalam analisis dan pemahaman masalah matematika atau ilmu pengetahuan yang melibatkan fungsi ini.

Langkah-langkah Membuat Grafik

1) Definisikan fungsinya terlebih dahulu. Tentukan fungsi dua variabel yang akan divisualisasikan dalam bentuk simbolik.
Misal diambil fungsi

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Maka perintah yang dapat dituliskan yaitu:

```
>function f(x,y)&= x^2+y^2;
```

2) Panggil fungsinya

```
>plot3d("f(x,y)"):
```

3) Tentukan rentang variabelnya

```
>plot3d("f(x,y)",-5,5,0,6*pi):
```

Membuat Grafik Fungsi Linear

$$g(x,y) = x + 3y$$

```
>function g(x,y) &= x+3*y;
>plot3d("g(x,y)"):
```

$$M(x,y) = -2x - 4y$$

```
>function M(x,y) &= -2*x-4*y;
>plot3d("M(x,y)"):
```

Rentang variabel:

```
>plot3d("M(x,y)",-2,2,0,6*pi):
```

Membuat Grafik Fungsi Kuadrat

$$Q(x,y) = x^2 - y^2$$

```
>function Q(x,y) &= x^2 - y^2;
>plot3d("Q(x,y)"):
```

$$P(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2$$

```
>function P(x,y) &= 3*x^2-4*x*y+2*y^2;
>plot3d("P(x,y)"):
```

Rentang variabel:

```
>plot3d("P(x,y)",-10,10,0,9*pi):
```

Membuat Grafik Fungsi Akar Kuadrat

$$A(x,y) = \sqrt{10x^2 + 2y^2}$$

```
>function A(x,y) &= sqrt(10*x^2+2*y^2);
>plot3d("A"):
```

$$W(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

```
>function W(x,y) &= sqrt(x^2+2*y^2);
>plot3d("W"):
```

Rentang Variabel:

```
>plot3d("W(x,y)",-20,100,0,5*pi):
```

Membuat Grafik Fungsi Eksponensial

$$F(x,y) = 9.12^{xy}$$

```
>function F(x,y) &= 9*12^(x*y);
>plot3d("F"):
```

$$H(x,y) = 5.(-20)^{xy}$$

```
>function H(x,y) &= 5*-12^(x*y);
>plot3d("H"):
```

$$T(x,y) = (-21).5^{xy}$$

```
>function T(x,y) &= -21*-5^(x*y);
>plot3d("T"):
```

Membuat Grafik Fungsi Logaritma

$$B(x,y) = log(x.2y), Basis10$$

```
>function B(x,y) &= log(x*2*y);
>plot3d("B"):
```

$$C(x,y) = log(30x.5y), basis10$$

```
>function C(x,y) &= log(30*x*5*y);
>plot3d("C"):
```

Membuat Grafik Fungsi Trigonometri

$$D(x,y) = sin(2x).cos(3y)$$

```
>function D(x,y) &= sin(2*x)*cos(3*y);
>plot3d("D"):
```

$$J(x,y) = sin(2x).tan(y)$$

```
>function J(x,y) &= sin(2*x)*tan(y);
>plot3d("J"):
```

$$G(x,y) = sec(2x).cot(5y)$$

```
>function G(x,y) &= sec(2*x)*cot(y);
>plot3d("G"):
```

Membuat Grafik Fungsi Nilai Mutlak

$$T(x,y) = |2x^2 - y^2|$$

```
>function T(x,y) &= abs(2*x^2 - y^2);
>plot3d("T"):
```

$$M(x,y) = |-10x^2 - 3y^2|$$

```
>function M(x,y) &= abs(-10*x^2 - 3*y^2);
>plot3d("M"):
```

Rentang Variabel :

```
>plot3d("M(x,y)",-15,2,0,8*pi):
```

Latihan

Buatlah grafik dari fungsi berikut:

$$A(x,y) = x^2y + 3y^2$$

```
>function A(x,y) &= x^2*y+3*y^2;
>plot3d ("A"):
```

$$B(x,y) = y^2 - 2x^2y + 4x^3 + 20x^2$$

```
>function B(x,y)&= y^2-2*x^2*y+4*x^3+20*x^2;
>plot3d("B"):
```

$$C(x,y) = cosec(9x) - tan(2y)$$

```
>function C(x,y)&= cosec(9*x)-tan(2*y);
>plot3d ("C"):
```

Beri rentang variabel untuk fungsi C(x,y):
-100,50,0,2*pi

```
>plot3d("C(x,y)",-100,50,0,2*pi):
```

5) Menggambar Data x, y, z pada ruang Tiga Dimensi (3D)

```
Menggambar data pada ruang tiga dimensi (3D) adalah proses
```

visualisasi data yang mengubah informasi dalam tiga dimensi, yaitu panjang, lebar, dan tinggi, menjadi representasi visual yang dapat dipahami dan dianalisis.

```
Tujuan dari menggambar data 3D adalah untuk membantu pemahaman dan
```

interpretasi data yang lebih baik, terutama ketika data tersebut memiliki komponen yang tidak dapat direpresentasikan dengan baik dalam dua dimensi.

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, kita perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, kita dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

Kita dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

Contoh 1 grafik fungsi

```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s):
```

Penjelasan sintaks dari plot
- plot3d = membawa euler untuk mengetahui perintah apa yang harus dilakukan
- (" ...") = tempat kita untuk memasukkan perintah yang kita inginkan

Contoh 2

kita akan memebentuk plot dengan fungsi dibawah ini

$$x^2 + y^2$$

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```

Selanjutnya kita akan menggambar garis pada plot dengan menggunakan grid

```
>plot3d("x^2+y^2",grid=2):
```

Jika kita ingin memodifikasi plot dengan menambahkan warna pada plot, bisa menggunakan fillcolor. Fillcolor dapat diisi dengan 1 warna yang sama atau 2 warna yang berbeda

```
>plot3d("x^2+y^2",grid= 2,fillcolor=[blue,blue]):
```

Contoh 3

Jika kita ingin membuat plot 3d pada fungsi

$$2x^2 + y^3$$

kita bisa menggunakan perintah seperti dibawah ini

```
>plot3d("2x^2+y^3",grid=10,>hue, color=red);
>insimg()
```

Jika kita mau menebalkan warna pada gambar diatas makam bisa menggunakan perintah

```
>plot3d("2x^2+y^3",grid=10,fillcolor=[red,red]);
>insimg()
```

Contoh 4

Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;...
>plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

Contoh Soal 5

```
Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang
```

terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor

$$d(t,s) = \frac{\cos(4t)+\cos(8s)}{4}$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)';...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s));...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1,...
>light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

6) Membuat Gambar Grafik Tiga Dimensi (3D) yang Bersifat Interaktif dan animasi grafik 3D

Membuat gambar grafik tiga dimensi (3D) yang bersifat interaktif adalah proses menciptakan visualisasi tiga dimensi yang memungkinkan pengguna berinteraksi dengan objek-objek 3D. Interaktivitas dalam gambar 3D memungkinkan pengguna untuk melakukan tindakan seperti mengubah sudut pandang, memindahkan objek, atau berinteraksi dengan elemen-elemen dalam adegan 3D. Sedangkan animasi grafik 3D dapat mencakup pergerakan, tetapi juga dapat berarti perubahan dalam tampilan atau atribut objek tanpa pergerakan fisik yang mencolok.

Interaksi user dimungkinkan dengan parameter >user. dengan perintah >user kita dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l : tombol nyalakan sumber cahaya (lihat dibawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user,...
>title="Coba gerakkan"):
>plot3d("exp(x^2+y^2)",>user,...
>title="Coba gerakkan)"):
```

Animasi 3D

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3");...
>rotate("testplot"); testplot():
```

Fungsi rotate yaitu untuk memutar plot.
Fungsi ini akan membuat animasi plot 3D dari fungsi

$$x^2 + y^3$$

yang berputar di sekitar sumbu z dari sudut 0 hingga 360 derajat

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=8,scale=1.2,frame=3,>user):
```

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
scale: angka atau vektor 1x2 untuk diskalakan ke arah x dan y.
frame: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("x^2+y",distance=10,zoom=5,angle=0,height=5):
```

Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- angle: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- height: ketinggian tampilan dalam radian.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°,...
>center=[0,0,1],zoom=5):
```

Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Kita dapat memindahkan bagian tengah dengan center parameter.

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```

Parameter memutar memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

7) Menggambar Fungsi Parametrik Tiga Dimensi (3D)

Pengertian

Fungsi parametrik adalah jenis fungsi matematika yang menggambarkan hubungan antara dua atau lebih variabel, di mana setiap variabel dinyatakan sebagai fungsi dari satu atau lebih parameter. Fungsi parametrik digunakan untuk menggambarkan kurva, lintasan, atau hubungan antara berbagai variabel yang bergantung pada parameter-parameter tertentu.

Fungsi parametrik merupakan salah satu cara mendefinisikan kurva atau permukaan dalam ruang 2D atau 3D menggunakan satu atau lebih parameter independen.

- Dalam 2D, kurva dinyatakan sebagai x(t) dan y(t), di mana adalah t adalah parameter yang mengontrol posisi sepanjang kurva.
- Dalam 3D, kita menggunakan tiga persamaan parametrik untuk mendeskripsikan posisi x,y,z sebagai fungsi dari parameter t.Fungsi ini ditulis sebagai:
x=f(t),
y=g(t),
z=h(t),

Contoh Soal

```
>plot3d("cos(x)*cos(y)","sin(x)*cos(y)","sin(y)", a=0,b=2*pi,c=pi/2,d=-pi/2,...
>>hue,color=red,light=[0,1,0],<frame,...
>n=90,grid=[25,50],wirecolor=black,zoom=4):
>aspect(16/9); allwindow; ...
>x:=linspace(0,2*pi,100); y:=(-1:0.1:1)'; ...
>plot3d(sin(x)*(y/2*sin(x/2)),cos(x)*(y/2*sin(x/2)),y/2*cos(x/2), ...
><frame,hue=2,max=0.5,scale=1.5):
>aspect(16/9); allwindow;...
>x:=linspace(0,2*pi,100); y:=(-1:0.1:1)';...
>plot3d(sin(x)*(y/2*sin(x/2)),cos(x)*(y/2*sin(x/2)),y/2*cos(x/2),...
>>lines,<frame,xmin=0,xmax=10,n=10,>user):
>reset;...
>S:=normal(10,1250); plot3d(S[3],S[6],S[9],>points,style="."):
>S:=normal(10,1250); T:=cumsum(normal(10,1250));...
>plot3d(T[2],T[5],T[8],>wire,...
>linewidth=2,>anaglyph,zoom=3):
>P=cumsum(normal(5,75));...
>plot3d(P[3],P[4],P[5],>anaglyph,>wire):
```

8) Menggambar Fungsi Implisit Tiga Dimensi (3D)

Fungsi implisit (implicit function) adalah fungsi yang memuat lebih dari satu variabel, berjenis variabel bebas dan variabel terikat yang berada dalam satu ruas sehingga tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda.

$$F(x, y, z) = 0$$

(1 persamaan dan 3 variabel), terdiri dari 2 variabel bebas dan 1 terikat

Misalnya, F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 adalah persamaan implisit yang menggambarkan bola dengan jari-jari 1 dan pusat di (0,0,0).

Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d mencakup plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang x-y, x-z, z-x dan y-z.

- implisit=1: dipotong sejajar bidang y-z
- implisit=2: dipotong sejajar dengan bidang x-z
- implisit=3: dipotong sejajar dengan bidang z-x (yang berarti pemotongan dilakukan dengan mempertahankan nilai y konstan)
- implisit=4: dipotong sejajar bidang x-y

Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

Contoh Fungsi Implisit

```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=7,implicit=4):
>plot3d("2*x^2 + 3*y^2 + z^2 - 25",r=8,implicit=2):
>plot3d("4*x^3 + 3*y^4 + 6*z^2 - 10",r=3,implicit=3):
>plot3d("x^5 + 5*y^3 + 3*z^2 - 5*x - 7*y - 5*z + 10",r=5,implicit=2):
>plot3d("x^2 + y^2 - z^2",r=5,implicit=3):
>plot3d("x^3 + 2*y^2 +3*z^3-4",r=5,implicit=3):
>plot3d("x^2+y^2+z^2+2*x*y+4*y*z+8*z*x-20",r=5,implicit=3):
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2+c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^
>plot3d("x^3+y^5+5*x*z+z^3",>implicit,r=3,zoom=2):
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3-2",>implicit,r=2,zoom=2.5):
>plot3d("x^2*y^2+x^3+y^3*x",>implicit,r=5,zoom=2.5):
>plot3d("x*y-z^2+2*x*y*z-0",>implicit,r=5,zoom=2.5):
```

Latihan soal

Gambarlah Fungsi implisit berikut dalam 3D

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

```
>plot3d("x^2+y^2-z^2-1",r=8,implicit=3):
```

Gambarlah fungsi 3D dari fungsi implisit berikut ini

$$f(x, y, z) = xy + x^3y^2 + xz^3 - 9 = 0$$

dengan r=4

```
>plot3d("x*y+x^3*y^2+x*z^3-9", r=4, implicit=3):
```

9) Mengatur tampilan, warna dan sudut pandang gambar permukaan Tiga Dimensi (3D) Dan Menampilkan kontur dan bidang kontur permukaan Tiga Dimensi(3D)

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.

-> hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.
-> kontur: Memplot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```

Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.

-> spektral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```

Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):
```

Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

Dalam contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```

Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kami selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```

Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru ke merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru,ungu hijau,birukuning,hijaumerah
- birukuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- cahaya: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```

Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```

10) Menggambar Diagram Batang Tiga Dimensi

Bar plots/plot batang juga dimungkinkan. Untuk itu, kita harus menyediakannya

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

Dalam contoh ini, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor-vektornya berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
>x=-0.01:0.1:1; y=x'; z=x+2/3*y; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
>x=-0.01:0.1:1; y=x'; z=1/2*x+1/2*y; ...
>xa=(x|1.1); ya=(y_1.1); ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```

Dimungkinkan untuk membagi plot suatu permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=1/10*x+1/10*y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:5):
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Hal ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
>Z=intrandom(6,100,6); v=zeros(6,2); ...
>loop 1 to 6; v[#]=getmultiplicities(1:2,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:6,ccols=[1:6]):
>Z=intrandom(7,1000,6); v=zeros(7,1); ...
>loop 1 to 7; v[#]=getmultiplicities(1:1,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:7,ccols=[1:7]):
```

11) Menggambar Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```

12) Menggambar Grafik 3D dengan Povray di EMT

Menggambar Povray Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Untuk dapat menjalankan sintaks dalam povray perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke pathway, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke "pvengine.exe".

Interface Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Sintaks yang digunakan untuk menjalankan povray adalah pov3d. Fungsi pov3d memiliki komponen yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat gambar ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file gambar. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Lingkup Povray memiliki sistem koordinat lain. Interface ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di path. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Contoh Penggunaan

Akan diberikan contoh sederhana penggunaan povray pada EMT
Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

Jika memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, akan ditanya, apakah ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Agar pertanyaan tersebut tidak muncul lagi bisa dipilih batal.

```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=4);
```

hasil visualisasi fungsi dapat dibuat menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya.

```
> pov3d("(x^2+y^3)",axiscolor=green,angle=30°, ...
>  look=povlook(yellow,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3);
>pov3d("((x-1)^2+(y+1)^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
>  angle=120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```

Object Povray

Contoh-contoh di atas tadi merupakan visualisasi permukaan fungsi dengan menggunakan sintaks pov3d. Untuk menghasilkan objek dalam povray perlu ditulis menjadi file povray.

Untuk menghasilkan output dimulai dengan povstart()

```
>load povray; ...
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>povstart(zoom=3.5)
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(orange)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(lightblue));
```

Di atas telah didefinisikan tiga silinder yang disimpan dalam string
di Euler. Fungsi povx(), povy(), dll. hanya mengembalikan vektor
,0
yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1
```

```
 cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
  texture { pigment { color rgb <0.941176,0.509804,0.392157> }  }
  finish { ambient 0.2 }
  }
```

Akan ditambahkan tekstur ke objek dengan tiga warna berbeda yaitu orange, yellow, dan lightblue.
Untuk menamahkan tekstur ini dapat digunakan sintaks povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Selain menambahkan warna, ditambahkan juga transparansi dan cahaya.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
  texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
  finish { ambient 0.5 }
```

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
>povend;
```

Contoh Lain

Akan ditampilkan fungsi untuk membuat sebuah donat

```
>povstart(angle=0,height=45°); //height untuk menampilkan fungsi dengan suatiu derajat ter
>function povdonat (r1,r2,look="") := "torus {"+r1+","+r2+look+"}"; //fungsi untuk menampi
>writeln(povobject(povdonat(1,0.5),povlook(lightblue,>phong),xrotate(90°)));
>povend();
```

13) Menggambar Grafik Tiga Dimensi alam modus anaglif

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```

14) Fungsi Implisit menggunakan Povray

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

$$((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^2)=d$$

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
  C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));
>povend();
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
  C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>povstart(angle=70°,height=30°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(red),povbox(-2,2,"")));
>povend();
```

Contoh lain

```
>povstart(angle=45, height=100);
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,3)*pow(z,2)-1", povlook(blue),povbox(-25,4,"")));
>povend();
```

15) Menggambar Titik pada ruang Tiga Dimensi (3D)

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
>  w=500,h=300);
```

Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
                                    2   3
                                   x   y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
                              3         2   2
                       [- 2 x y , - 3 x   y , 1]
```

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>   xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

See: Contoh\Trefoil Simpul | Simpul trefoil

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(gray), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```

Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

With povgrid(), curves are possible.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```

Latihan Soal

1. Buatlah plot 3D dari fungsi

$$f(x,y) = x^3 + 3y^2$$

dengan zoom 3 dan angle 55 derajat menggunakan povray

```
>pov3d("x^3+3*y^2",zoom=3,angle=55°);
```

2. Buatlah gabungan 2 silinder dengan fungsi povx() berwarna merah dan povz() berwarna kuning dan zoom 4

```
>povstart(zoom=4)
>c1 = povcylinder (-povx,povx,1,povlook(red));
>c2 = povcylinder (-povz,povz,1,povlook(yellow));
>writeln(povintersection([c1,c2]));
>povend();
>
```

3. Buatlah grafik 3D dari fungsi kuadrat berikut ini dengan parameter tambahan:

$$z = 4x^2 - 2y^2$$

Tampilkan grafik tersebut dengan transparent, dan menggunakan grid dengan resolusi 50, dengan warna biru pada garis di plot tersebut

```
>plot3d("4*x^2-2*y^2",>transparent,grid=50,wirecolor=blue):
```

Nama : Pradika Larasati
NIM : 23030630003

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Fungsi

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota dari suatu himpunan (domain) dengan tepat satu anggota himpunan lain (kodomain). Secara sederhana, fungsi dapat dipandang sebagai mesin yang menerima input (nilai x) dan menghasilkan output (nilai y).

Sifat-sifat Fungsi

1. Fungsi Injektif (Satu-Satu)
Fungsi injektif adalah fungsi dengan tiap elemen kodomain tidak mempunyai relasi lebih dari satu dengan elemen domain. Fungsi injektif disebut juga dengan "fungsi satu-satu" karena tiap elemen kodomain hanya boleh berelasi satu kali. Berikut beberapa contoh relasi fungsi injektif dalam diagram pemetaan relasi fungsi.

2. Fungsi Surjetif (on-to)
Fungsi surjektif adalah fungsi dengan semua elemen kodomain berelasi dengan elemen domain. Fungsi surjektif juga disebut fungsi "on-to". Berikut beberapa contoh relasi fungsi surjektif dalam digaram pemetaan relasi fungsi.

3. Fungsi bijektif (korespondensi satu-satu)
Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi sifat injektif dan surjektif. Fungsi bijektif juga disebut fungsi korespondensi satu-satu, karena elemen domain dan kodomain semuanya berelasi satu-satu. Berikut beberapa contoh relasi fungsi bijektif dalam diagram pemetaan relasi fungsi.

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

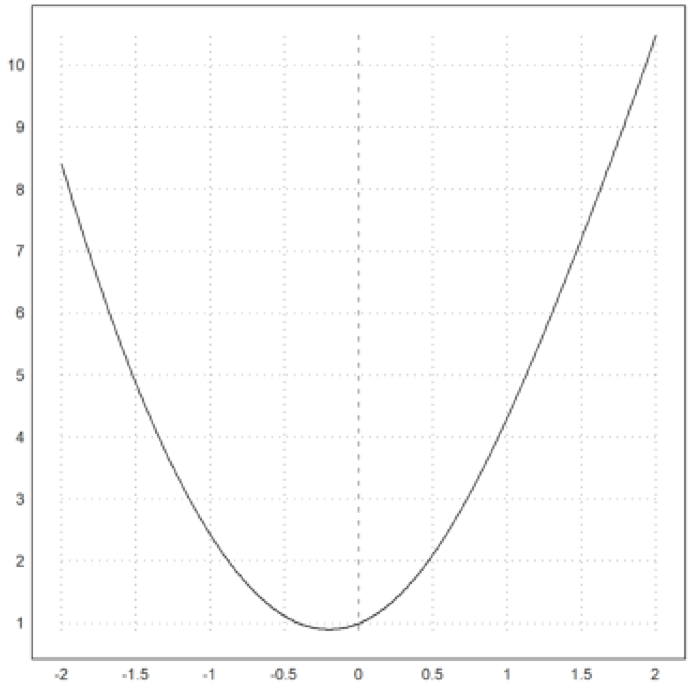
```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>plot2d("f"):
```



Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x):= sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

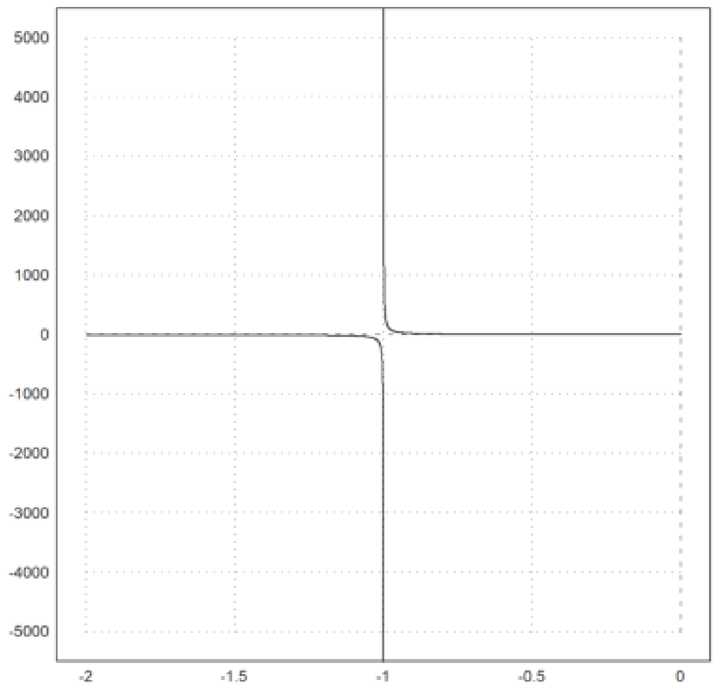
```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>plot2d("g", a=-2, b=0, c=-5000, d=5000):
```




```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

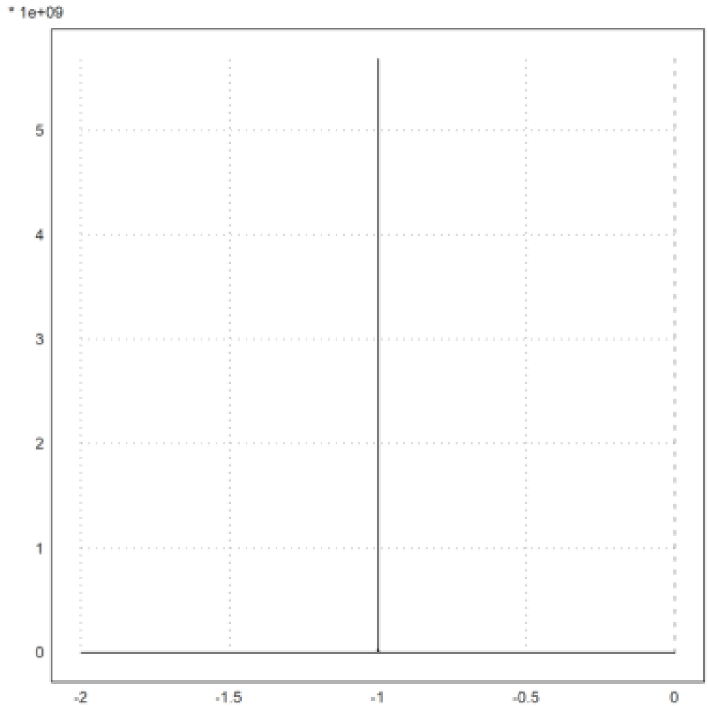
$$h(x) = f(g(x))$$

dan

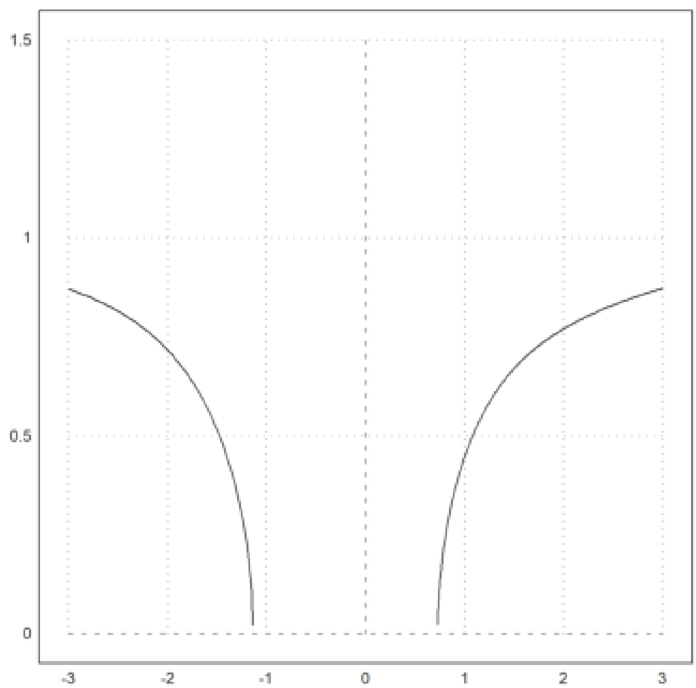
$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>plot2d("h", b=0):
```




```
>function u(x):= g(f(x));//mendefinisikan fungsi u
>plot2d("u", a=-3,b=3,c=0, d=1.5):
```



```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

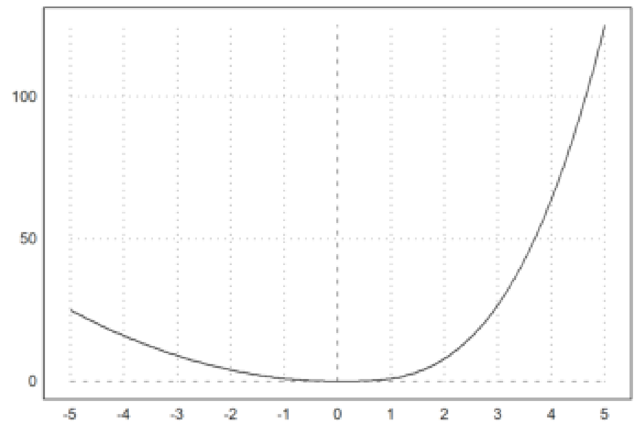
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                                    x
                                 2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
  30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$30.30852448295852$$

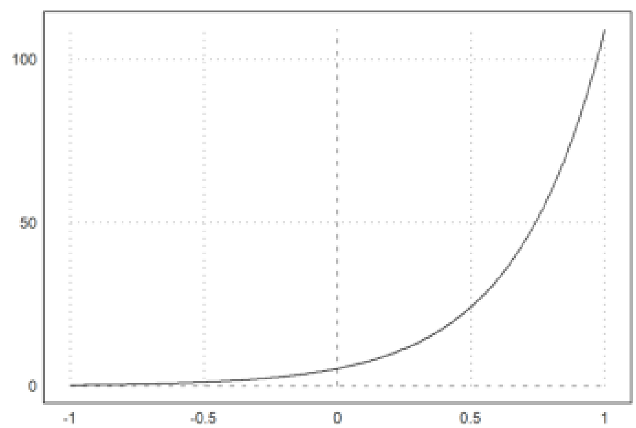
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                               3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
                    3 x + 1
                 2 E
```

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

5 fungsi yang dipilih:

$$a(x) = -x^2$$

$$b(x) = 3x + 5$$

$$c(x) = |4x + 7|$$

$$d(x) = \frac{x+3}{2^x}$$

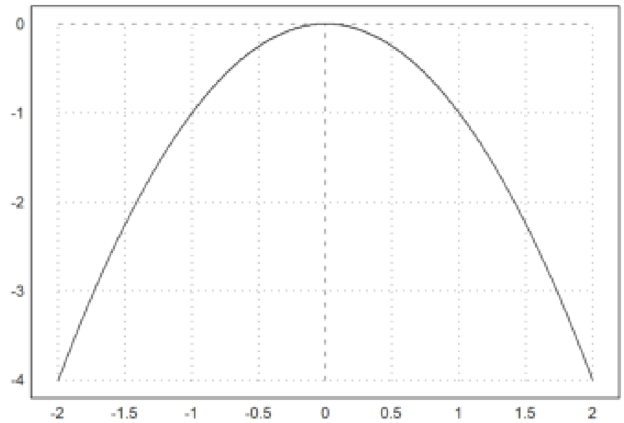
$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

```
>function a(x):= -x^2
>function b(x):= 3*x+5
>function c(x):= abs(4*x+7)
```

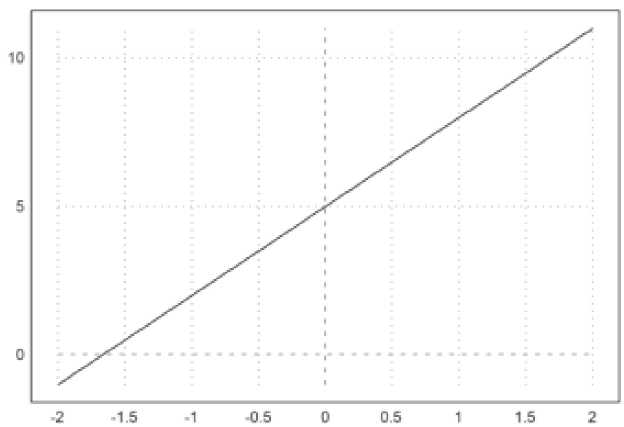
```
>function d(x):= (x+3)/(2^x)
>function f(x):= sqrt(x+4)
>a(3), b(-3), c(-7), d(2), f(0)
```

```
-9
-4
21
1.25
2
```

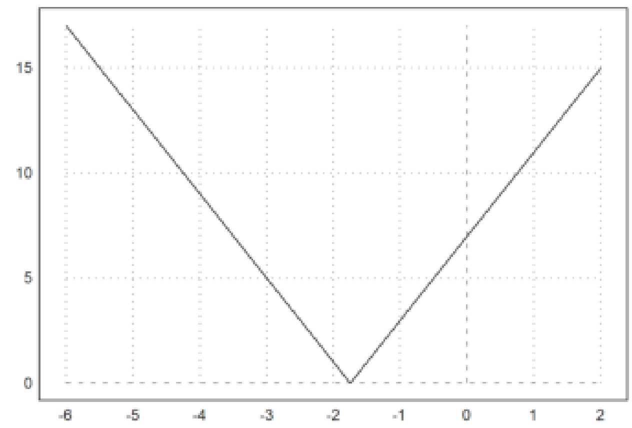
```
>plot2d("a"):
```



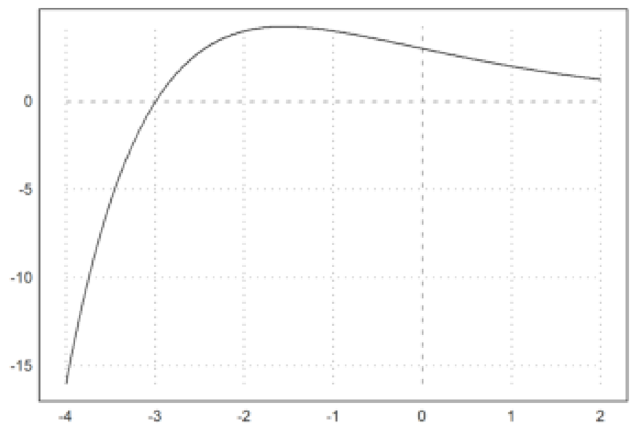

```
>plot2d("b"):
```



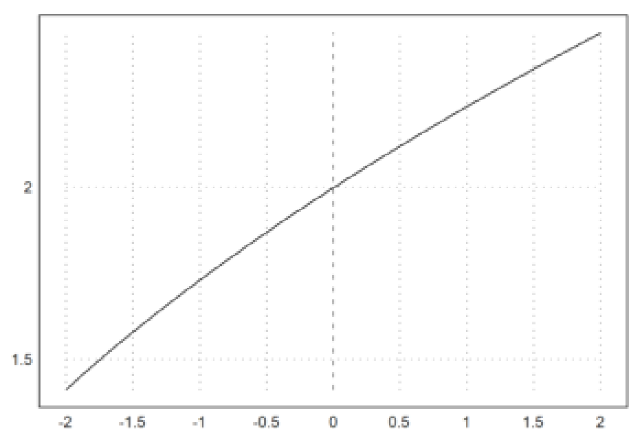

```
>plot2d("c", a=-6):
```



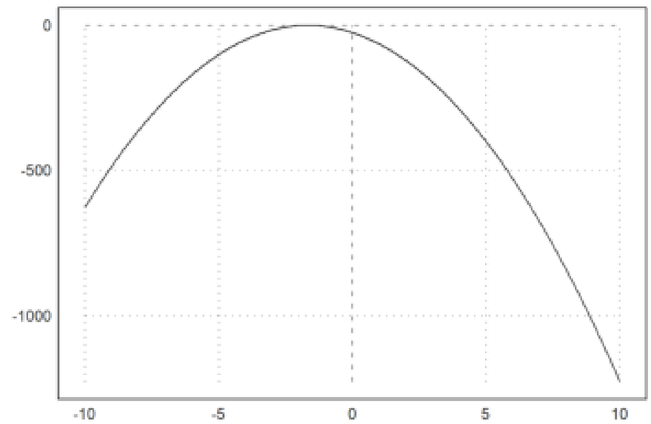

```
>plot2d("d", a=-4):
```



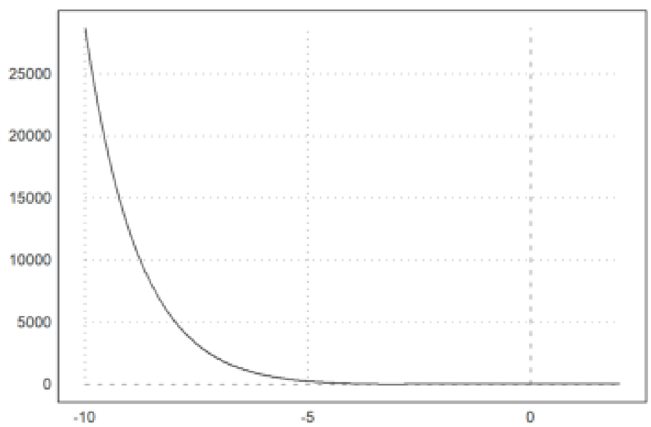

```
>plot2d("f"):
```



```
>function u(x):= a(b(x))
>function v(x):= c(d(x))
>plot2d("u", a=-10, b=10):
```




```
>plot2d("v", a=-10):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

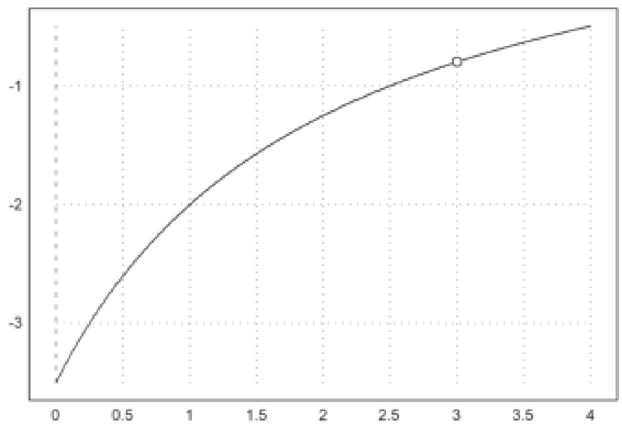
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

maxima: 'limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)=limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points
```

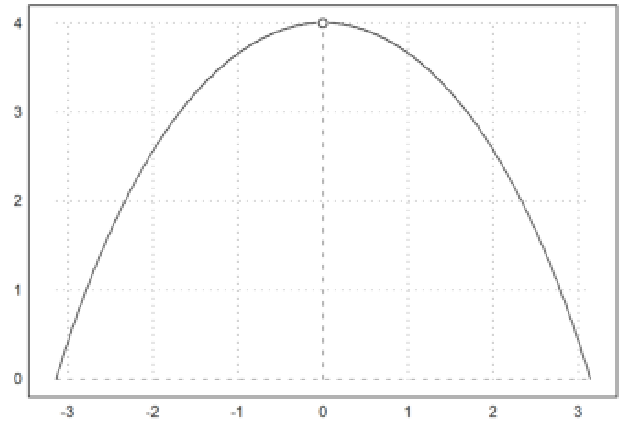



```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

maxima: 'limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)=limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```

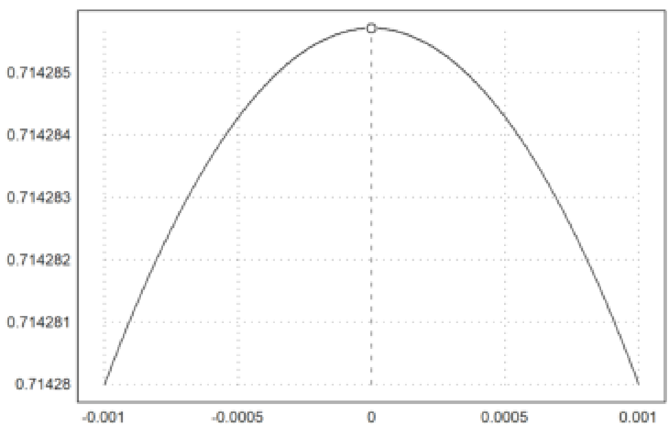



```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

maxima: showev('limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0))
Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```

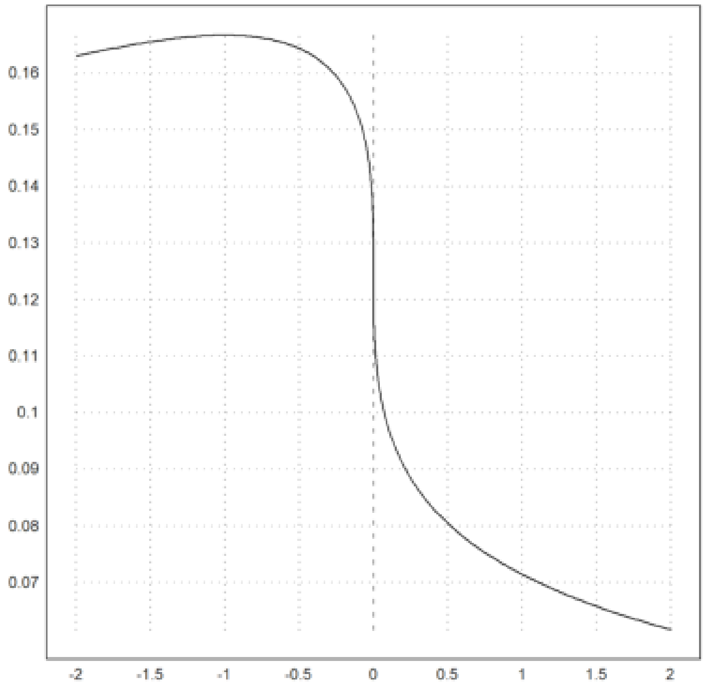



```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\rightarrow 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("((x/8)^(1/3)-1)/(x-8)"):
```

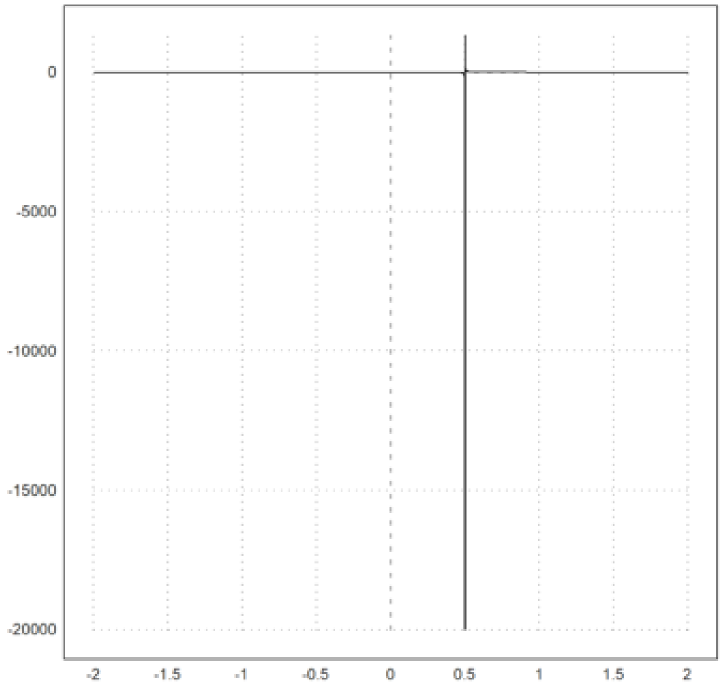



```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("1/(2*x-1)"):
```

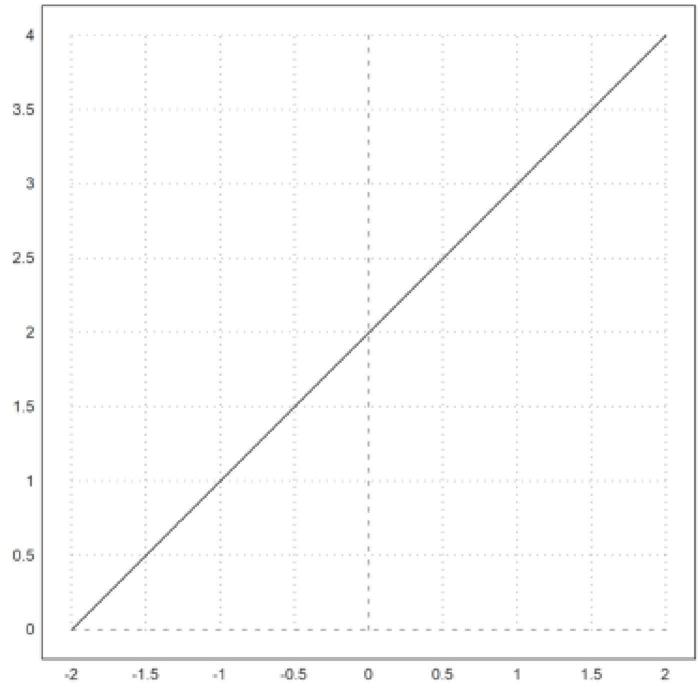



```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(x^2-3*x-10)/(x-5)"):
```

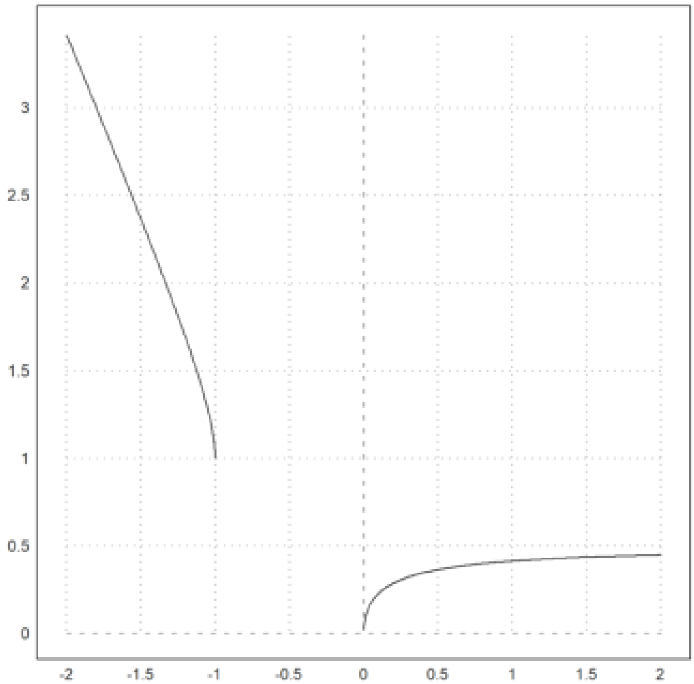



```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("sqrt(x^2+x)-x"):
```

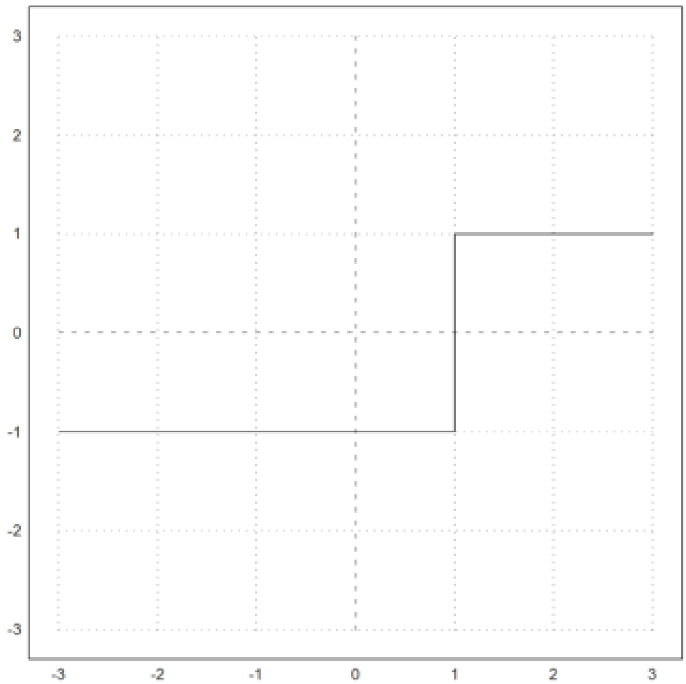



```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

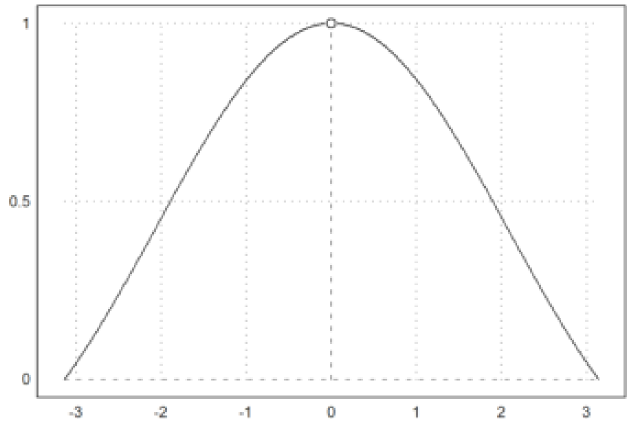
```
>plot2d("(abs(x-1)/(x-1))",r=3):
```



```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\sin x}{x}}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

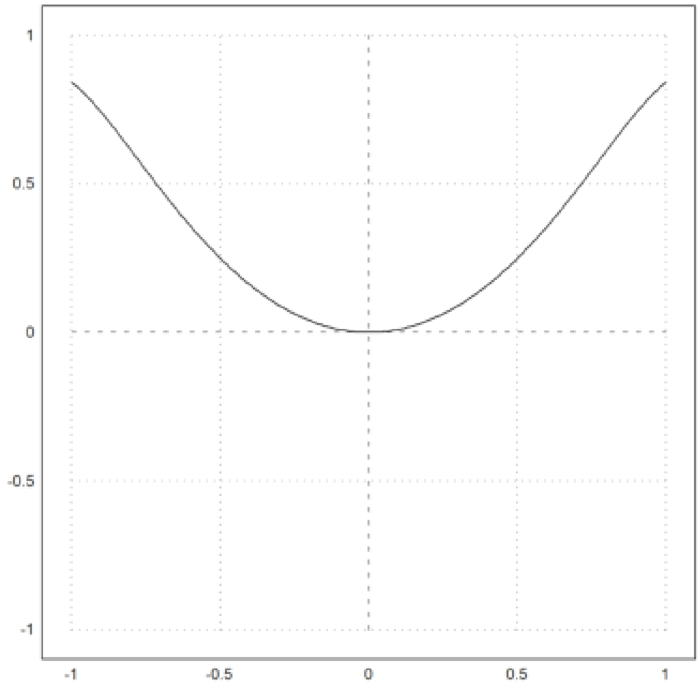


```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\sin x^3}{x}}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("sin(x^3)/x",r=1):
```




```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \to -\infty} \log x = \mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \to \infty} (-2)^x = \mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

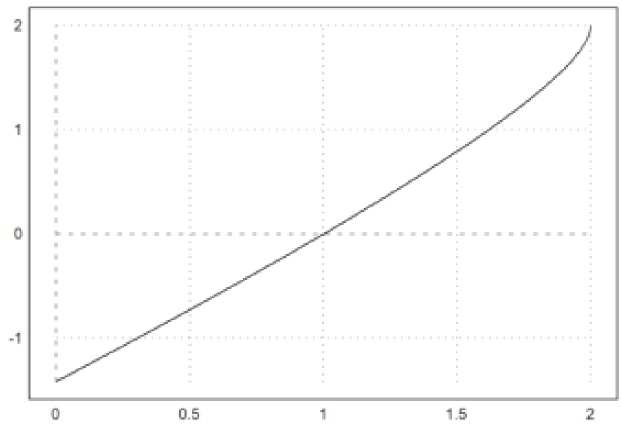
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t \downarrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```

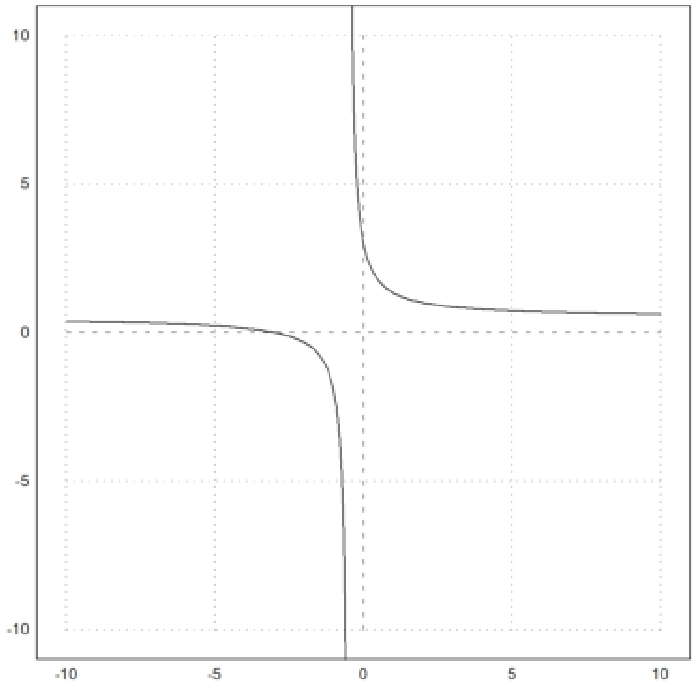



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\rightarrow 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",r=10):
```

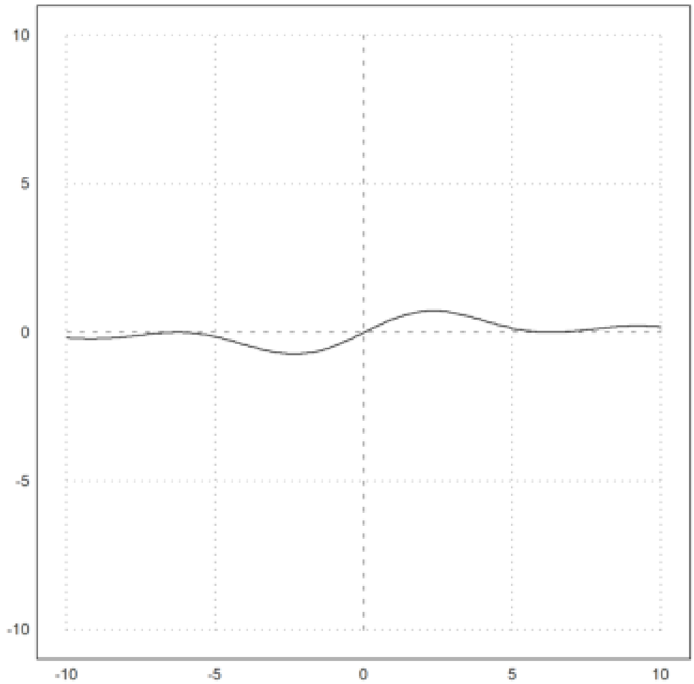



```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",r=10):
```

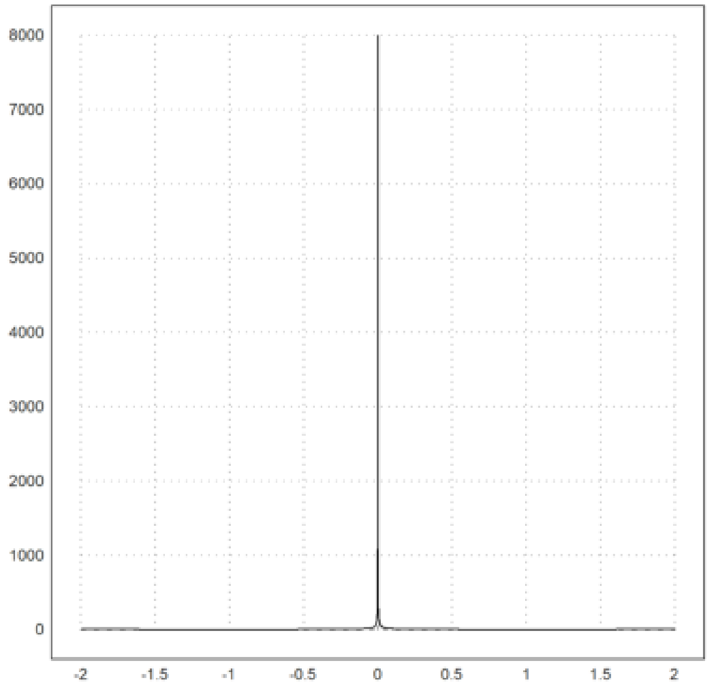


```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

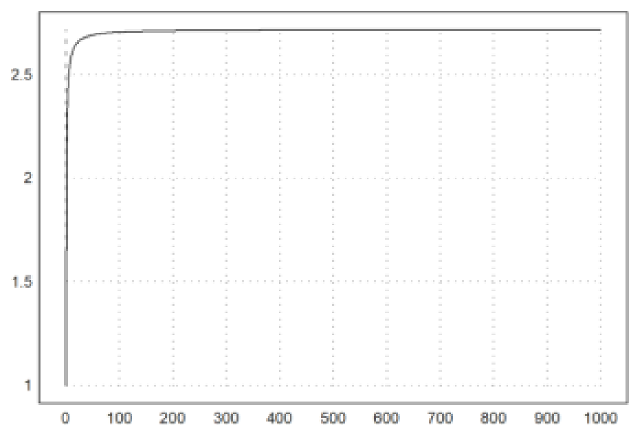
```
>plot2d("x^2+abs(x)/x^2-abs(x)"):
```




```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x = e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

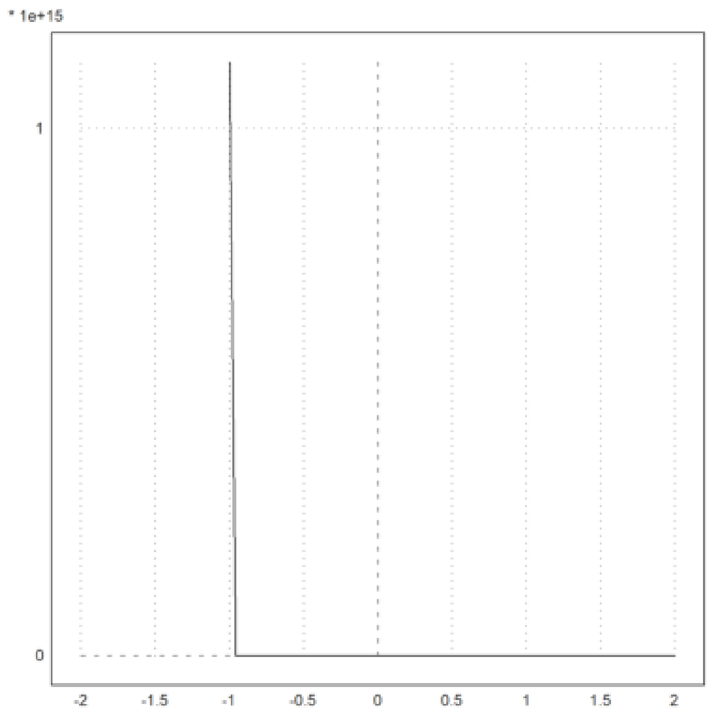
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1+x)^(1/x)"):
```




```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

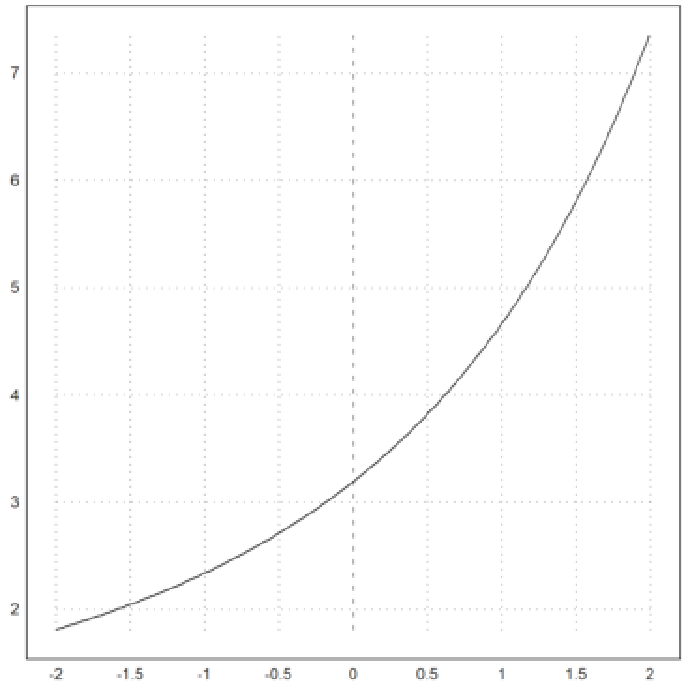
$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}}=e^ {- k }$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{e^{x}-e^2}{x-2}}=e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(E^x-E^2)/(x-2)"):
```



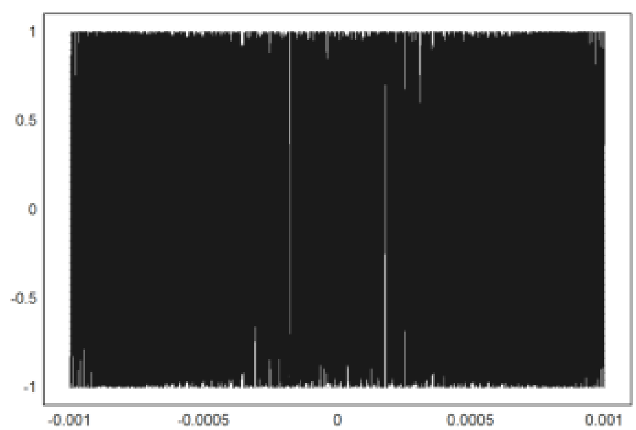

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

5 fungsi yang dipilih:

$$-x^2$$

$$3x+5$$

$$|4x+7|$$

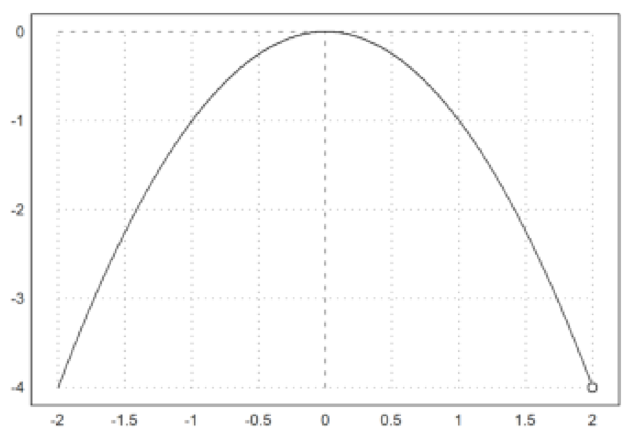
$$\frac{x+3}{2^x}$$

$$\frac{\sqrt{x+4}}{3x}$$

```
>$showev('limit(-x^2,x,2))
```

$$-\lim_{x\to 2} x^2 = -4$$

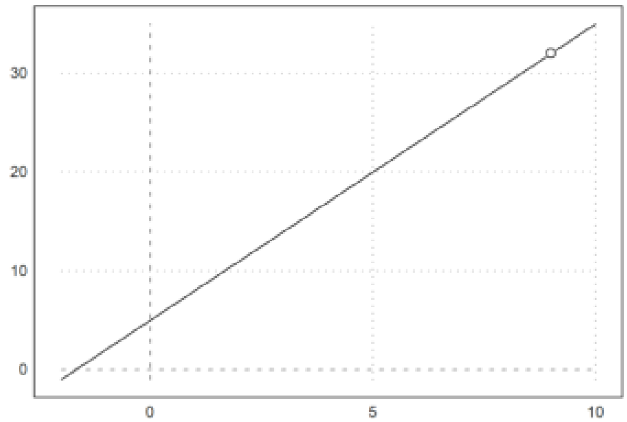
```
>plot2d("-x^2"); plot2d(2,-4,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(3*x+5,x,9))
```

$$\lim_{x\to 9} 3\,x+5 = 32$$

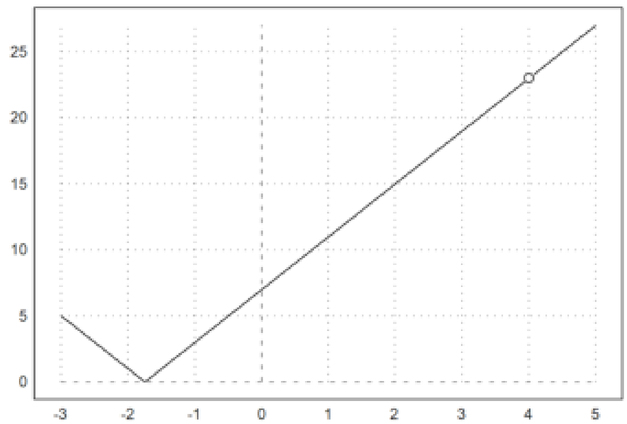
```
>plot2d("3*x+5",b=10); plot2d(9,32,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(abs(4*x+7),x,4))
```

$$\lim_{x\to 4}\left|4\,x+7\right|=23$$

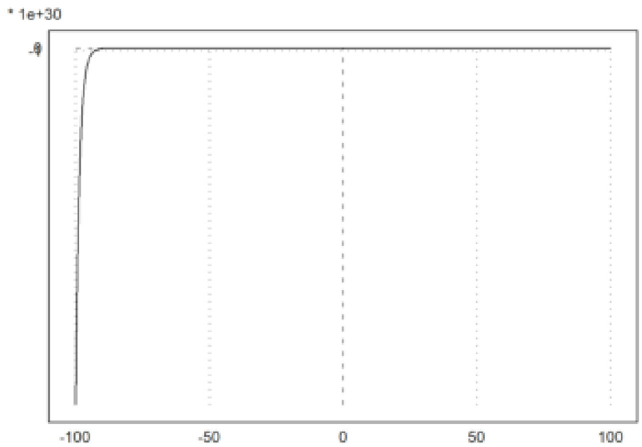
```
>plot2d("abs(4*x+7)",a=-3, b=5); plot2d(4,23,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x+3)/(2^x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\frac{x+3}{2^{x}}}=0$$

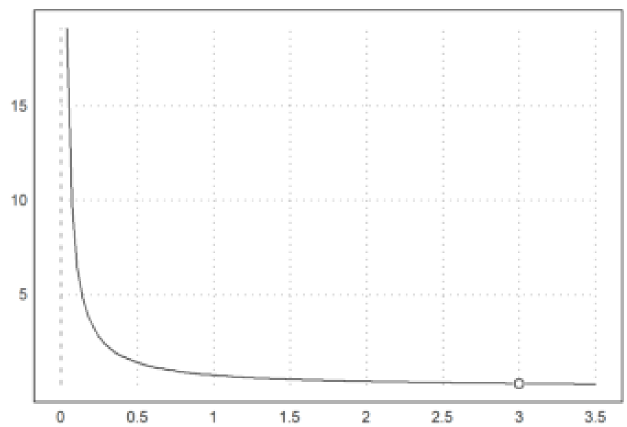
```
>plot2d("(x+3)/(2^x)",-100,100):
```




```
>$showev('limit(sqrt(x+4)/(3*x),x,3))
```

$$\frac{\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+4}}{x}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{9}$$

```
>plot2d("sqrt(x+4)/(3*x)", a=0, b=3.5); plot2d(3,(sqrt(7))/9,>points,style="ow",>add):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>  $showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}}=2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,h\,x+h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\sin \left(x+h\right)-\sin x}{h}}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\log \left(x+h\right)-\log x}{h}}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$\mathit{factor}\left(e^{x+h}-e^x\right)=\left(e^h-1\right)\,e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)\,e^x=e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                              x
                             x
```

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}x^{x}=1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y = x^x.$$

```
>plot2d("y=x^x"):
```

```
Variable y not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in expression: y=x^x
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=\mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

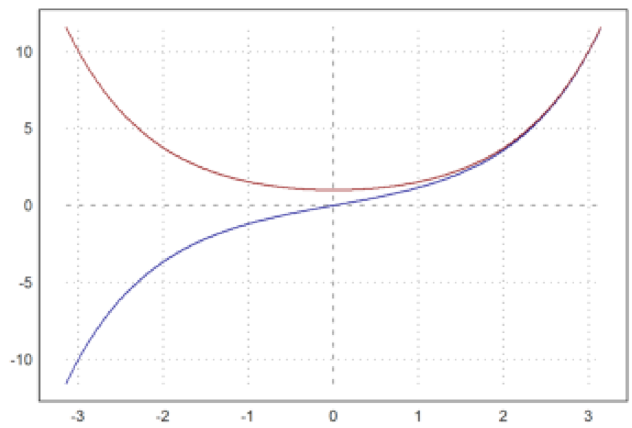
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                           2      5
                        sin  (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right) = 30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

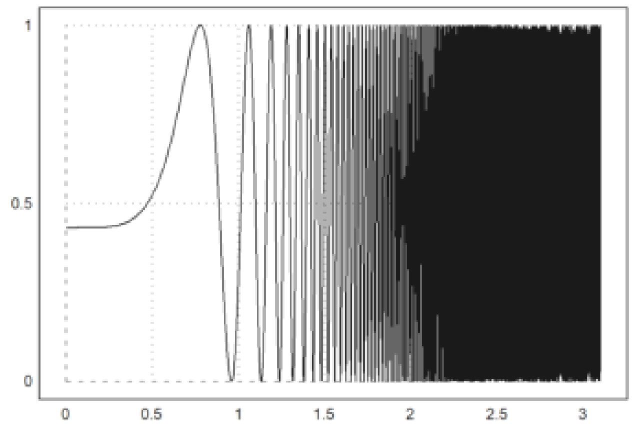
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right), x=3\right) = 2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
- 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$-0.2410081230863468$$

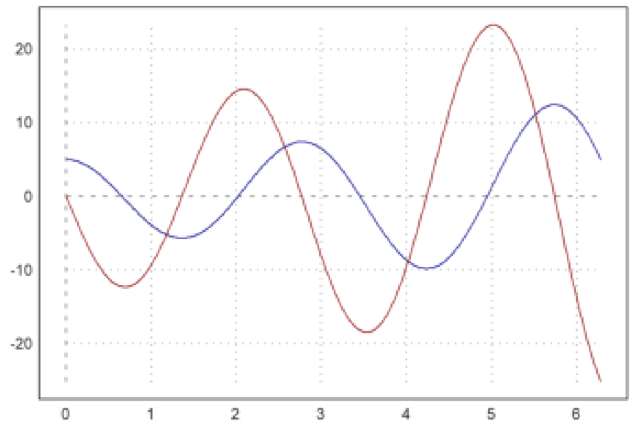
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

5 fungsi yang dipilih:

$$a(x) = -x^2$$

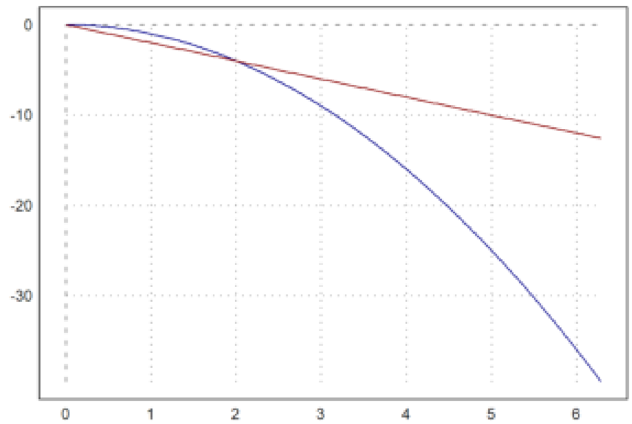
$$b(x) = 3x + 5$$

$$c(x) = |4x + 7|$$

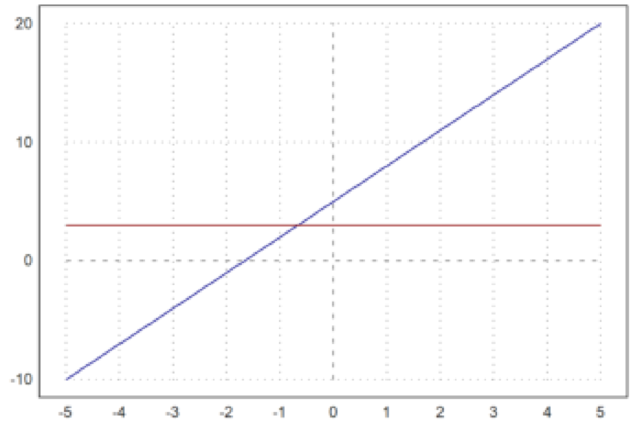
$$d(x) = \frac{x+3}{2^x}$$

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

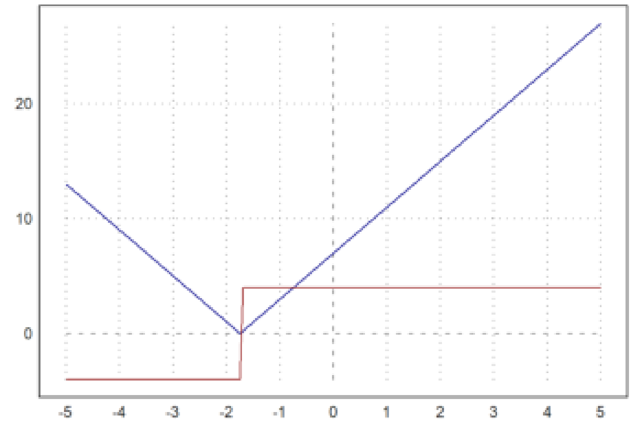
```
>function a(x) &= -x^2;function da(x) &= diff(a(x),x); plot2d(["a(x)","da(x)"],0,2*pi,colo
```



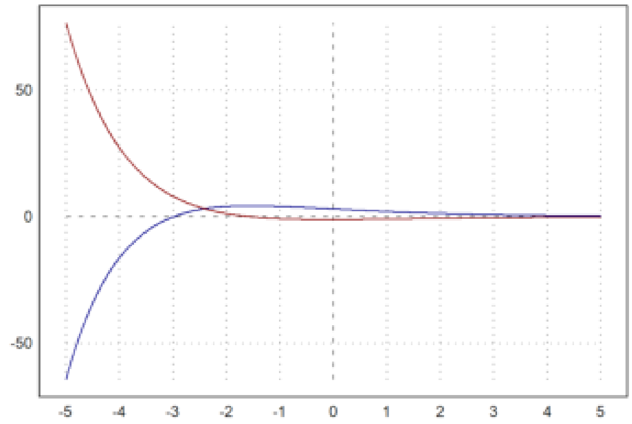

```
>function b(x)&= 3*x+5; function db(x) &= diff(b(x),x); plot2d(["b(x)","db(x)"],-5,5,color
```



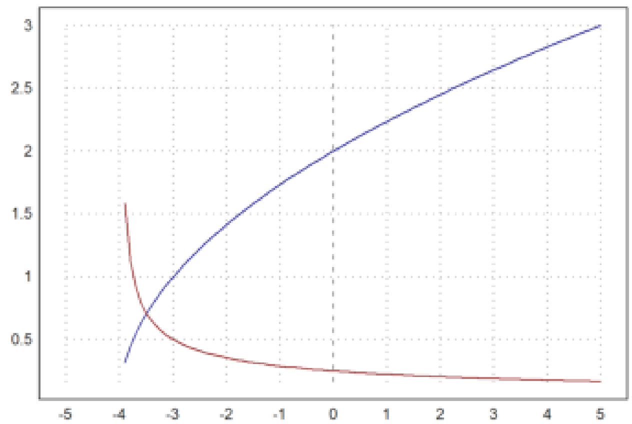

```
>function c(x)&= abs(4*x+7);function dc(x) &= diff(c(x),x); plot2d(["c(x)","dc(x)"],-5,5,c
```



```
>function d(x)&= (x+3)/(2^x);function dd(x) &= diff(d(x),x); plot2d(["d(x)","dd(x)"],-5,5,
```




```
>function f(x)&= sqrt(x+4); function df(x) &= diff(f(x),x); plot2d(["f(x)","df(x)"],-5,5,c
```



Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^{n}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx=\log \left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan x$$

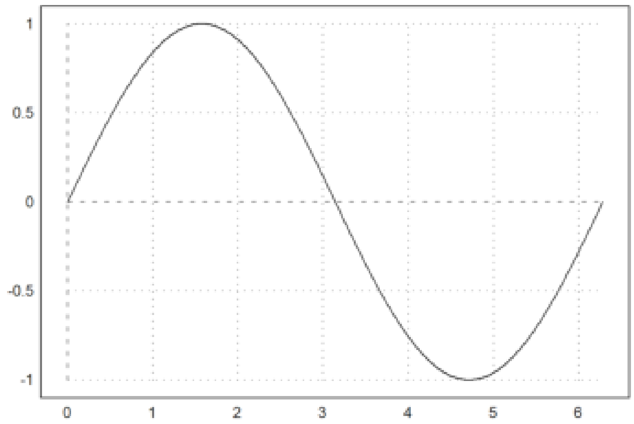
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b}\sin x\;dx=\cos a-\cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}x^{n}\;dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^{2}\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}x^{2}\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}x^{2}\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                                     2
                                  - x
                                 E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int {e^ {- x^2 }}{\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

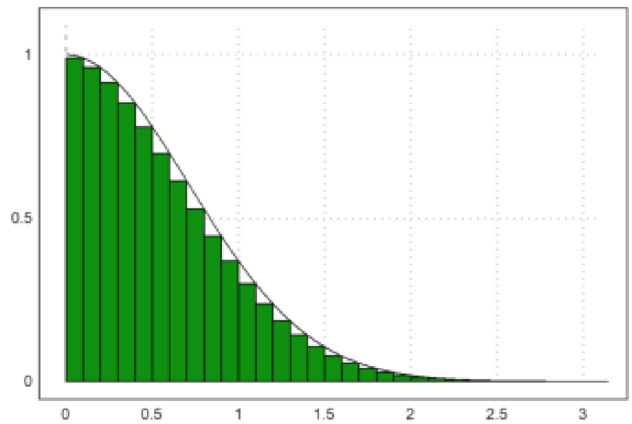
$$erf(x)=\int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

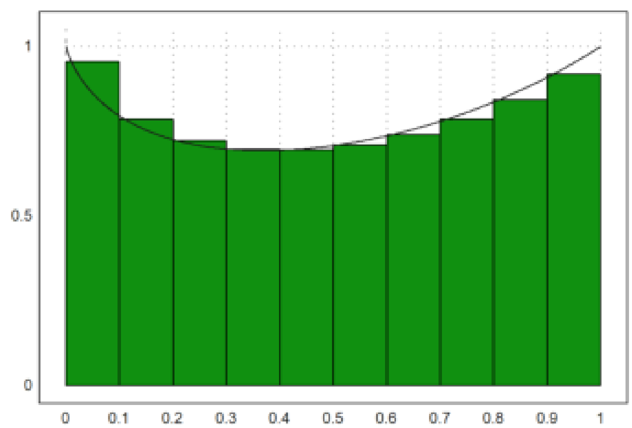
```
>function f(x) &= x^x
```

$$x^x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                  2     5
              sin  (3 x   + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
     1                          1               pi
    /                     gamma(-) sin(14) sin(--)
    [      2    5                5               10
    I  sin  (3 x   + 7) dx = ------------------------
    ]                                    1/5
    /                               10 6
     0
   4/5                  1          4/5                   1
 - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
                        5                                5
        4/5                      1
 sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                 5
     4/5                  1                       pi
 - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                          5                       10
```

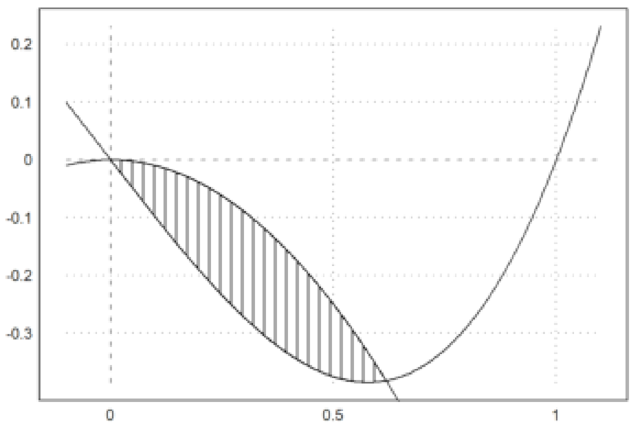
```
>&float(%)
```

```
     1.0
    /
    [       2      5
    I    sin  (3.0 x   + 7.0) dx =
    ]
    /
     0.0
0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
 (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
 (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
 + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
 + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$


```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurv
```




```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksa
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} , x=0 \right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\,dx=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

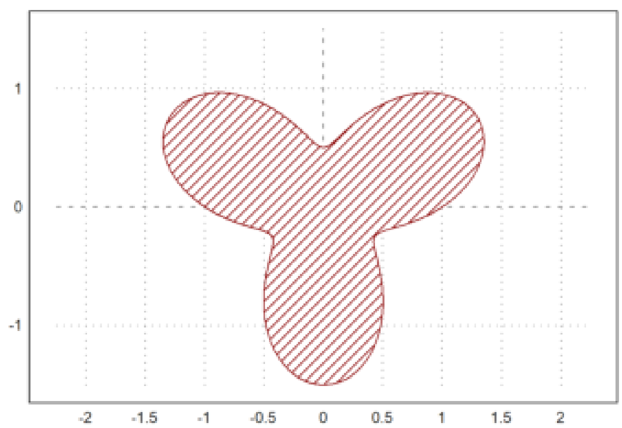
Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahul
```




```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$r\left([0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15,0.16,0.17,0.18,0.19,0.2,0.21,0.2200000000$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx\left([0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15,0.16,0.17,0.18,0.19,0.2,0.21,0.2200000000$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(\left[0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15,0.16,0.17,0.18,0.19,0.2,0.21,0.2200000000\right.\right.$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t ...
                                                       ^
```

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\int_{0}^{2\,\pi}{ds\left(x\right)\;dx}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

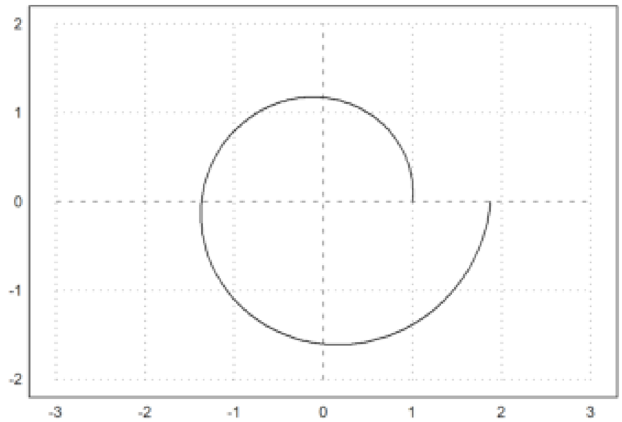
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
Function ds not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: ds(x)
 %mapexpression1:
    return expr(x,args());
Error in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

Spiral Logaritmik

$$x=e^{ax}\cos x,\;y=e^{ax}\sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```




```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx\left([0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15,0.16,0.17,0.18,0.19,0.2,0.21,0.2200000000$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$fy\left([0,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15,0.16,0.17,0.18,0.19,0.2,0.21,0.2200000000$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t ...
                                                     ^
```

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration cannot be a constant; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral) ...
                              ^
```

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

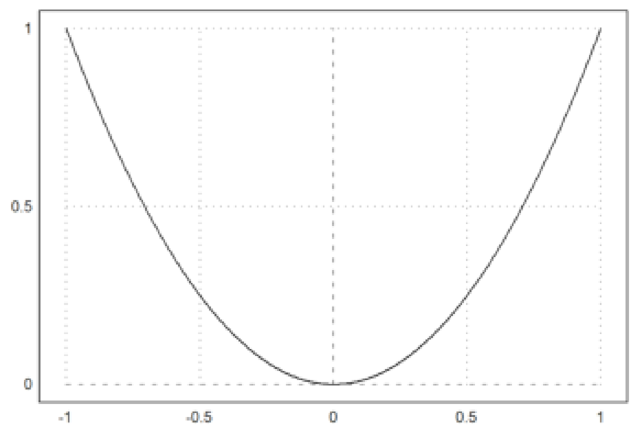
```
Function S not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1 ...
        ^
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



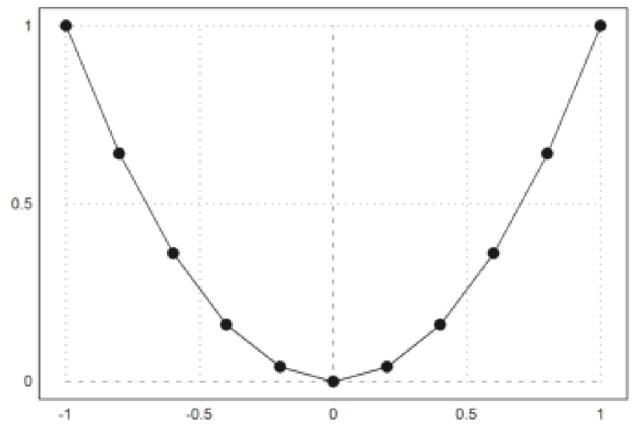

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\operatorname{asinh}2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}{\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx}=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

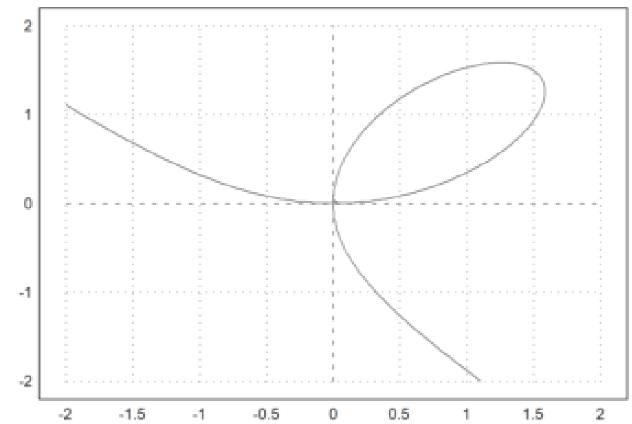
Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

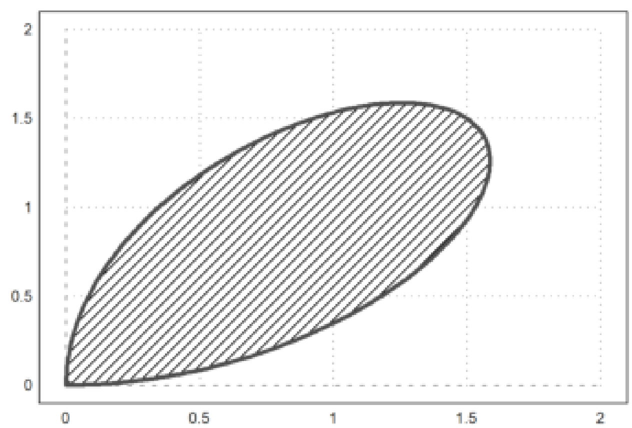
$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1} , x=0\right]$$

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1} , x=0\right]$$

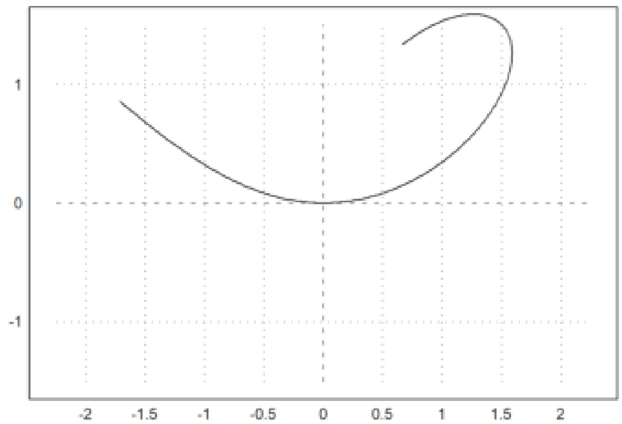
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds\left(l\right)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

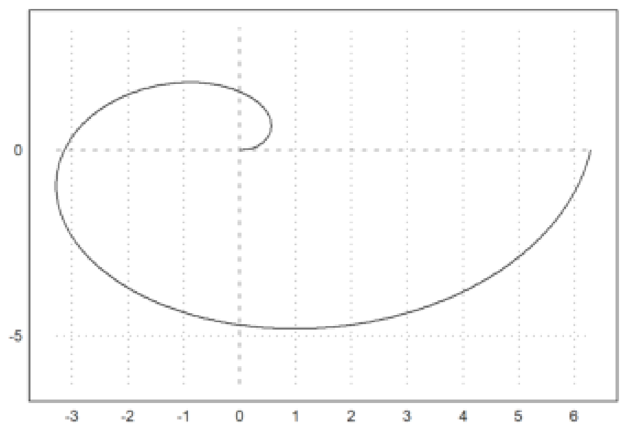
Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```




```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                2                2
sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhi
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

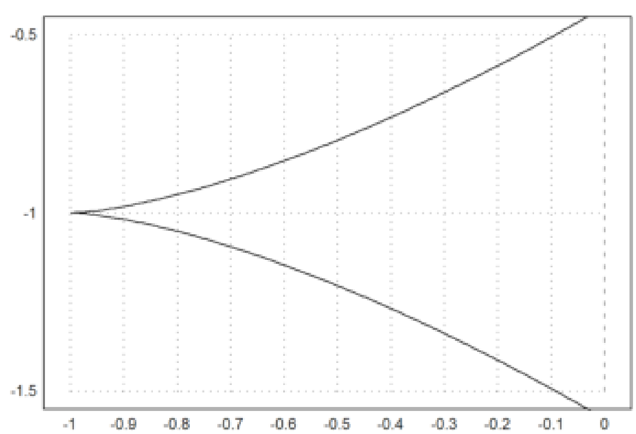
$$\frac{\operatorname{asinh}\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```



```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258}{x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\;dx}=2.337835372767141$$

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258}{x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\;dx}=2.337835372767141$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
          [0, 1.66665833335744e-7 r, 1.33330666692022e-6 r,
  4.499797504338432e-6 r, 1.066581336583994e-5 r,
  2.083072932167196e-5 r, 3.599352055540239e-5 r,
  5.71526624672386e-5 r, 8.530603082730626e-5 r,
  1.214508019889565e-4 r, 1.665833531718508e-4 r,
  2.216991628251896e-4 r, 2.877927110806339e-4 r,
  3.658573803051457e-4 r, 4.568853557635201e-4 r,
  5.618675264007778e-4 r, 6.817933857540259e-4 r,
  8.176509330039827e-4 r, 9.704265741758145e-4 r,
  0.001141105023499428 r, 0.001330669204938795 r,
  0.001540100153900437 r, 0.001770376919130678 r,
  0.002022476464811601 r, 0.002297373572865413 r,
  0.002596040745477063 r, 0.002919448107844891 r,
  0.003268563311168871 r, 0.003644351435886262 r,
  0.004047774895164447 r, 0.004479793338660443 r, 0.0049413635565565 r,
  0.005433439383882244 r, 0.005956971605131645 r,
  0.006512907859185624 r, 0.007102192544548636 r,
  0.007725766724910044 r, 0.00838456803503801 r,
  0.009079530587017326 r, 0.009811584876838586 r, 0.0105816576913495 r,
```

```
0.01139067201557714 r, 0.01223954694042984 r, 0.01312919757078923 r,
0.01406053493400045 r, 0.01503446588876983 r, 0.01605189303448024 r,
0.01711371462093175 r, 0.01822082445851714 r, 0.01937411182884202 r,
0.02057446139579705 r, 0.02182275311709253 r, 0.02311986215626333 r,
0.02446665879515308 r, 0.02586400834688696 r, 0.02731277106934082 r,
0.02881380207911666 r, 0.03036795126603076 r, 0.03197606320812652 r,
0.0336389770872163 r, 0.03535752660496472 r, 0.03713253989951881 r,
0.03896483946269502 r, 0.0408552420577305 r, 0.04280455863760801 r,
0.04481359426396048 r, 0.04688314802656623 r, 0.04901401296344043 r,
0.05120697598153157 r, 0.05346281777803219 r, 0.05578231276230905 r,
0.05816622897846346 r, 0.06061532802852698 r, 0.0631303649963022 r,
0.06571208837185505 r, 0.06836123997666599 r, 0.07107855488944881 r,
0.07386476137264342 r, 0.07672058079958999 r, 0.07964672758239233 r,
0.08264390910047736 r, 0.0857128256298576 r, 0.08885417027310427 r,
0.09206862889003742 r, 0.09535688002914089 r, 0.0987195948597075 r,
0.1021574371047232 r, 0.1056710629744951 r, 0.1092611211010309 r,
0.1129282524731764 r, 0.1166730903725168 r, 0.1204962603100498 r,
0.1243983799636342 r, 0.1283800591162231 r, 0.1324418995948859 r,
0.1365844952106265 r, 0.140808431699002 r, 0.1451142866615502 r,
0.1495026295080298 r, 0.1539740213994798 r]
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
        [0, 4.999958333473664e-5 r, 1.999933334222437e-4 r,
4.499662510124569e-4 r, 7.998933390220841e-4 r,
0.001249739605033717 r, 0.00179946006479581 r,
0.002448999746720415 r, 0.003198293697380561 r,
0.004047266988005727 r, 0.004995834721974179 r,
0.006043902043303184 r, 0.00719136414613375 r, 0.00843810628521191 r,
0.009784003787362772 r, 0.01122892206395776 r, 0.01277271662437307 r,
0.01441523309043924 r, 0.01615630721187855 r, 0.01799576488272969 r,
0.01993342215875837 r, 0.02196908527585173 r, 0.02410255066939448 r,
0.02633360499462523 r, 0.02866202514797045 r, 0.03108757828935527 r,
0.03361002186548678 r, 0.03622910363410947 r, 0.03894456168922911 r,
0.04175612448730281 r, 0.04466351087439402 r, 0.04766643011428662 r,
0.05076458191755917 r, 0.0539576564716131 r, 0.05724533447165381 r,
0.06062728715262111 r, 0.06410317632206519 r, 0.06767265439396564 r,
0.07133536442348987 r, 0.07509094014268702 r, 0.07893900599711501 r,
0.08287917718339499 r, 0.08691105968769186 r, 0.09103425032511492 r,
0.09524833678003664 r, 0.09955289764732322 r, 0.1039475024744748 r,
0.1084317118046711 r, 0.113005077220716 r, 0.1176671413898787 r,
0.1224174381096274 r, 0.1272554923542488 r, 0.1321808203223502 r,
0.137192929485239 1 r, 0.1422913186361759 r, 0.1474754779404944 r,
0.152744888986584 r, 0.1580990248377314 r, 0.1635373500848132 r,
0.1690593208998367 r, 0.1746643850903219 r, 0.1803519821545206 r,
0.1861215433374662 r, 0.1919724916878484 r, 0.1979042421157076 r,
0.2039162014509444 r, 0.2100077685026351 r, 0.216178334119151 r,
0.2224272812490723 r, 0.2287539850028937 r, 0.2351578127155118 r,
0.2416381240094921 r, 0.2481942708591053 r, 0.2548255976551299 r,
0.2615314412704124 r, 0.2683111311261794 r, 0.2751639892590951 r,
0.2820893303890569 r, 0.2890864619877229 r, 0.2961546843477643 r,
0.303293290652834 9 r, 0.3105015670482534 r, 0.3177787927123868 r,
0.3251242399287333 r, 0.3325371741586922 r, 0.3400168541150183 r,
```

```
0.3475625318359485 r, 0.3551734527599992 r, 0.3628488558014202 r,
0.3705879734263036 r, 0.3783900317293359 r, 0.3862542505111889 r,
0.3941798433565377 r, 0.4021660177127022 r, 0.4102119749689023 r,
0.418316910536117 r, 0.4264800139275439 r, 0.4347004688396462 r,
0.4429774532337832 r, 0.451310139418413 r]
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

```
Error : [0,1.66665833335744e-7*r-sin(1.66665833335744e-7*r),1.33330666692022e-6*r-sin(1.

Error generated by error() command

adaptiveeval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n;args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+ diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+ diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(d ...
                                                ^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds;
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found errexp1
#0: showev(f='integrate(ds,[0,1.66665833335744e-7*r,1.33330666692022e-6*r,4.499797504338
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...
                                 ^
```

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
Illegal function result in map.
 %evalexpression:
     if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
     if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
     t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
     return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
Did you want to create a symbolic expression?
Then start with &.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
romberg:
     if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                         ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T'(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \gamma'(s), \\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0 \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}. \end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panja
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... =integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen ...
                                                      ^
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terha
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad &(\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{\left(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t, \; y = f(t), \;\; \text{dengan } x'(t) = 1, \; x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add)
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```

```
Error : f(x) does not produce a real or column vector

Error generated by error() command

 %ploteval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:
Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y) ...
                    ^
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvat
```

$k\left(\left[0, 1.666658333335744 \times 10^{-7}\,r, 1.33330666692022 \times 10^{-6}\,r, 4.499797504338432 \times 10^{-6}\,r, 1.066581336583994 \times 10^{-5}\,r, 2.08\right.\right.$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x)^2\,dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

```
>function a(x)&= x^2*sin(x); $a(x)
```

$$x^2 \sin x$$

```
>function b(x):= exp(x)*cos(x)
>function c(x):= log(x)/x
>function d(x):= sqrt(1 - x^2)
>function e(x):= 1/(1 + x^2)
```

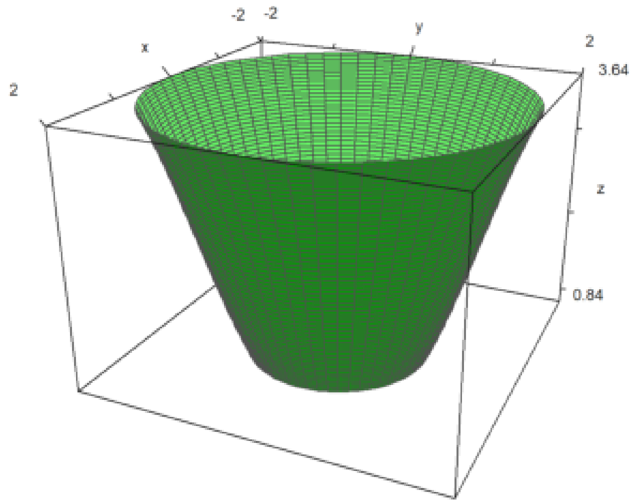
Volume Benda yang terbentuk dari a(x)

```
>$showev('integrate(2*pi*(a(x))^2,x,0,pi))
```

$$2\,\pi \int_{0}^{\pi}{x^4\,\sin ^2x\;dx}=\frac{\pi\,\left(2\,\pi^5-10\,\pi^3+15\,\pi\right)}{10}$$

Gambar Ilustrasi dari benda yang terbentuk

```
>plot3d("a(x)",2,0,2,rotate=2):
```



Menghitung panjang kurva

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

```
>function d(x)&= \sqrt(1-x^2); $d(x)
```

$$\sqrt{1 - x^2}$$

```
>function dd(x) &= diff(d(x),x);$dd(x)
```

$$-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

```
>$showev('integrate(sqrt((1+dd(x)^2)),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}+1}\;dx}=\frac{\pi}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{1.0}{\sqrt{\frac{x^2}{1.0-1.0\,x^2}+1.0}\;dx}=1.570796326794897$$

Menentukan integral tentu dengan batas [-1,3] dari fungsi

$$e(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

```
>function map e(x) &= (1)/(1+x^2); $e(x)
```

$$\frac{1}{x^2+1}$$

```
>$showev('integrate(e(x),x,2,3)), $float(%)
```

$$\int_{2.0}^{3.0} \frac{1}{x^2+1.0}\, dx = 0.141897054604164$$

$$\int_{2.0}^{3.0} \frac{1}{x^2+1.0}\, dx = 0.141897054604164$$

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

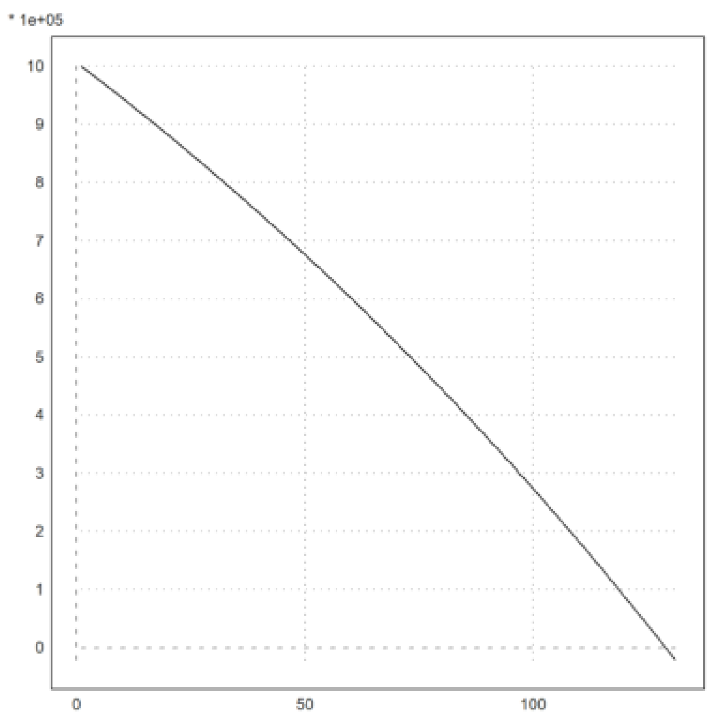
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
         1000
         1050
       1102.5
      1157.63
      1215.51
      1276.28
       1340.1
       1407.1
      1477.46
      1551.33
      1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,   994,   987.98,   981.93,   975.86,   969.76,   963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,   1998,   1995.99,   1993.97,   1991.95,   1989.92,   1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,   2500,   2500,   2500,   2500,   2500,   2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,   3002,   3004.01,   3006.03,   3008.05,   3010.08,   3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

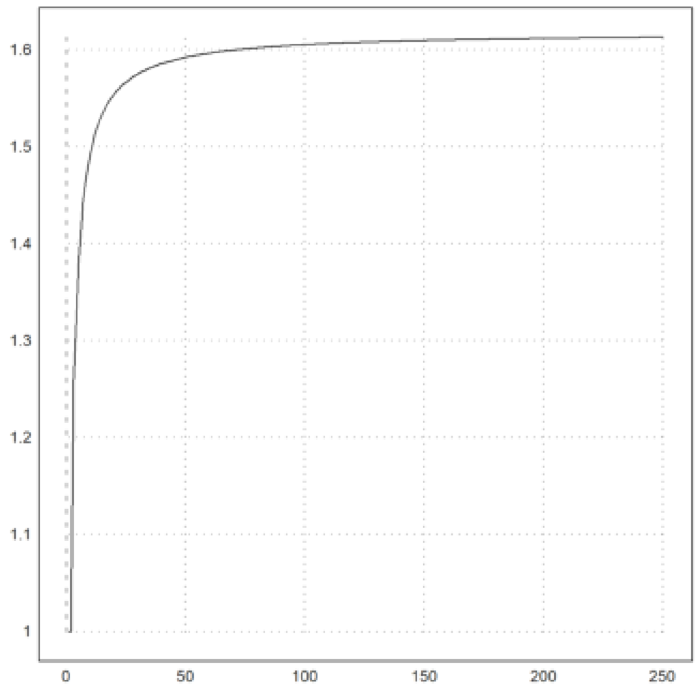
```
[1,   1,   2,   3,   5,   8,   13,   21,   34,   55,   89,   144,   233,   377,   610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
 Real 2 x 6 matrix

           1            2            5            13      ...
           1            3            8            21      ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
 Real 2 x 6 matrix

           1            5            13           34      ...
           1            8            21           55      ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

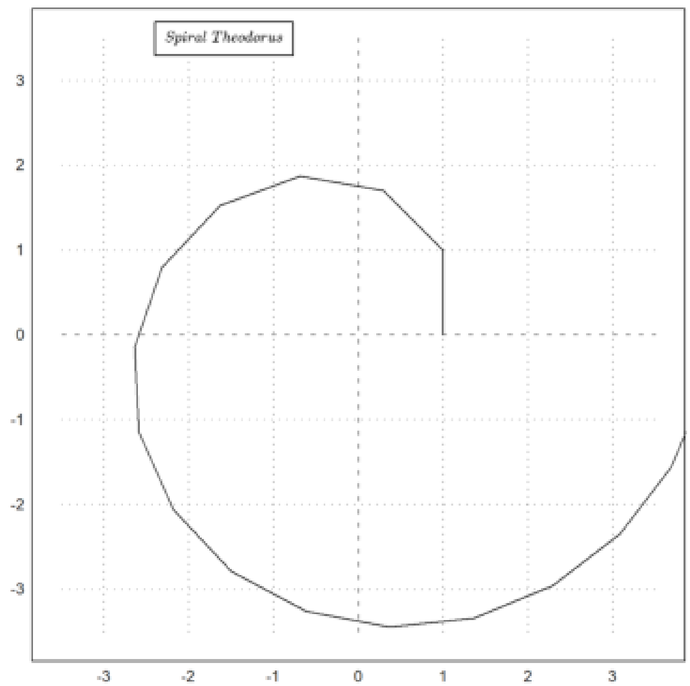
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

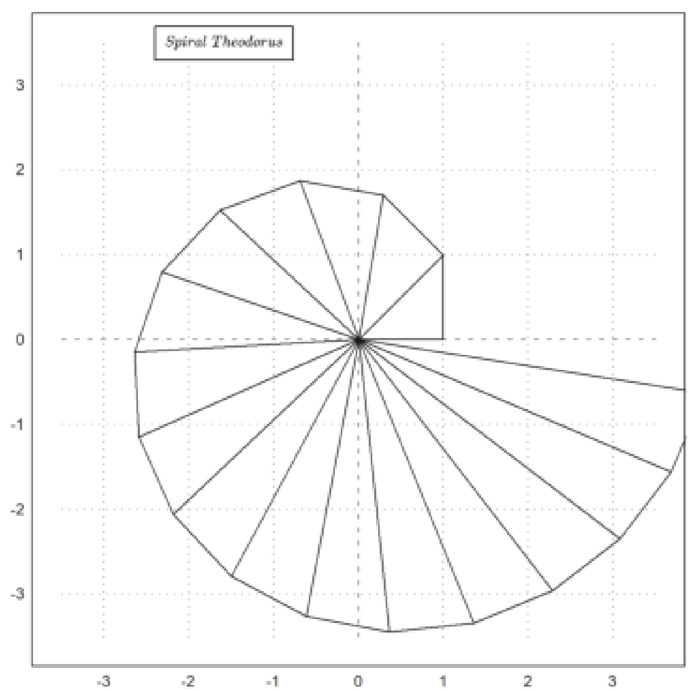
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```




```
>
```

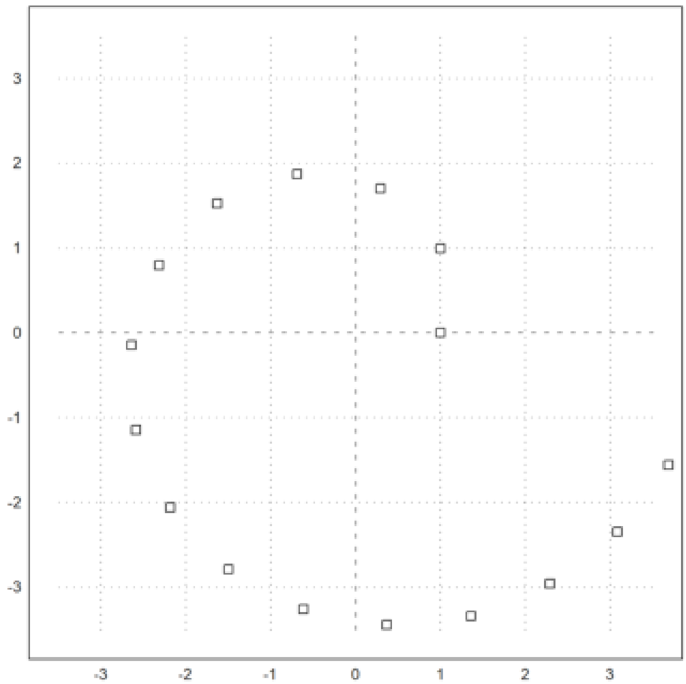
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
      2.60401
      2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
            1             3       2.61803       2.60403       2.60401
            5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.999999999999999778,1.00000000000000022~      ...
~4.99999999999999911,5.00000000000000089~      ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

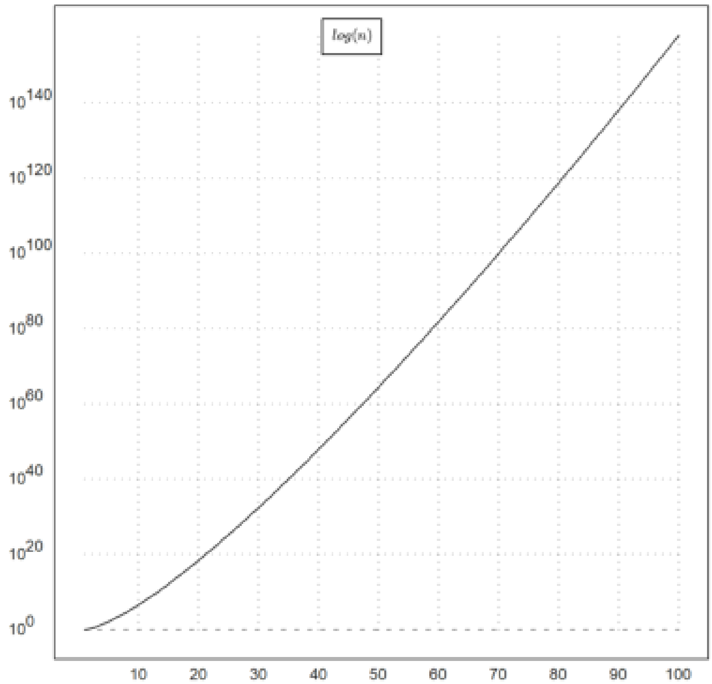
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
-7.09677
-7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

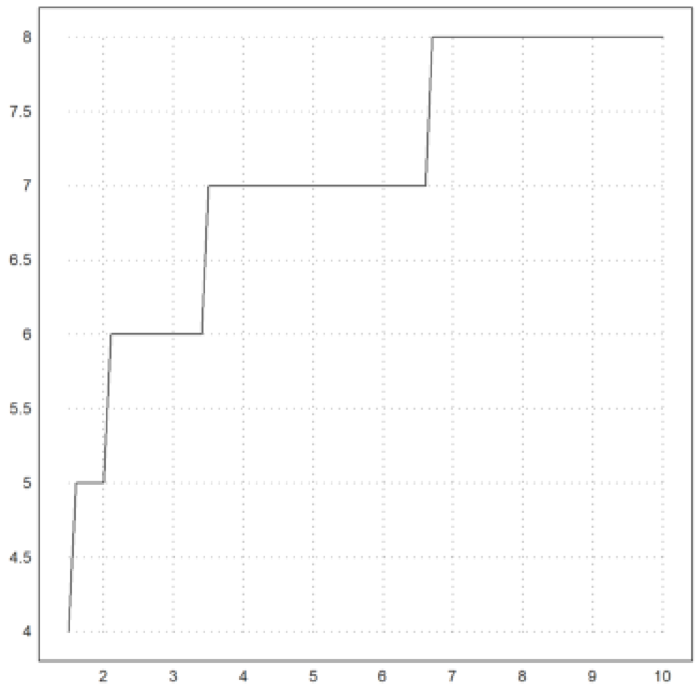
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,   5,   5,   5,   5,   5,   6,   6,   6,   6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,   2,   3.4,   6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton ...
                                   ^
```

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

```
Function newton needs at least 3 arguments!
Use: newton (f$: call, df$: call, x: scalar complex {, y: number, eps: none})
Error in:
...  x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z); ...
                                                     ^
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
Maxima said:
solve: more equations than unknowns.
Unknowns given :
[r]
Equations given:
errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
z=&solve(p)() ...
           ^
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```

```
Variable W not found!
Error in:
C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1) ...
                    ^
```

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

```
                                 true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // baris ...
                                             ^
```

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi ters
```

```
Maxima said:
length: argument cannot be a symbol; found deret
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxm2str:
    n=mxmeval("length(VVV)");
```

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

```
deret is not a variable!
Error in expression: deret[1]
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    u=u_(%ploteval(xx[#],t;args()));
```

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\frac{\ldots 4333077512\,r)}{5}, \left[0, \sin(0.1495626293338579\ldots r) \times 10^{-7}\, r) + \frac{\sin(0.2990052\ldots r)}{2} + \frac{\ldots 14881}{2} + \frac{\sin(0.448507885\ldots)}{3} + \frac{\ldots 4.0899975\ldots r)}{3} + \frac{\sin(0.598010518\ldots 321194)}{4} + \ldots (6.66663 \ldots \right.$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y = \sin(x) + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.$$

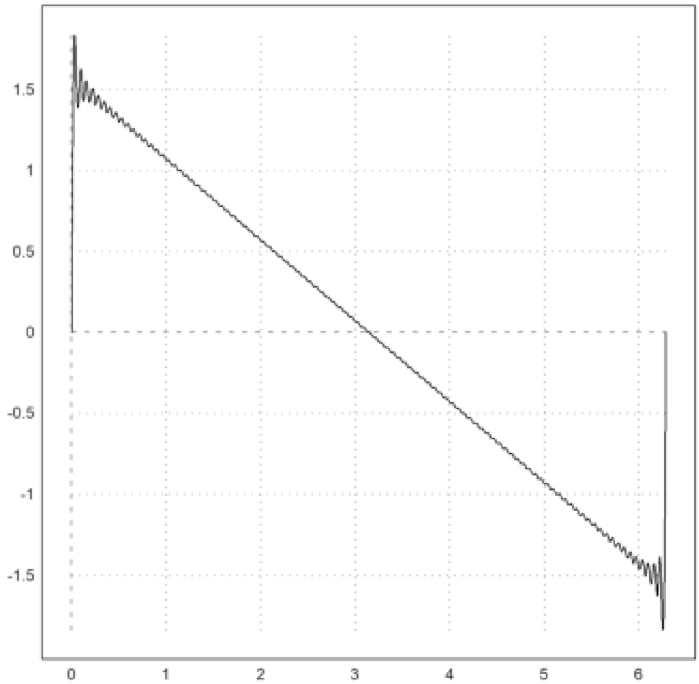
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```

```
Maxima output too long!
Error in:
plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi): ...
                                              ^
```

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
#0: diffat(expr=[0,1.666658333335744e-7*r,1.333306666692022e-6*r,4.499797504338432e-6*r,1.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

 %mxmevtable:
    return mxm("@expr,@var=@value")();
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmtable:
    y[#,1]=%mxmevtable(expr,var,x[#]);
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(1+n)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{-1+k}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
> $'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}=\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}{\frac{1}{n!}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

```
Answering "Is -94914474571+15819*r positive, negative or zero?" with "positive"
Maxima said:
sum: sum is divergent.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs ...
                                                     ^
```

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\left[0,\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(1.666658333335744\times10^{-7}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(1.33330666692022\times10^{-6}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{\left(4.499797504338432\times10^{-6}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}},\sum_{k=0}^{\infty}{\left(1.0\right.}$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\left[0, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1.66665833335744\times 10^{-7}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1.33330666692022\times 10^{-6}\right)^{k}\,r^{k}}{k!}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(4.499797504338432\times 10^{-6}\right.}{k!}\right.$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\left(n\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{-k+k^2}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{-k+k^2}=\frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100}\frac{1}{-k+k^2}=\frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x= ...
                              ^$
```

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1$
```

```
Maxima said:
log: encountered log(0).
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
 $'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1 ...
                             ^$
```

Nama: Pradika Larasati
Kelas: Matematika B
NIM: 23030630003

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
```

```
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pad
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)^2 dengan
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a,
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga titik dan gambarkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Lalu tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garisnya adalah [a,b,c] yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A di BC.

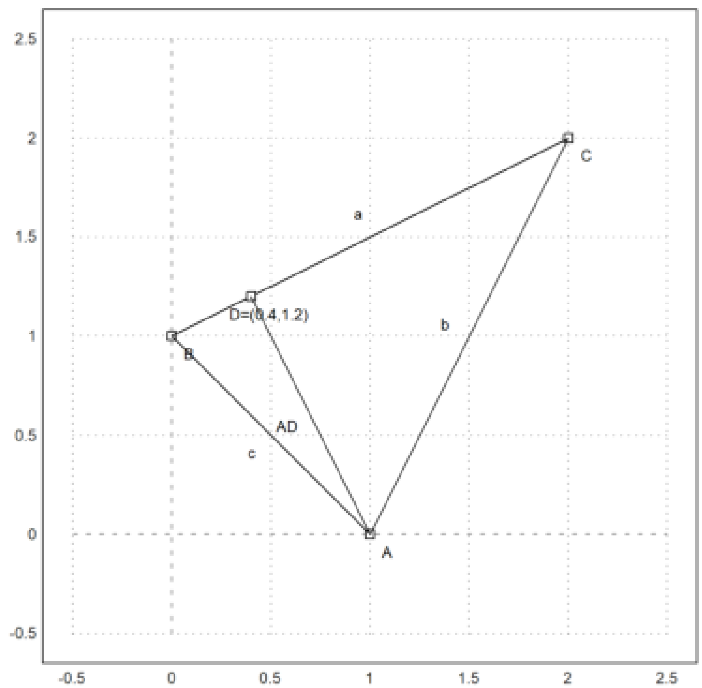
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan SM.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Rencanakan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

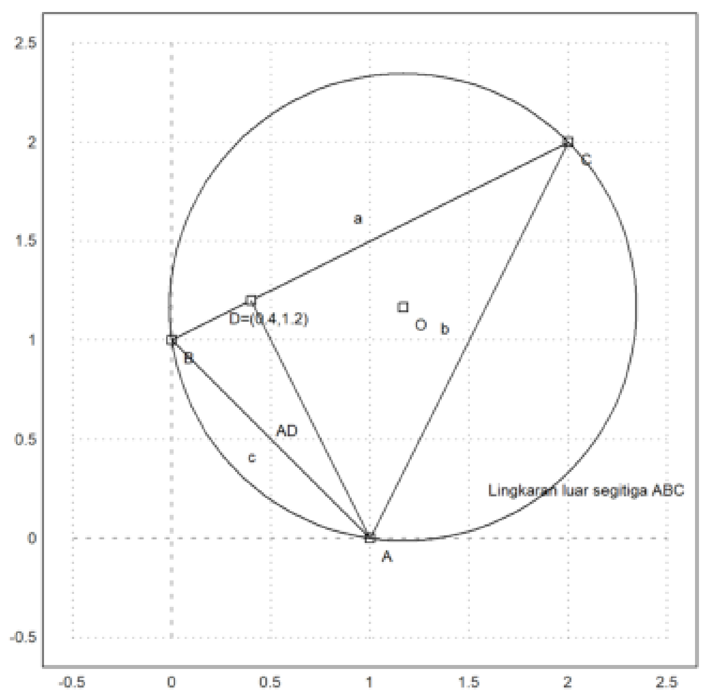
Sudut di C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

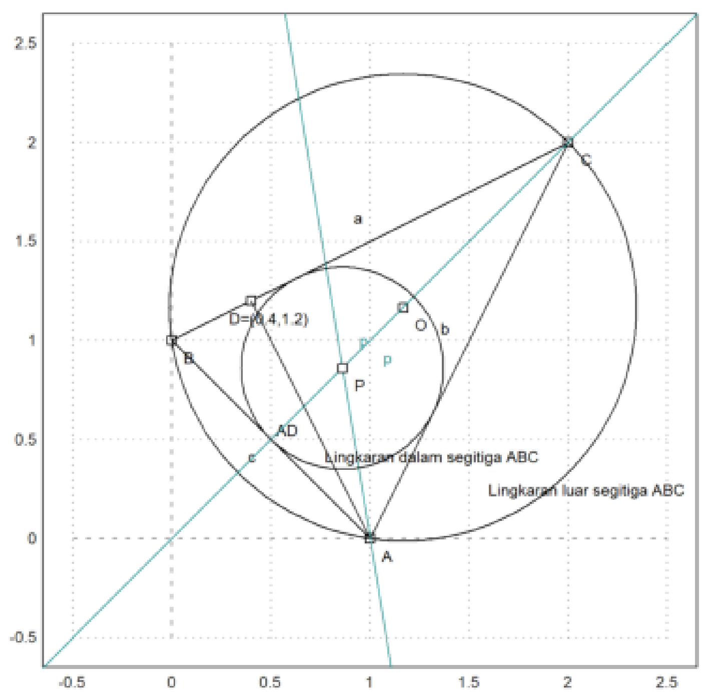
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

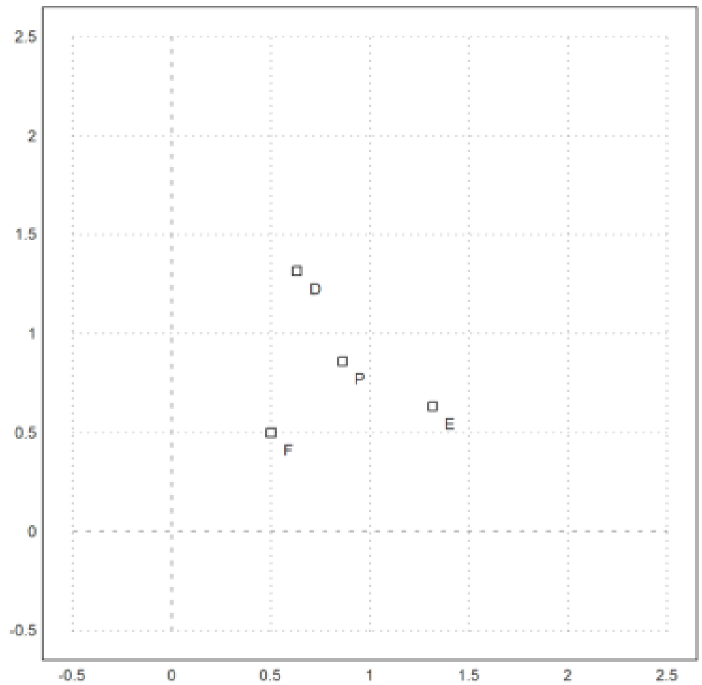
```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```



Latihan

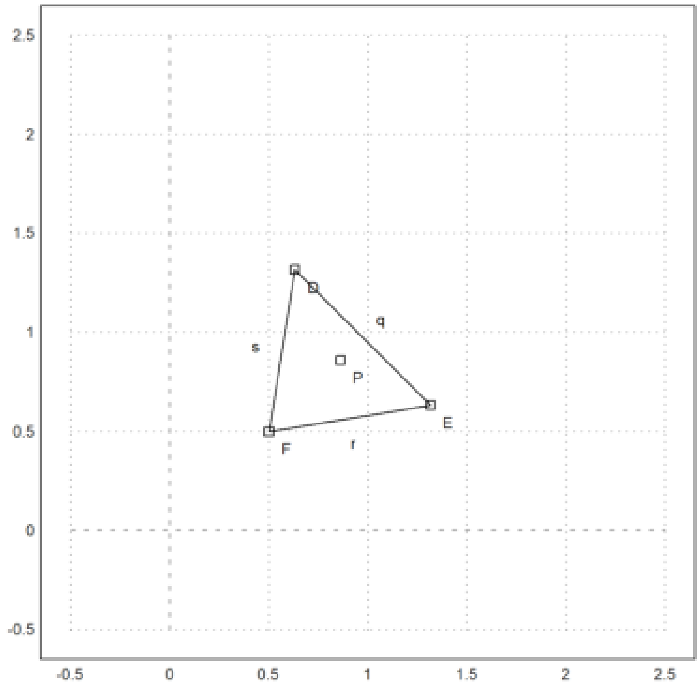
1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);
>p:=circleWithCenter(P,r); plotPoint(P,"P")
>D= lineCircleIntersections(lineThrough(B,C), p); plotPoint(D,"D");
>E=lineCircleIntersections(lineThrough(A,C), p); plotPoint(E,"E");
>F=lineCircleIntersections(lineThrough(B,A), p); plotPoint(F,"F"):
```



2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(D,E,"q")
>plotSegment(E,F,"r")
>plotSegment(F,D,"s")
>aspect(1):
```



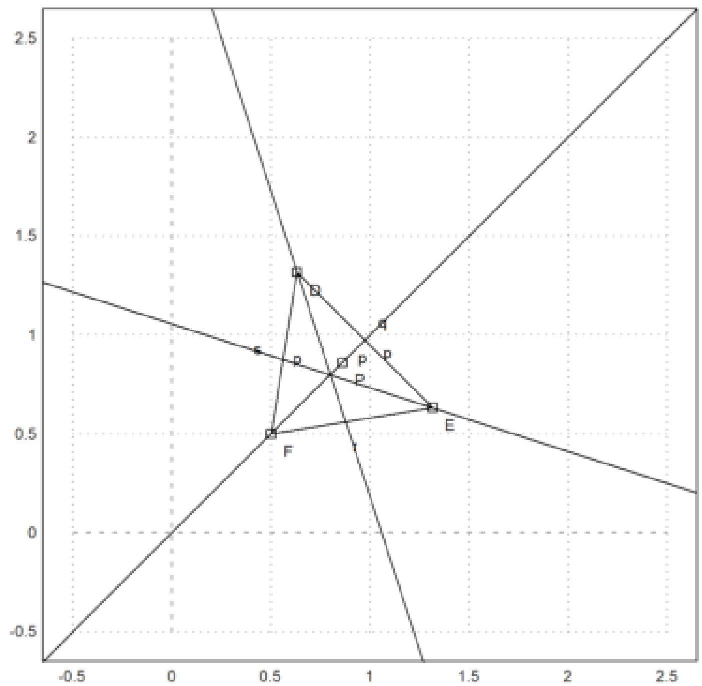
3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>areaTriangle(D,E,F)
```

```
0.324341649025
```

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>l:=angleBisector(D,E,F);
>g:=angleBisector(E,F,D);
>k:=angleBisector(F,D,E);
>plotLine(l), plotLine(g), plotLine(k):
```



Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC")
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC")
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>lineThrough(A,C)
```

```
[-2,  1,  -2]
```

```
>lineThrough(B,A)
```

```
[1,  1,  1]
```

```
>O=getCircleCenter(c)
```

```
[1.16667,  1.16667]
[1.16667,  1.16667]
```

```
>r1:=distance(O,A)
```

```
1.17851130198
```

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

```
>pi*(r^2)//luas lingkaran dalam segitiga ABC
```

```
0.81601903655
```

```
>pi*(r1)^2//luas lingkaran luar segitiga ABC
```

```
4.36332312999
```

```
>areaTriangle(A,B,C)
```

```
1.5
```

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran berfungsi sama seperti fungsi Euler, namun menyediakan komputasi simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalu
```

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2   6
[-, -]
 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
 [0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

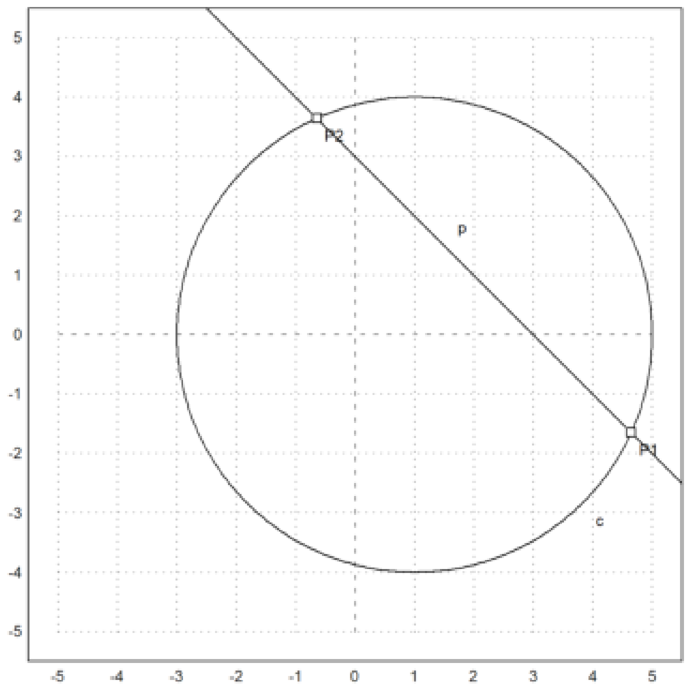
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Begitu pula di Maxima

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

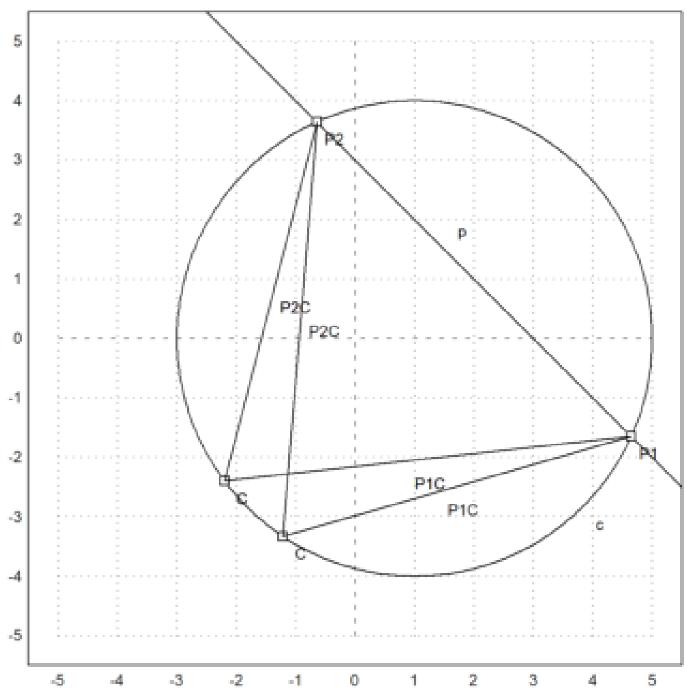
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```

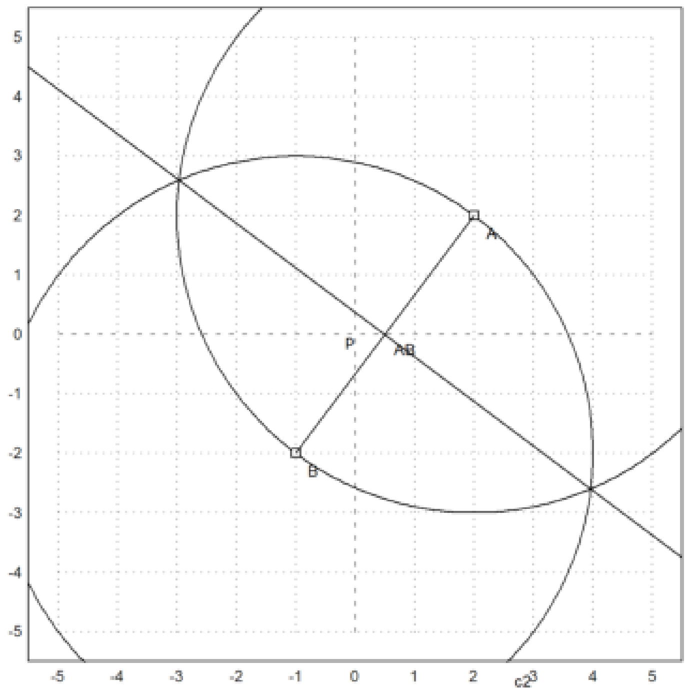


Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita memecahkan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

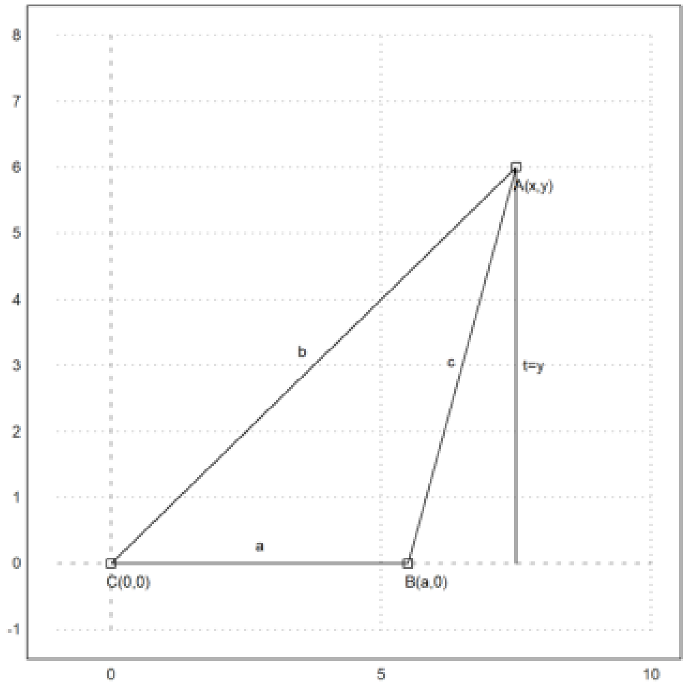
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                   2     2     2
                - c  + b  + a
          [[x = ---------------, y = 
                      2 a
             4      2  2      2  2    4      2  2    4
     sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
   - --------------------------------------------------],
                           2 a
           2     2     2
        - c  + b  + a
   [x = ---------------, y = 
             2 a
           4      2  2      2  2    4      2  2    4
   sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
   --------------------------------------------------]]
                         2 a
```

Ekstrak solusi y

```
>ysol &= y with sol[2][2] $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
        sqrt((- c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a))
    y = -------------------------------------------------------
                                  2 a
```

Kami mendapatkan rumus Heron

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas=\frac{3\,\sqrt{39}}{4}$$

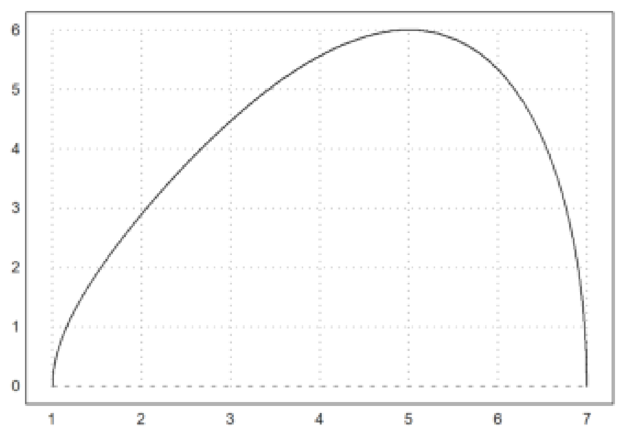
Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
6
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>  aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x
```



Kasus umum juga berfungsi

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2} , c=\sqrt{b^2+a^2} , c=0 \right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{\left(d-c\right)^2-c^2+a^2}{2\,a} , y=\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan buat fungsi ini

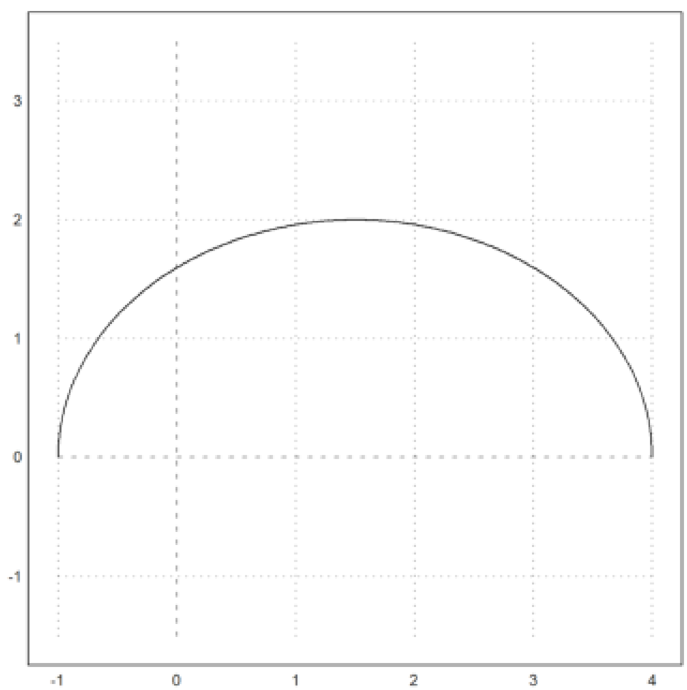
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d
```

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 sampai 4. Diketahui bahwa kita memperoleh elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



We can check the general equation for this ellipse, i.e.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal jika segitiga tersebut sama sisi. Kami ingin memperolehnya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,b)}{8}=0, \frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,a)}{8}=0\right]$$

Kita mendapatkan nilai minimum yang dimiliki oleh segitiga dengan salah satu sisinya 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3}, b=\frac{d}{3}\right], \left[a=0, b=\frac{d}{2}\right], \left[a=\frac{d}{2}, b=0\right], \left[a=\frac{d}{2}, b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                         d      d
          [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                         2      2
      d             d                d      d
  [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
      2             2                2      2
                                3
      d      d      d          d
  [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
      3      3      3         108
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

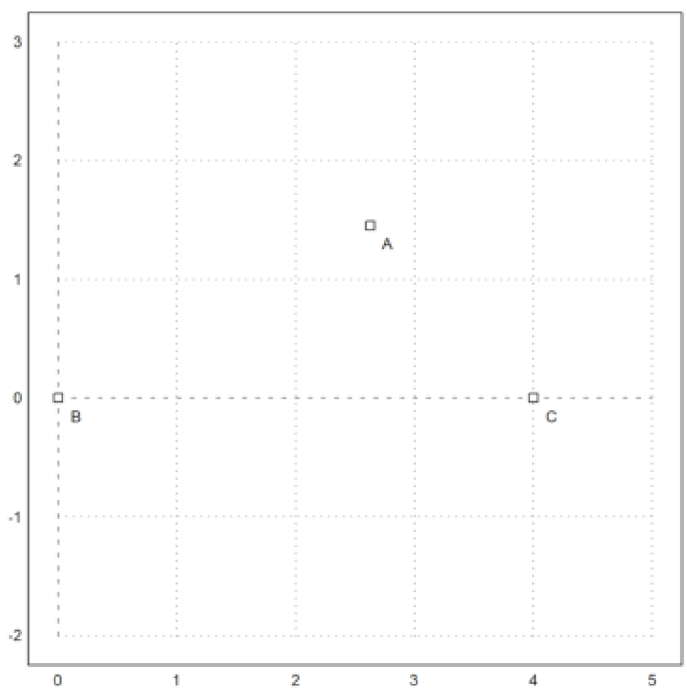
$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a} , \frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a,0]$$

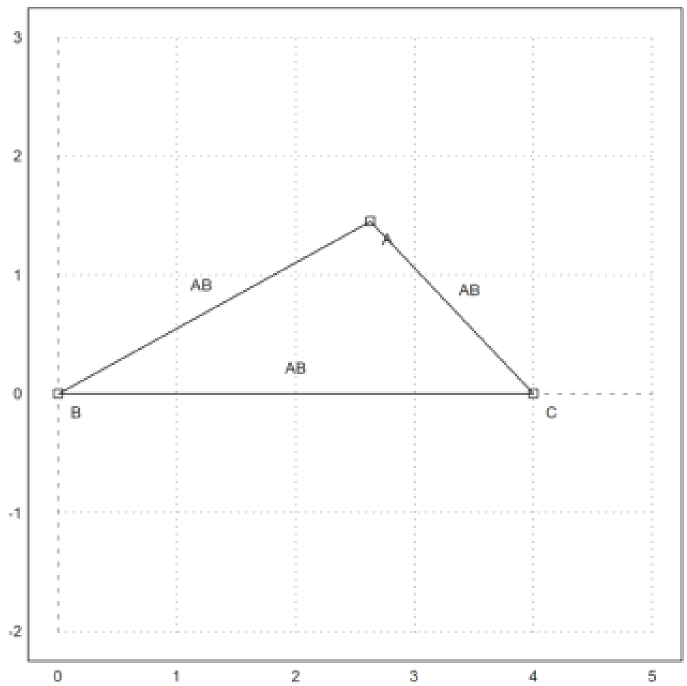
Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmennya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung garis tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkarannya.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

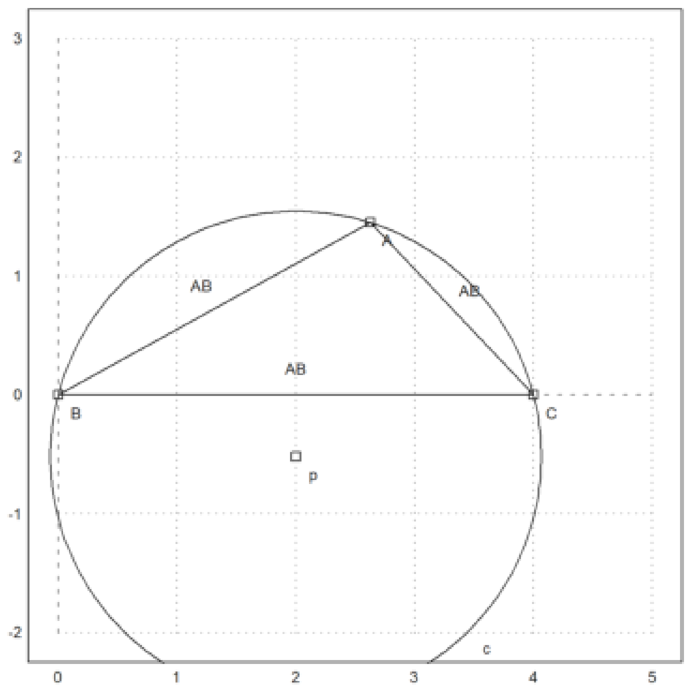
Kita mendapatkan rumus jari-jari lingkaran luar.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa cek, apakah ini benar adanya pada Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain ortocenter, sirkumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

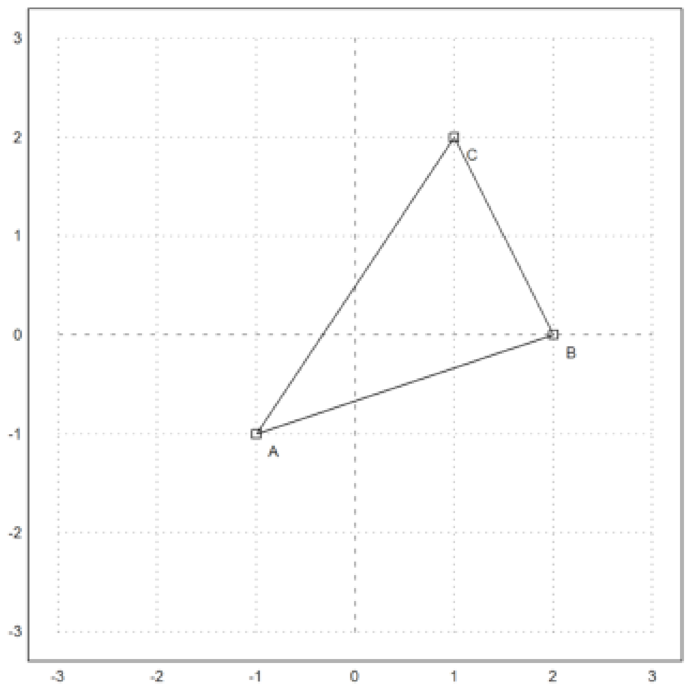
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

```
> plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kami harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

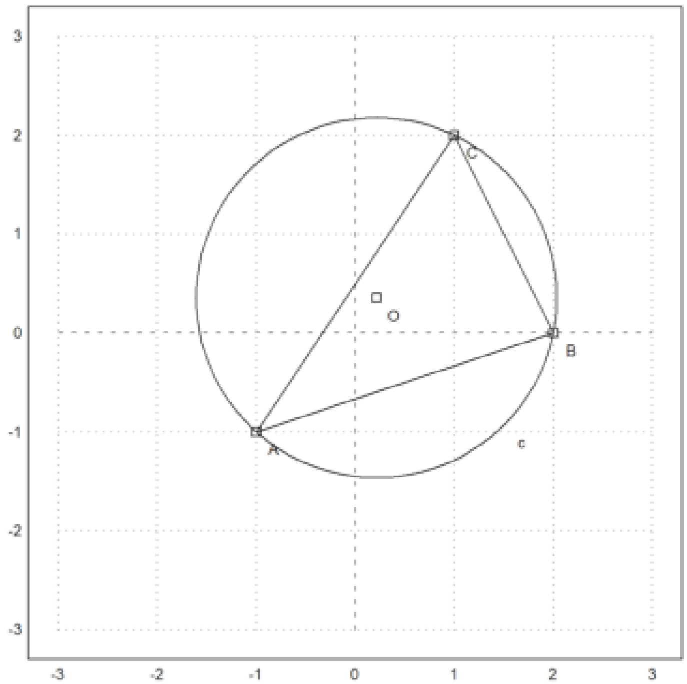
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

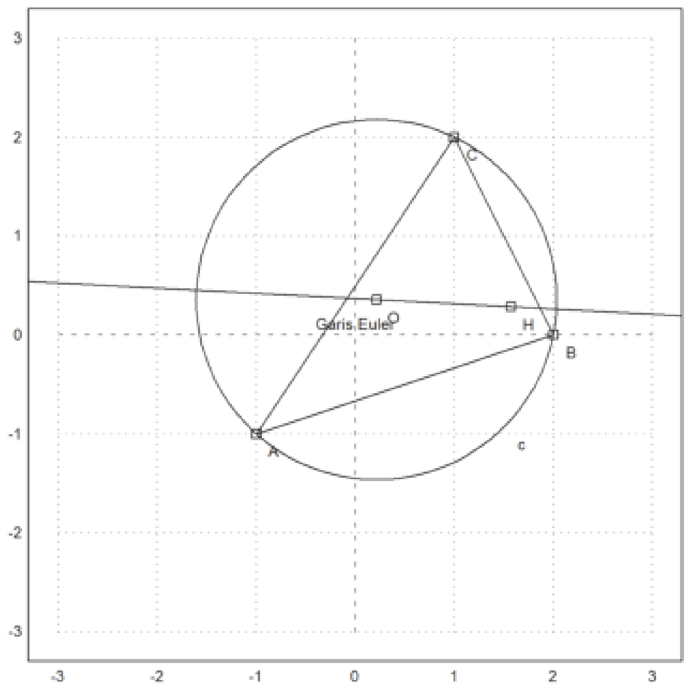
Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

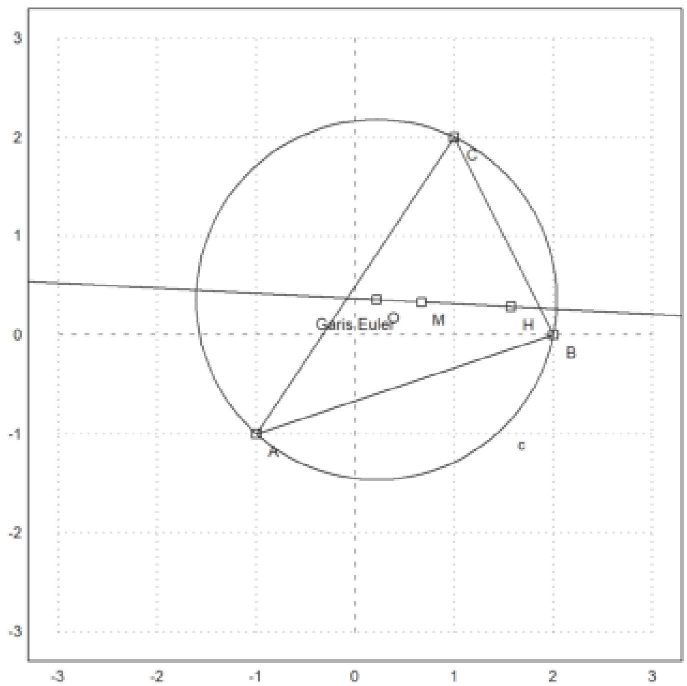


Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

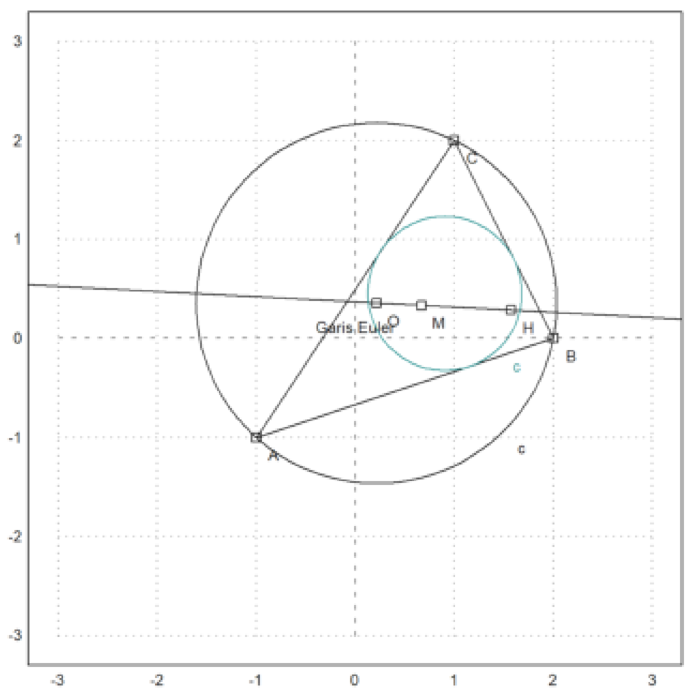
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

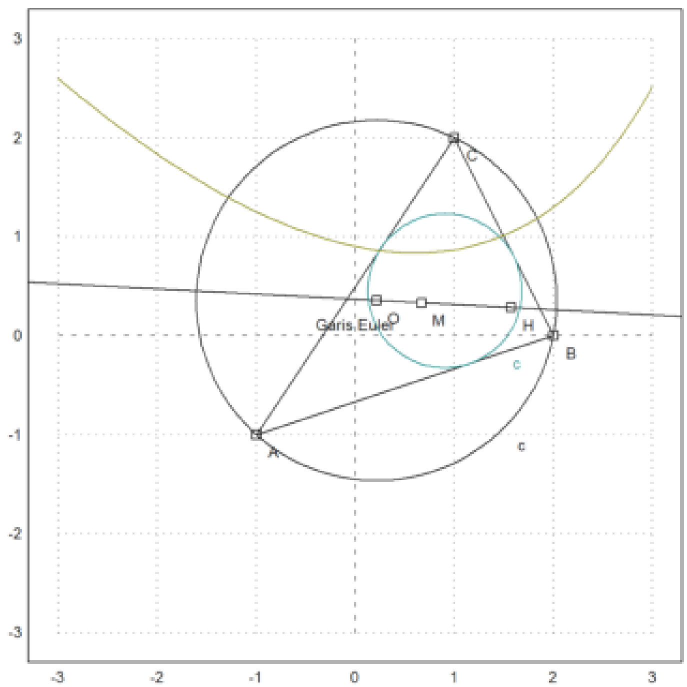
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

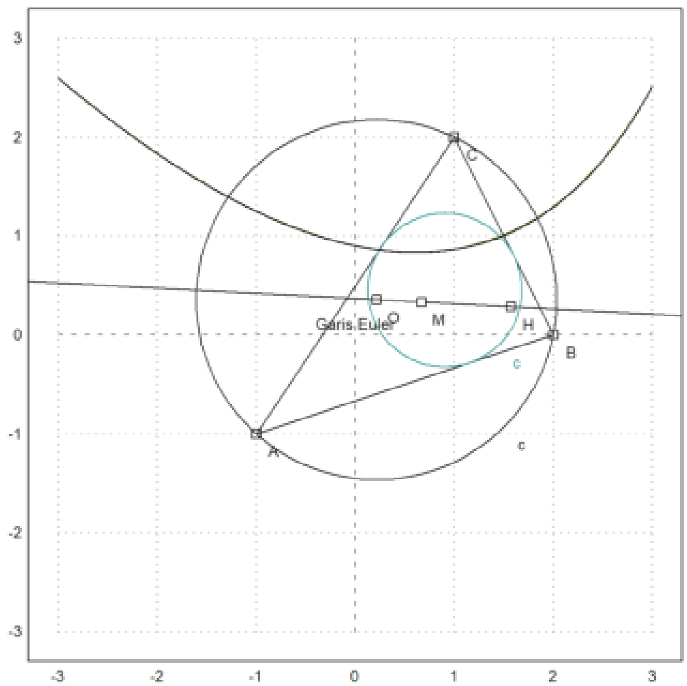
```
        [y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                              y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

$$akar_1$$

Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

```
>
```

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan penyebaran. Dengan menggunakan hal ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

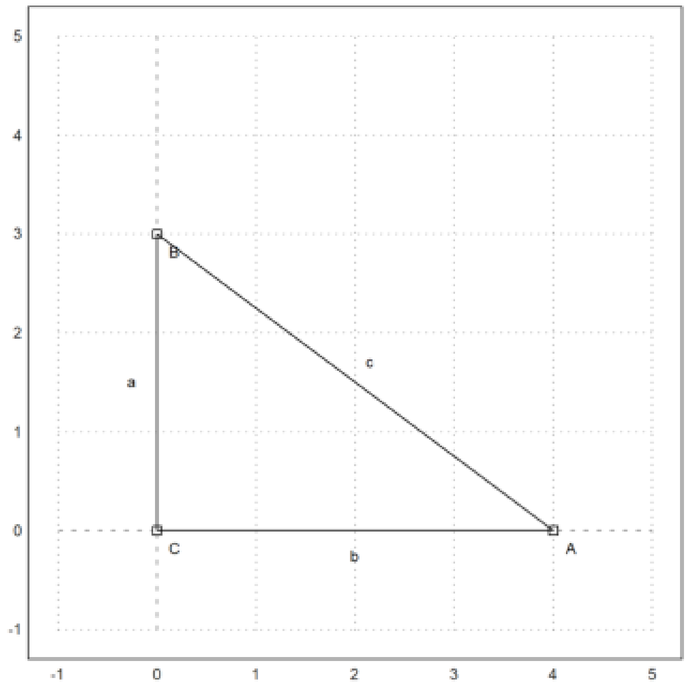
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keunggulan utama trigonometri rasional yaitu perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah perhitungan rasional simbolik seringkali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Of course,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

dimana wa adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara kasar.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama tentang trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah jarak yang dikuadratkan. Di bawah ini, a, b, dan c menyatakan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Pengertian trigonometri rasional yang kedua adalah penyebaran. Penyebaran mengukur pembukaan antar garis. Nilainya 0 jika garisnya sejajar, dan 1 jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Luas garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

dimana a dan c adalah kuadran suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya berada di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja ini lebih mudah dihitung daripada sudutnya. Namun Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah jarak di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diterapkan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc+bb-aa)^2 = 4\,bb\,cc\,(1-saa)$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk mencari penyebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk penyebaran yang tidak diketahui sa.

Anda bisa melakukannya dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kami sudah mengetahui hal ini. Pengertian penyebaran merupakan kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk persamaan umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut suatu segitiga dengan mengetahui kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisinya

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

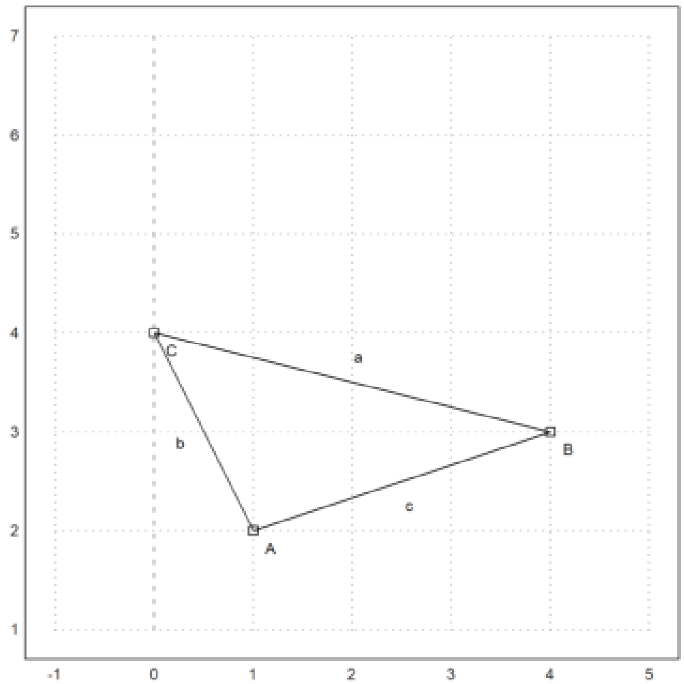
```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan fungsi jarak file Euler untuk geometri. Fungsi jarak menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memuat fungsi kuadran antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometri.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan hal ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha pada sisi a. Ingat itu

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.
gambar: (20) Rational_Geometry_CaR.png
Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga tersebut. Jangan lupa, bahwa kita sedang berhadapan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa memberikan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Bangau

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk sebuah segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.
Memang benar, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

Aturan Penyebaran Tiga Kali Lipat

Kerugian dari spread adalah bahwa spread tidak lagi sekedar menambahkan sudut yang sama.
Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut mana pun yang besarnya 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Sejak menyebarnya

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, maka aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Namun persamaan tersebut memiliki solusi kedua, dimana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0\right]$$

Penyebaran 90° jelas sama dengan 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Sehingga kita dapat mencari penyebaran sudut dua kali lipat tersebut. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

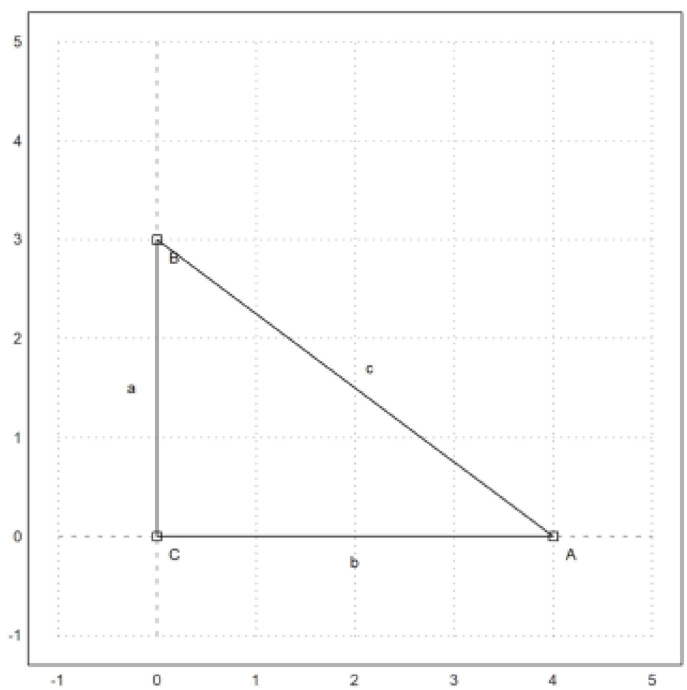
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Inilah situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun kita ingin menyelesaikannya secara umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga kali lipat.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut membagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b^2+a\,b}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebarannya ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

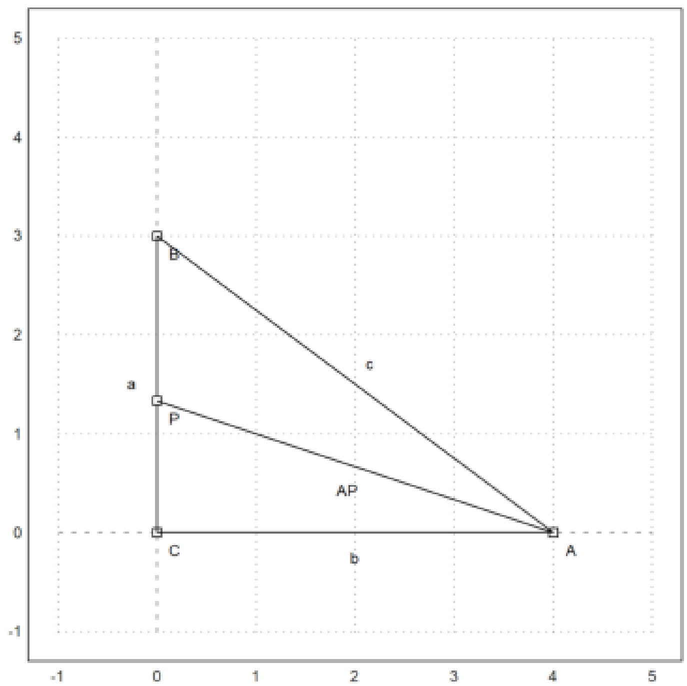
```
18°26'5.82''
```

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus pada segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku di segitiga mana pun. Jika digabungkan, maka hal ini akan diterjemahkan ke dalam apa yang disebut dengan "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a,b,c menunjukkan qudrance.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita memperolehnya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b\,\left(b+a\right)}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

We can also compute P using the spread formula.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b\,\left(b+a\right)}-b-a\right)}{\sqrt{b\,\left(b+a\right)}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita peroleh dengan rumus trigonometri.

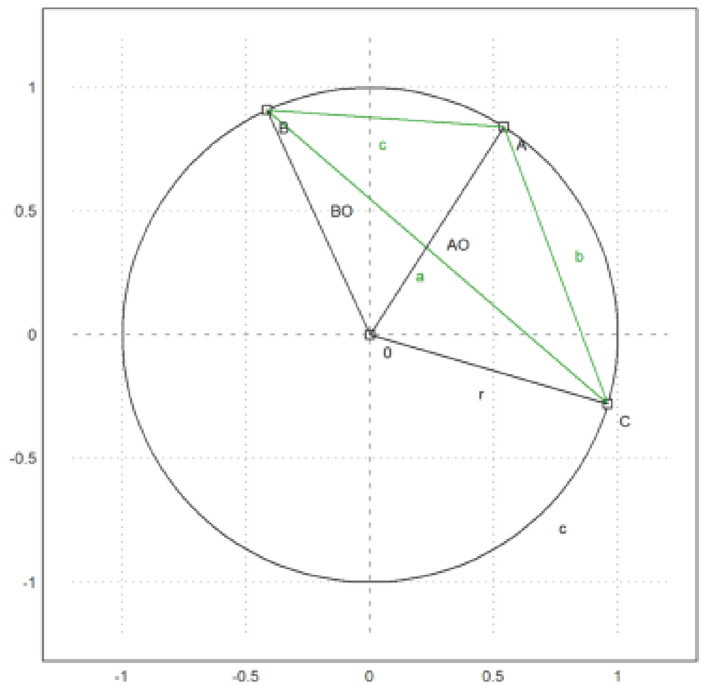
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Lihatlah situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus jari-jari kuadrat dari perilingkaran dalam kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasil untuk poin kita A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusatnya.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

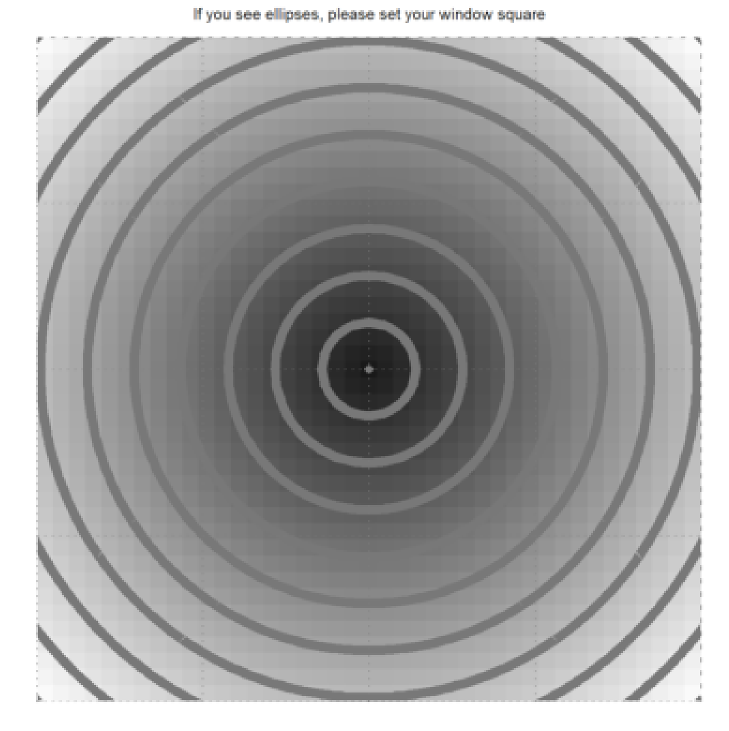
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan pendahuluan

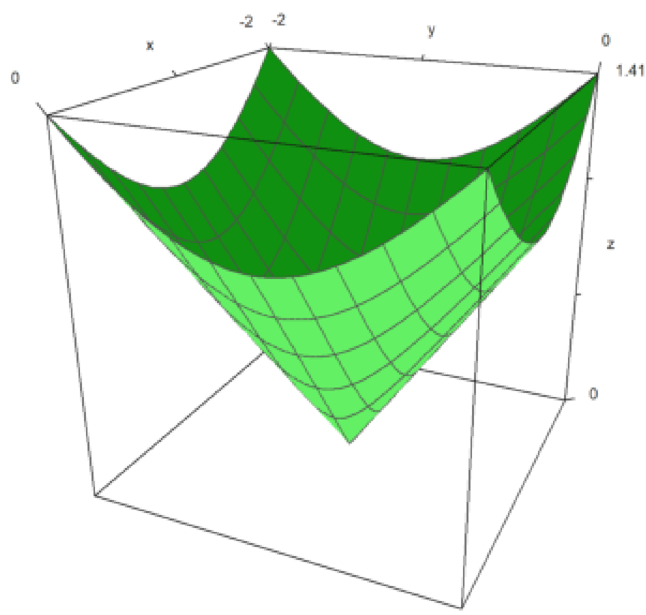
Fungsi yang, ke titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, mempunyai garis datar yang cukup sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

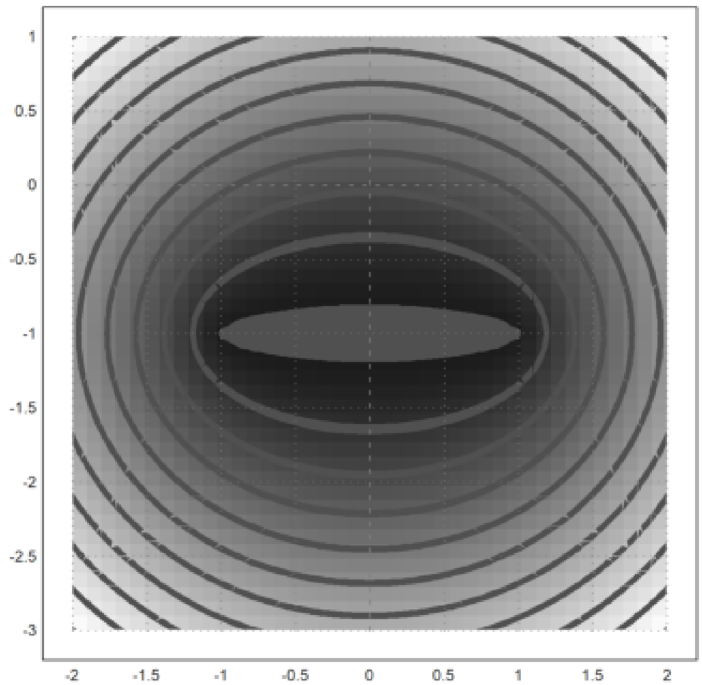


Tentu saja minimum 0 dicapai di A.

Dua poin

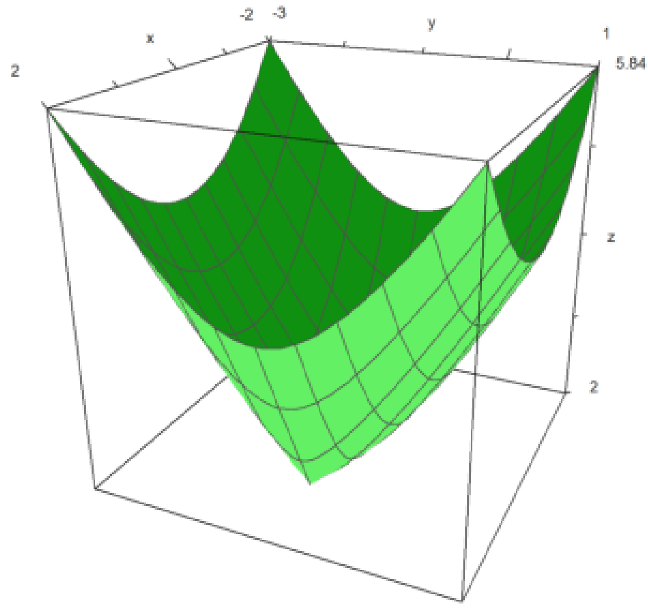
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "fakta yang diketahui" bahwa kurva tingkat berbentuk elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada ruas [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



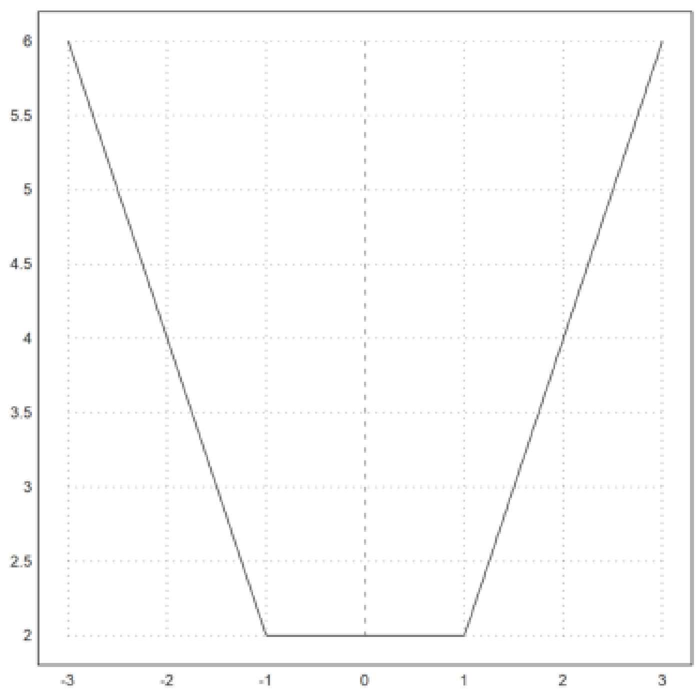
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



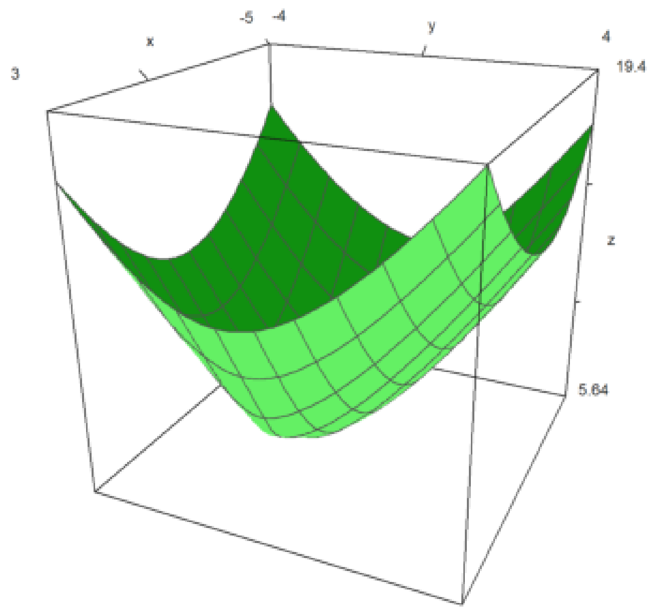
Tiga poin

Kini segalanya menjadi lebih sederhana: Tidak diketahui secara luas bahwa MA+MB+MC mencapai nilai minimumnya pada satu titik pada bidang tersebut, namun untuk menentukannya tidaklah mudah:

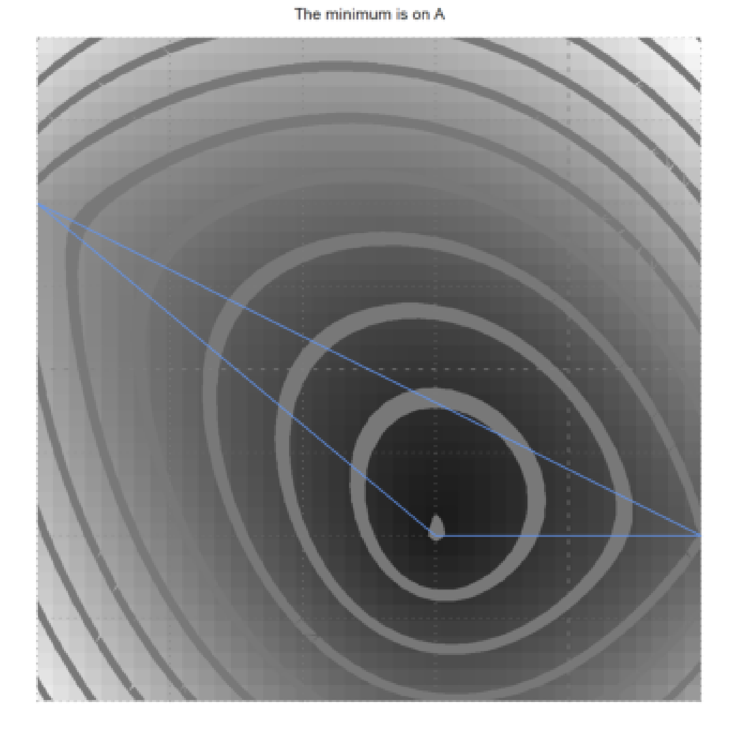
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik tersebut (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

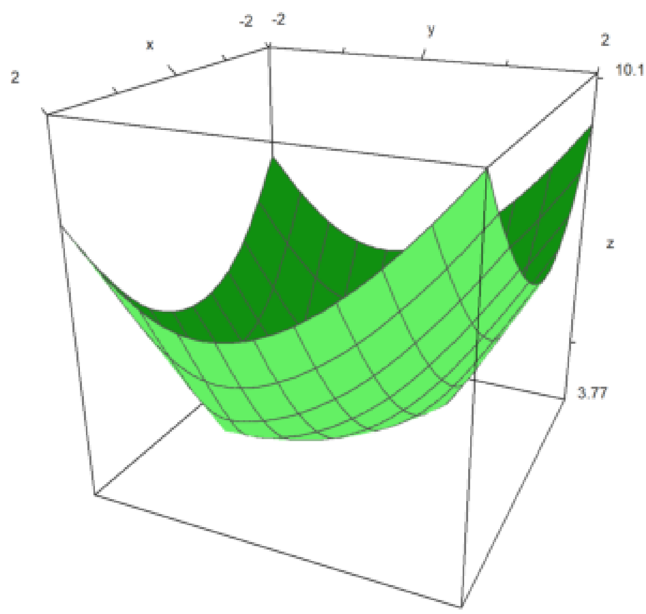



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

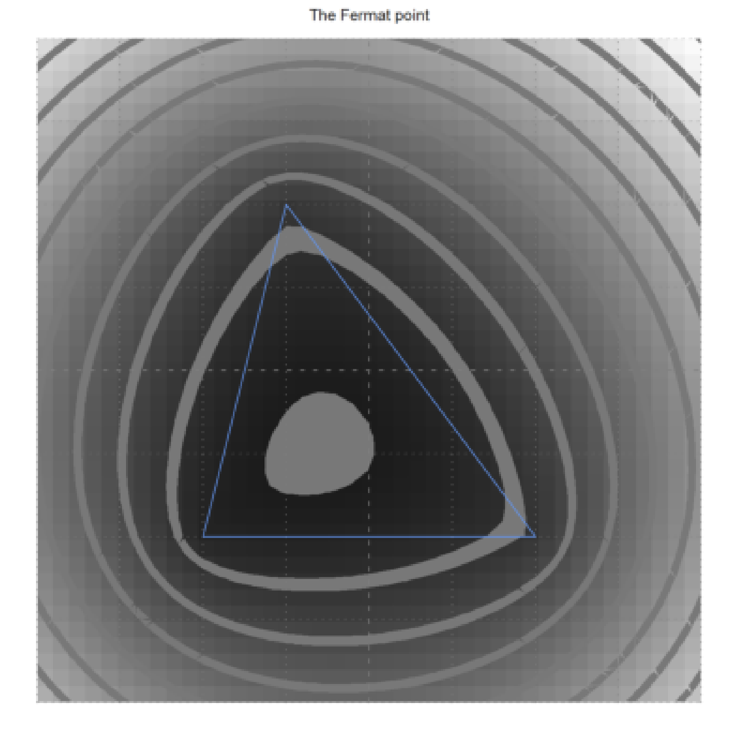


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, maka titik minimum ada di titik F di bagian dalam segitiga, yaitu satu-satunya titik yang melihat sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing sudut-nya 120°):

```
> C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



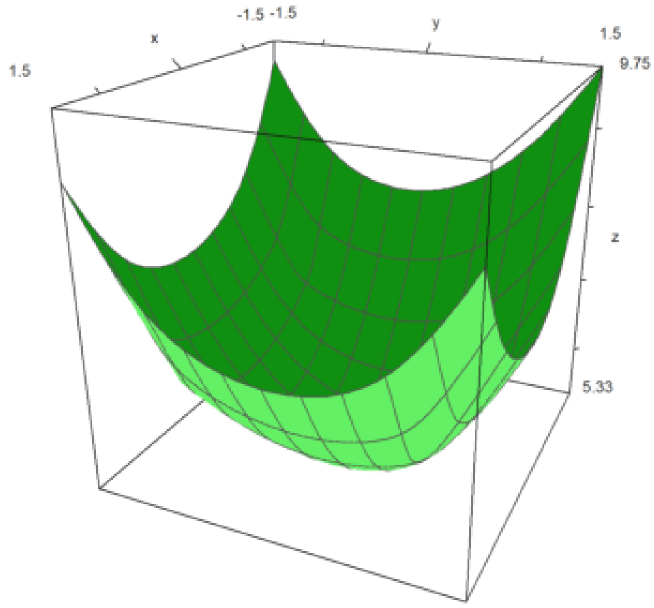
Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua hal di atas ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA+FB+FC minimal disebut titik Fermat segitiga. Namun nampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Pokoknya tradisinya adalah memperhatikan hal ini F...

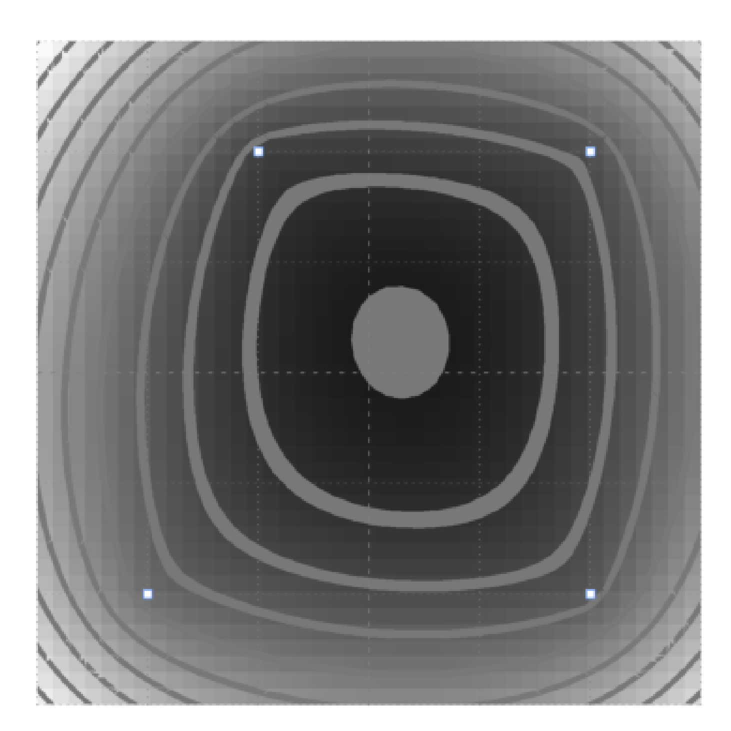
Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan poin ke-4 D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakanlah Anda seorang operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus memasang antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



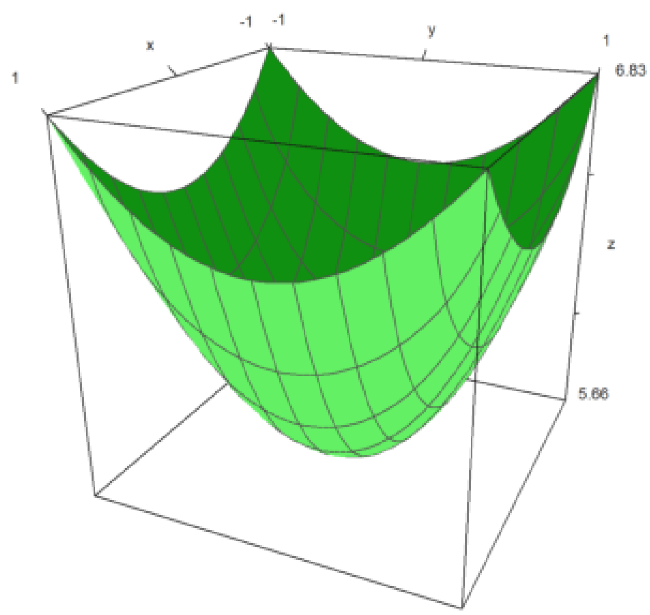
Masih ada nilai minimum dan tidak tercapai di simpul A, B, C, atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

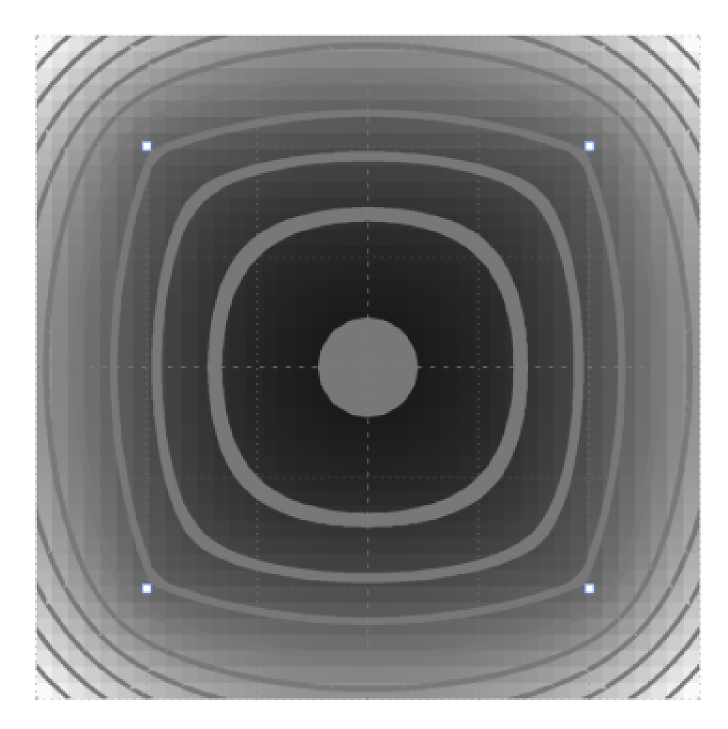
```
[0.142858,  0.142857]
```

Nampaknya dalam hal ini koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional...
Sekarang ABCD adalah persegi, kita berharap titik optimalnya adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika diperhatikan gambar di bawah, terlihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

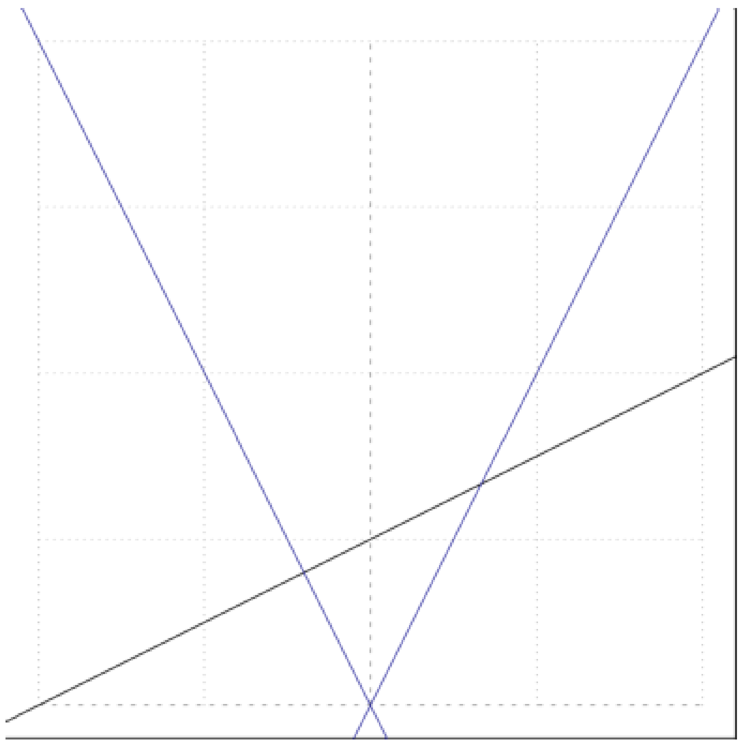
Kemudian saya baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{(2\,u-1)^2}{25}}$$

Dan tentukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

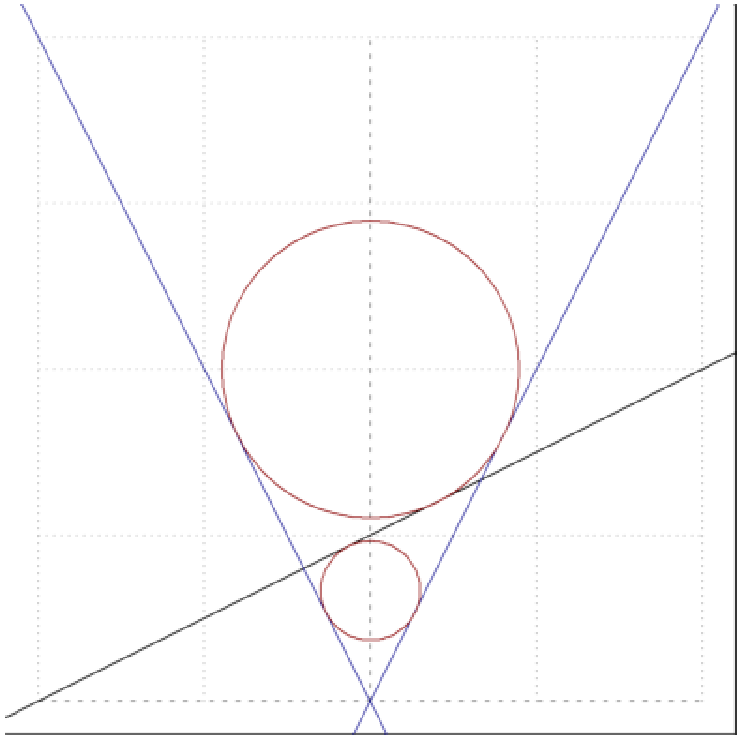
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis kedua bola tersebut ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang dibatasi pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Lalu kita buat dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

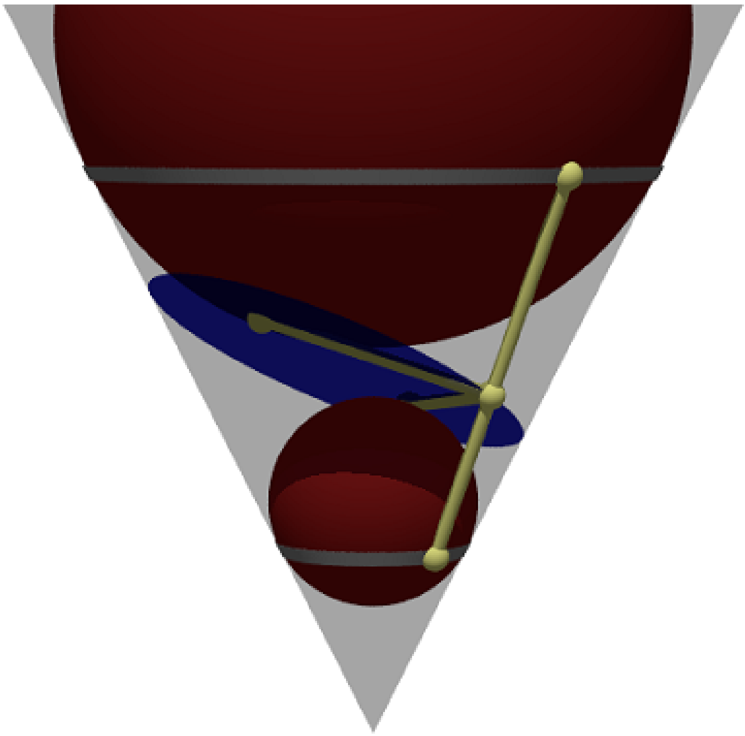
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

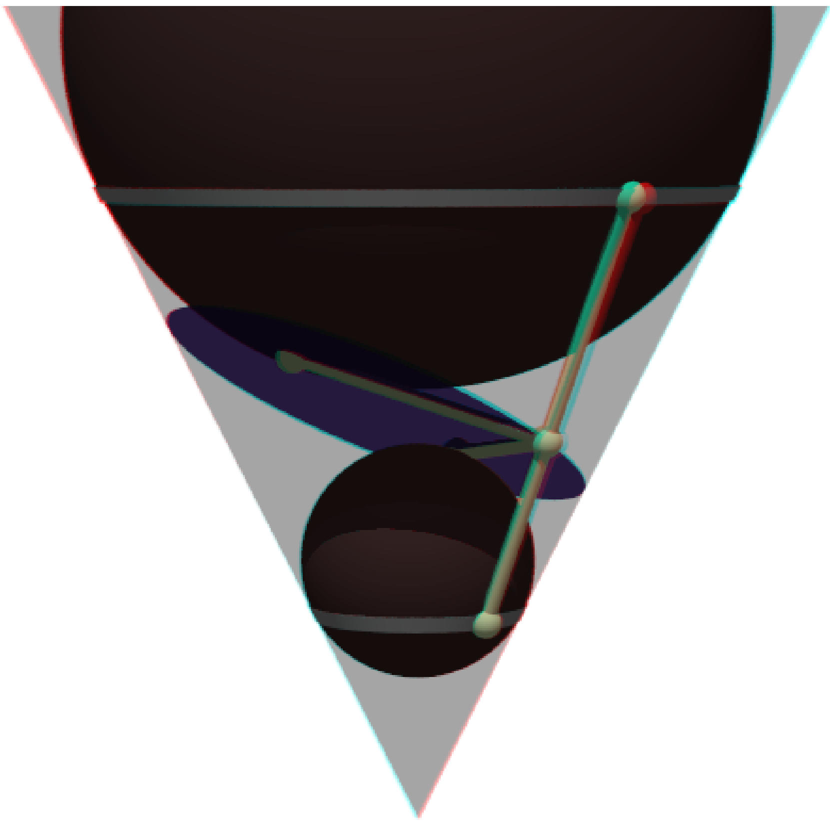
```
>function scene () ...
```

```
  global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
  writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
  writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
  writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
  gp=g();
  pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
  vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
  writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
  P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
  writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
  P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
  writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
  P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
  writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
  P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
  writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
  t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
  writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
  writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
  writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
  writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

```
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk melihat efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Di buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola ideal lainnya. Vektor ini adalah [pos, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-So
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak sedekat itu, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                              ^
```

Judulnya ada fungsinya, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut suatu segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan pada asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
                               ^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata dari segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke suatu posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama terjadi di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
                         ^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun kita tidak lagi mendapatkan posisi sasaran yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, namun melakukan perkiraan jari-jari bumi di sepanjang lintasan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana saja di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan tujuan yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambah 10 kali sepersepuluh jarak, pakai jurusan Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh sekali.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi yang mempunyai garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah perjalanan kita. Untuk tujuan kasarnya, kita sesuaikan pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
```

```
S 6°39.614’ E 107°52.539’
S 6°29.924’ E 107°31.251’
S 6°20.219’ E 107°9.977’
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

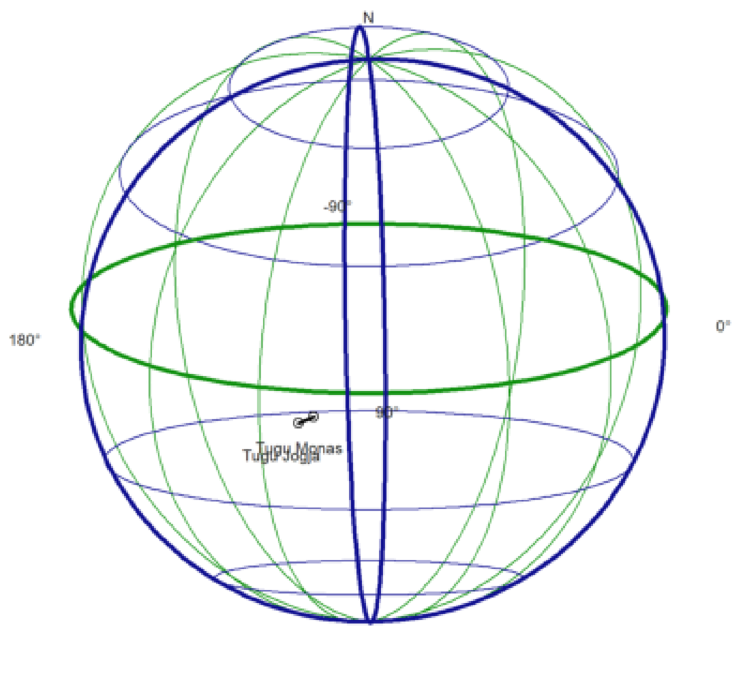
Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

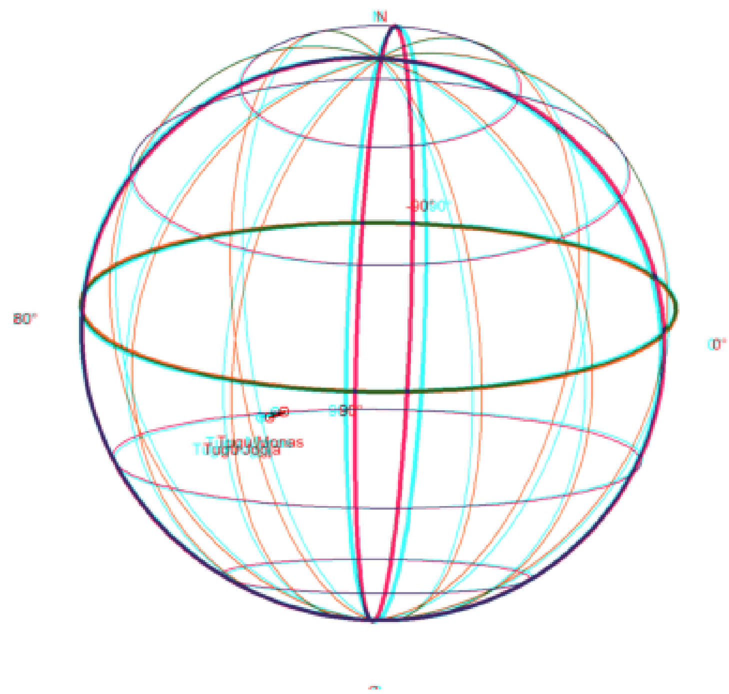
Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

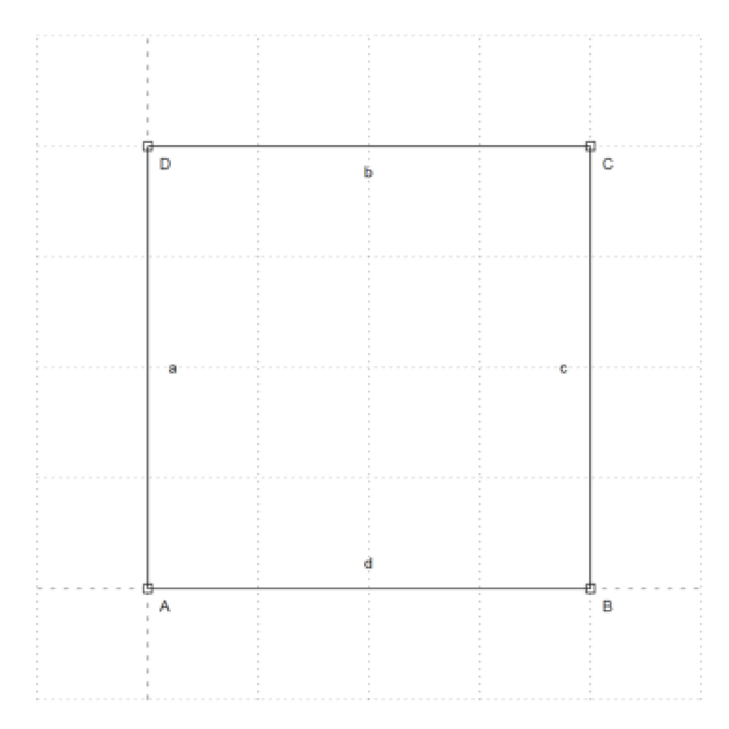
Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

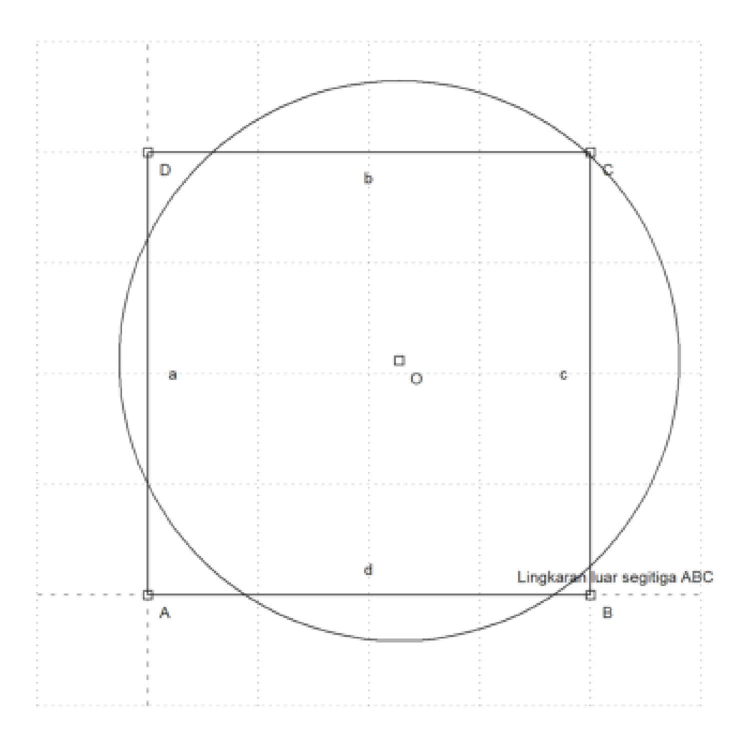
```
>load geometry
```

```
  Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);
>A=[0,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>D=[0,2]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"d");
>plotSegment(B,C,"c");
>plotSegment(C,D,"b");
>plotSegment(D,A,"a");
>aspect(1):
```



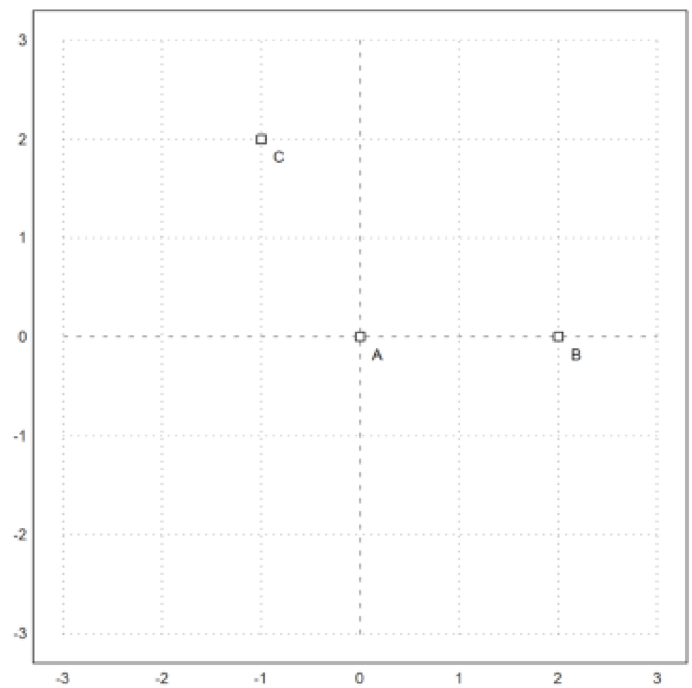

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar persegi ABCD
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

```
>load geometry;
>setPlotRange(3); A=[0,0]; B=[2,0]; C=[-1,2];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```



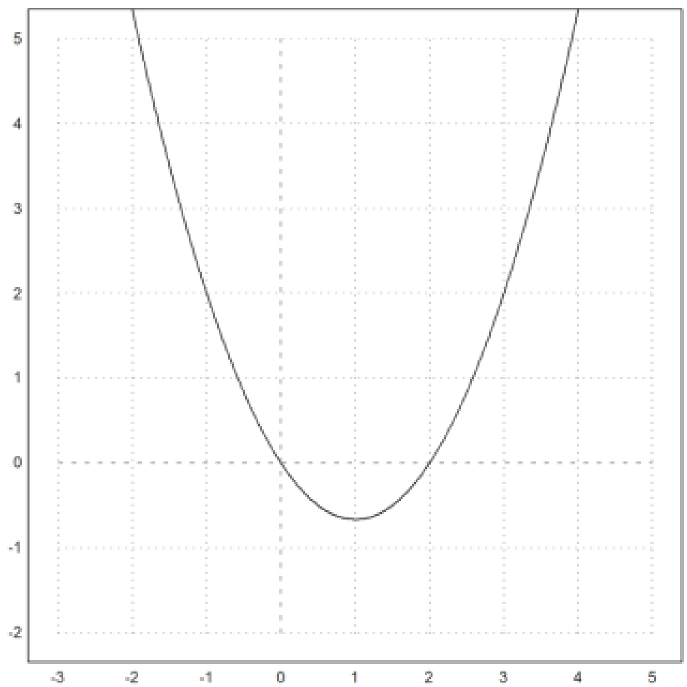

```
>sol &= solve([a-b+c=2,4*a+2*b=-c,c=0],[a,b,c])
```

```
          2         4
[[a = -, b = - -, c = 0]]
          3         3
```

```
>function y&=(2/3)*x^2-(4/3)*x
```

```
      2
 2 x     4 x
 ---- - ---
  3       3
```

```
>plot2d("(2/3)*x^2-(4/3)*x",-3,5,-2,5):
```



3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

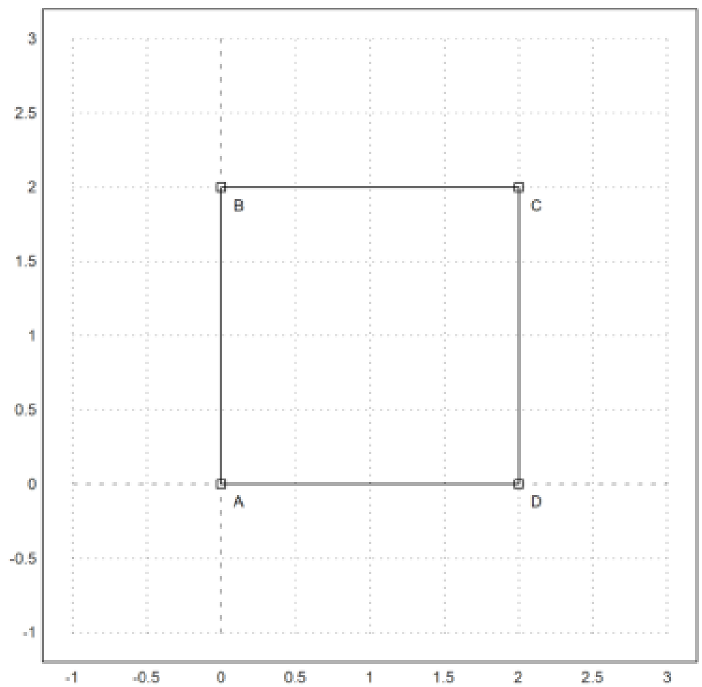
```
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

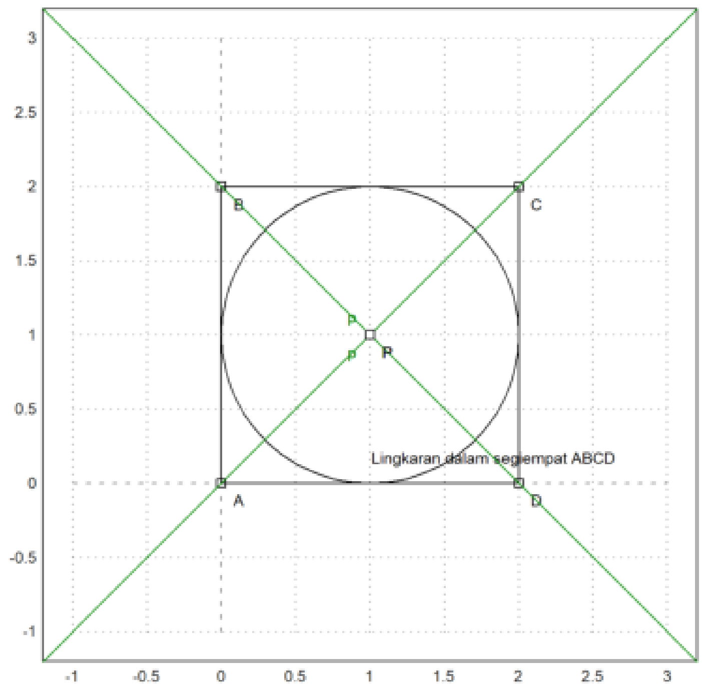
```
>load geometry
```

```
  Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,3,-1,3);
>A=[0,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>D=[2,0]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):
```

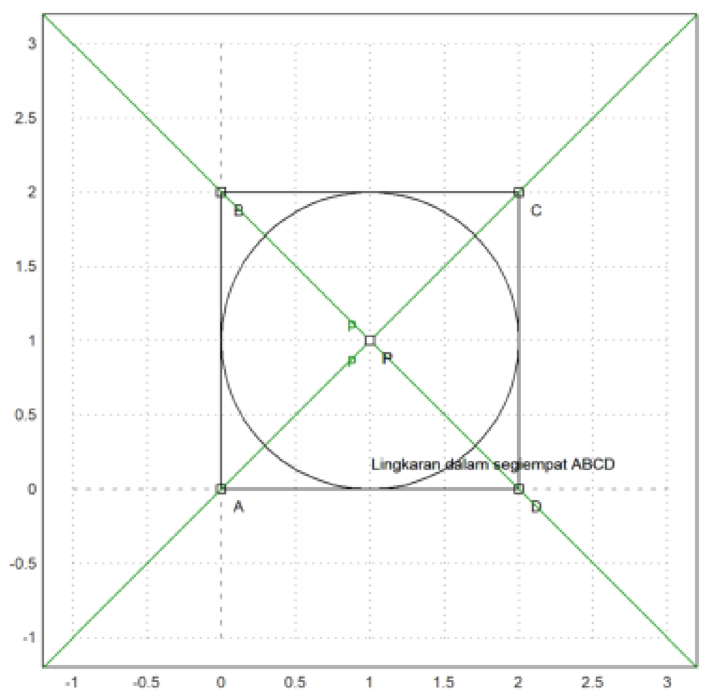



```
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(3); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```



Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD"):
```



Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.
Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

```
2
```

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

```
2
```

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

```
2
```

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

```
2
```

```
>AB.CD
```

```
4
```

```
>AD.BC
```

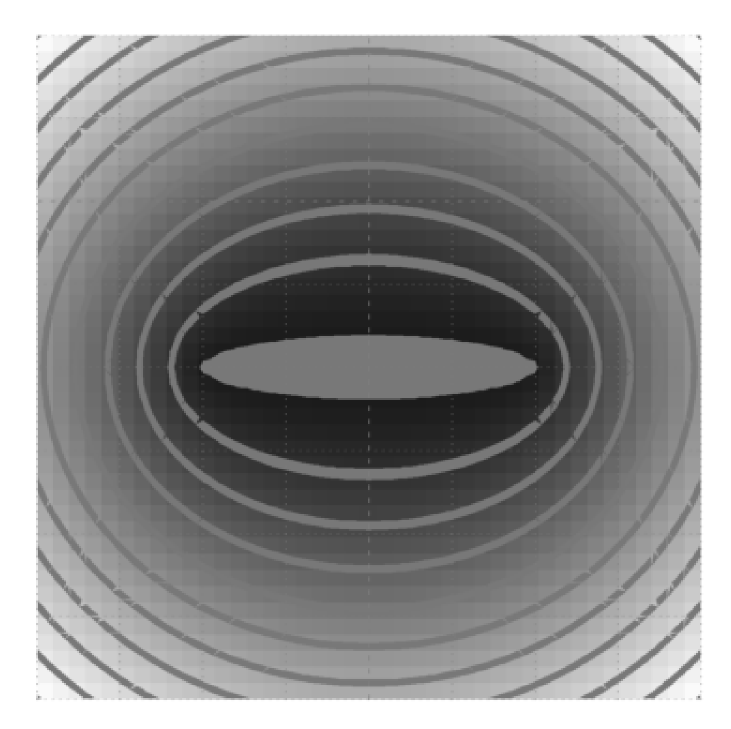
```
4
```

Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 4. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

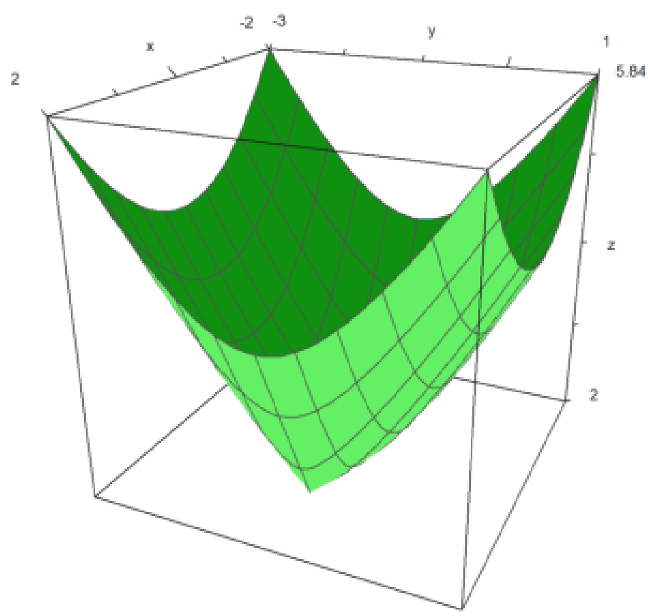
Penyelesaian :
Diketahui kedua titik fokus P = [-1,-1] dan Q = [1,-1]

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



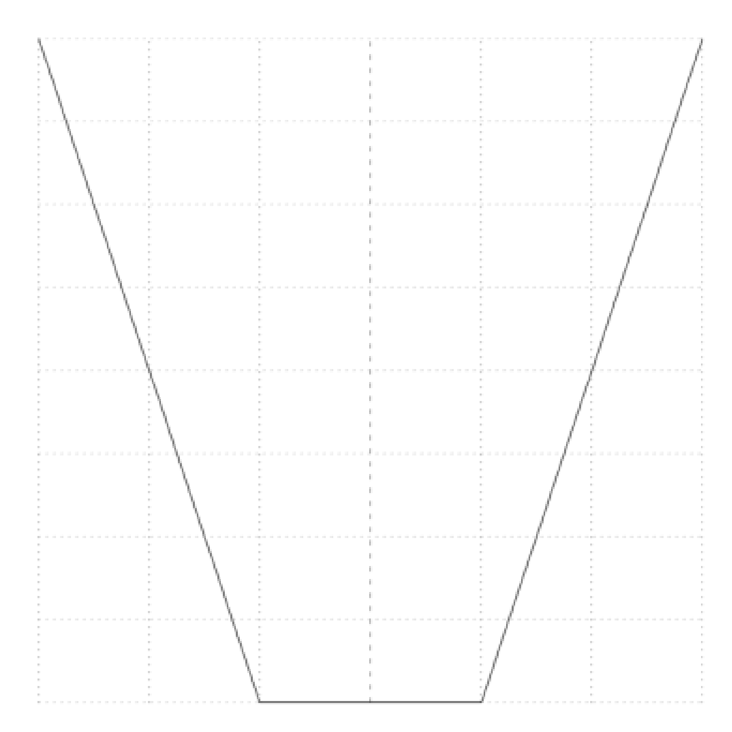
Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



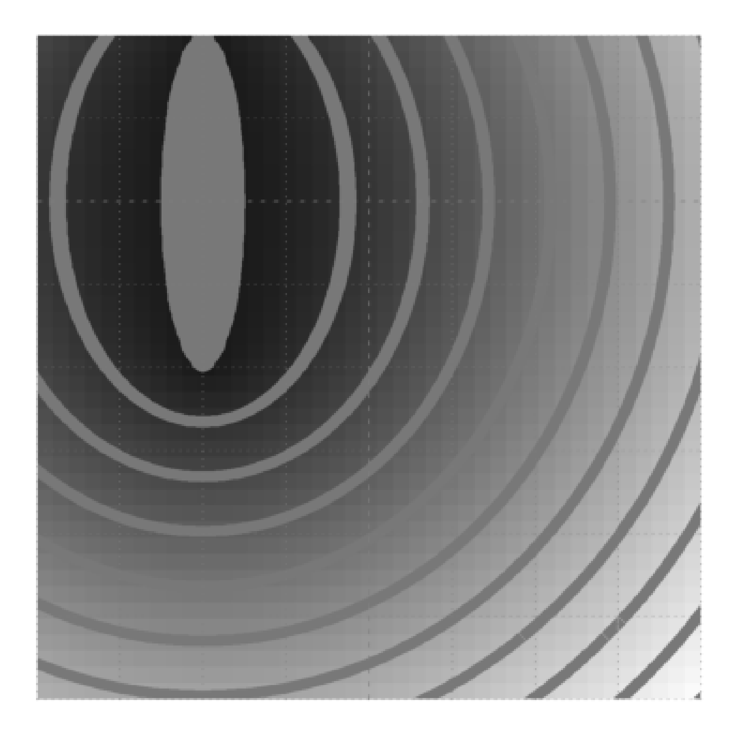
Batasan ke garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

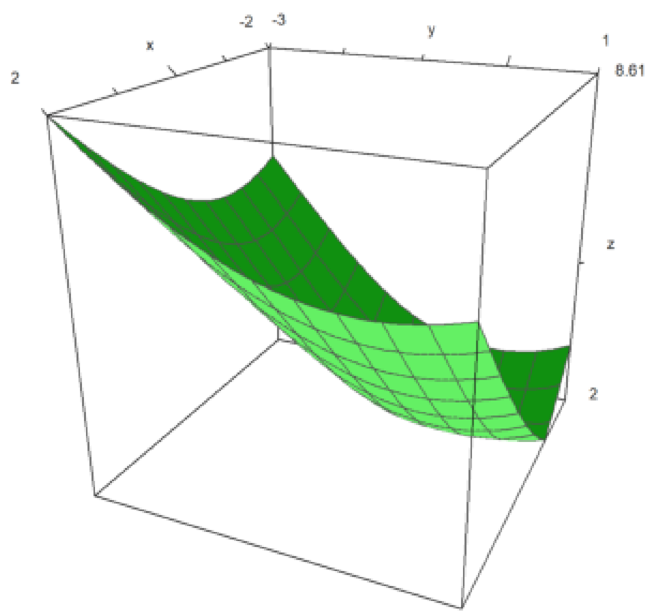


5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

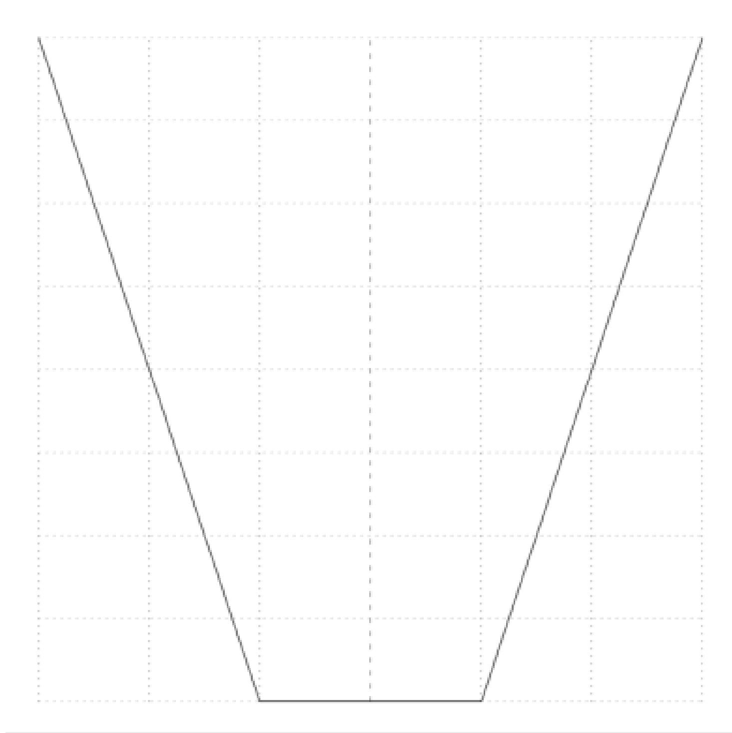
```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```




```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



Nama: Pradika Larasati
Kelas: Matematika B 2023
NIM: 23030630003

EMT untuk Statistika

Di buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan latar belakang untuk memahami detailnya.

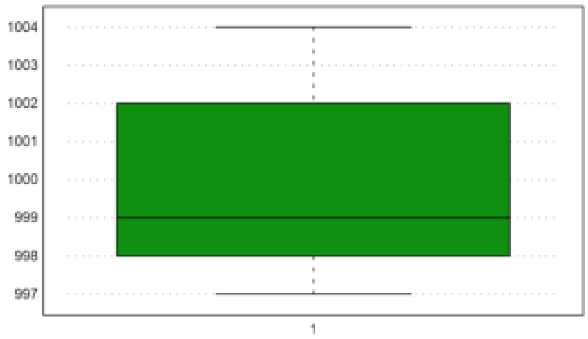
Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan deviasi standar yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>median(M), mean(M), dev(M),
```

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk datanya. Dalam kasus kami, tidak ada outlier.

```
>aspect(1.75); boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur berdistribusi normal.
Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{d}\right)^2} \, dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi print.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

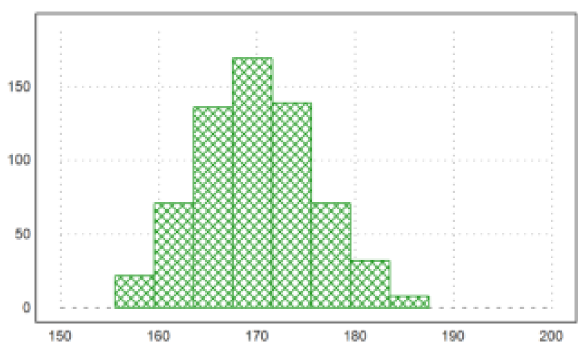
```
    3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kita asumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah alur pendistribusiannya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```



Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah pria dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frek"])
```

```
         BB         BA       Frek
      155.5      159.5         22
      159.5      163.5         71
      163.5      167.5        136
      167.5      171.5        169
      171.5      175.5        139
      175.5      179.5         71
      179.5      183.5         32
      183.5      187.5          8
```

Jika kita memerlukan nilai rata-rata dan statistik ukuran lainnya, kita perlu menghitung titik tengah rentang tersebut. Kita bisa menggunakan dua kolom pertama tabel kita untuk ini.

Sumbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
          157.5
          161.5
          165.5
          169.5
          173.5
          177.5
          181.5
          185.5
```

Namun akan lebih mudah jika menjumlahkan rentang dengan vektor [1/2,1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
  [157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung mean dan deviasi sampel dengan frekuensi tertentu.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

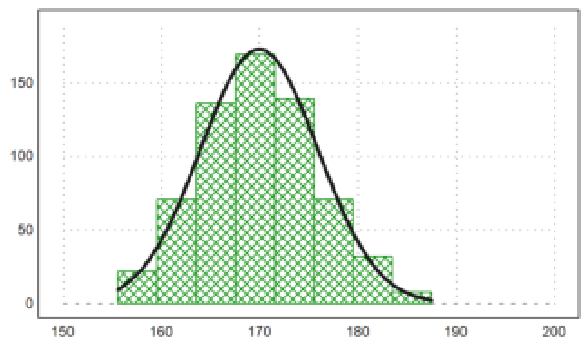
```
  169.901234568
  5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi nilai normal ke diagram batang di atas. Rumus distribusi normal dengan mean m dan simpangan baku d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, maka untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Tabel

Di direktori buku catatan ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut merupakan hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama file tersebut. Datanya berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>  printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk tokennya.

Untuk ini, kami mendefinisikan kumpulan token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string tertentu.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4 dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda perlu menyediakannya dengan ":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan kumpulan token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
   Person   Sex   Age Titanic Evaluation   Tip Problem
        1     m    30       n          .   1.8       n
        2     f    23       y          g   1.8       n
        3     f    26       y          g   1.8       y
        4     m    33       n          .   2.8       n
        5     m    37       n          .   1.8       n
        6     m    28       y          g   2.8       y
        7     f    31       y         vg   2.8       n
        8     m    23       n          .   0.8       n
        9     f    24       y         vg   1.8       y
       10     m    26       n          .   1.8       n
```

Titik "." mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token yang akan diterjemahkan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi readtable() kini mengembalikan sekumpulan token.

```
>tok
```

```
  m
  n
  f
  y
  g
  vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke dalam angka.

String khusus NA = "." diartikan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) di tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
  [1,  1,  30,  2,  NAN,  1.8,  2]
```

Berikut isi tabel dengan nomor yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
 1     1    30     2     .   1.8     2
 2     3    23     4     5   1.8     2
 3     3    26     4     5   1.8     4
 4     1    33     2     .   2.8     2
 5     1    37     2     .   1.8     2
 6     1    28     4     5   2.8     4
 7     3    31     4     6   2.8     2
 8     1    23     2     .   0.8     2
 9     3    24     4     6   1.8     4
10     1    26     2     .   1.8     2
11     3    23     4     6   1.8     4
12     1    32     4     5   1.8     2
13     1    29     4     6   1.8     4
14     3    25     4     5   1.8     4
15     3    31     4     5   0.8     2
16     1    26     4     5   2.8     2
17     1    37     2     .   3.8     2
18     1    38     4     5     .     2
19     3    29     2     .   3.8     2
20     3    28     4     6   1.8     2
21     3    28     4     1   2.8     4
22     3    28     4     6   1.8     4
23     3    38     4     5   2.8     2
24     3    27     4     1   1.8     4
25     1    27     2     .   2.8     4
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan keluaran readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan tabel daftar.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
  Person   Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
       1     m   30       n          .  1.8       n
       2     f   23       y          g  1.8       n
       3     f   26       y          g  1.8       y
       4     m   33       n          .  2.8       n
       5     m   37       n          .  1.8       n
       6     m   28       y          g  2.8       y
       7     f   31       y         vg  2.8       n
       8     m   23       n          .  0.8       n
       9     f   24       y         vg  1.8       y
      10     m   26       n          .  1.8       n
      11     f   23       y         vg  1.8       y
      12     m   32       y          g  1.8       n
      13     m   29       y         vg  1.8       y
      14     f   25       y          g  1.8       y
      15     f   31       y          g  0.8       n
      16     m   26       y          g  2.8       n
      17     m   37       n          .  3.8       n
```

```
18     m   38       y          g    .       n
19     f   29       n          .  3.8       n
20     f   28       y         vg  1.8       n
21     f   28       y          m  2.8       y
22     f   28       y         vg  1.8       y
23     f   38       y          g  2.8       n
24     f   27       y          m  1.8       y
25     m   27       n          .  2.8       y
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkan baris apa pun dengan nilai NAN ("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita bisa menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
Person Evaluation       Tip
     2          g       1.8
     3          g       1.8
     6          g       2.8
     7         vg       2.8
     9         vg       1.8
    11         vg       1.8
    12          g       1.8
    13         vg       1.8
    14          g       1.8
    15          g       0.8
    16          g       2.8
    20         vg       1.8
    21          m       2.8
    22         vg       1.8
    23          g       2.8
    24          m       1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata suatu kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
[1,  3]
[12,  13]
```

Kita bisa mencetak hasilnya di tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
          m         12
          f         13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
[5,  6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai v pada baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstraksi dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
 Person     Sex     Age Titanic Evaluation     Tip Problem
      2       f      23       y          g     1.8       n
      3       f      26       y          g     1.8       y
      6       m      28       y          g     2.8       y
     18       m      38       y          g       .       n
     16       m      26       y          g     2.8       n
     15       f      31       y          g     0.8       n
     12       m      32       y          g     1.8       n
     23       f      38       y          g     2.8       n
     14       f      25       y          g     1.8       y
      9       f      24       y         vg     1.8       y
      7       f      31       y         vg     2.8       n
     20       f      28       y         vg     1.8       n
     22       f      28       y         vg     1.8       y
     13       m      29       y         vg     1.8       y
     11       f      23       y         vg     1.8       y
```

Untuk statistik selanjutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kita ekstrak kolom 2 dan 4 dan urutkan tabelnya.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
          m         n
          m         n
          m         n
          m         n
          m         n
          m         n
          m         n
          m         y
          m         y
          m         y
          m         y
          m         y
          f         n
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
          f         y
```

Dengan getstatistics(), kita juga bisa menghubungkan jumlah dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
                    n         y
          m         7         5
          f         1        12
```

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file tersebut.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
               n          y
    m          7          5
    f          1         12
```

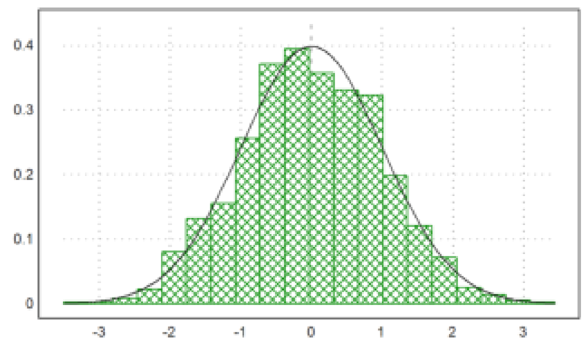
Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot sebaran data eksperimen.

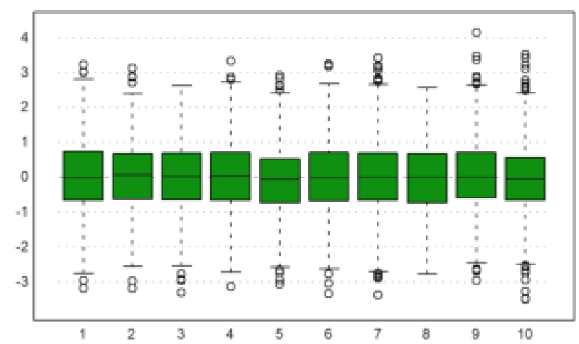
```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```



Perlu diperhatikan perbedaan antara bar plot (sampel) dan kurva normal (distribusi sebenarnya). Masukkan kembali ketiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, serta outlier.

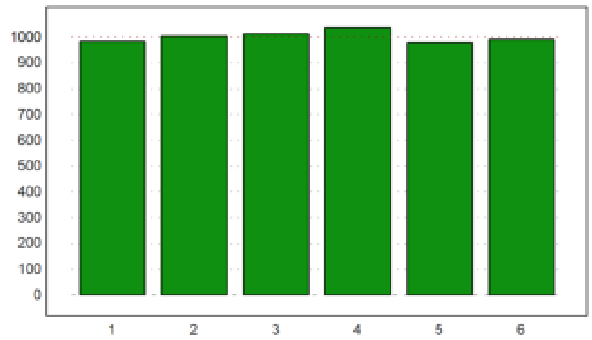
```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan kolomplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Meskipun inrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 hingga k, distribusi bilangan bulat lainnya dapat digunakan dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 masing-masing adalah 0,4,0.1,0.5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[378,  102,  520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihat referensinya.

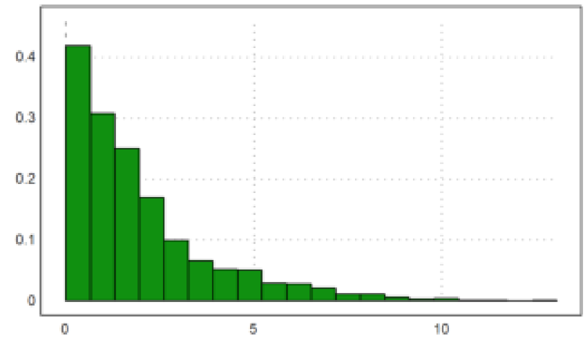
Misalnya, kita mencoba distribusi eksponensial. Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

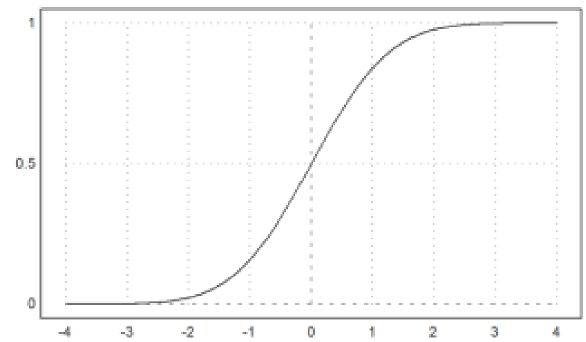
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



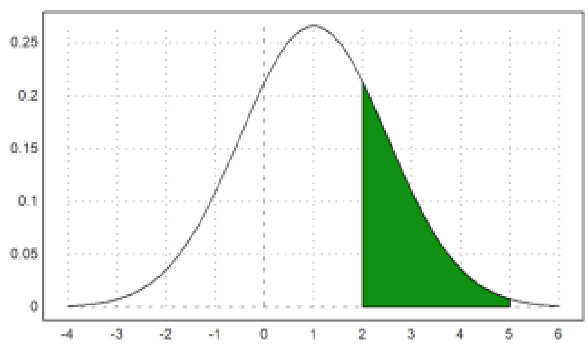
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan inversnya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{d}\right)^2}\, dt.$$

Peluang berada di kawasan hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2}\, dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

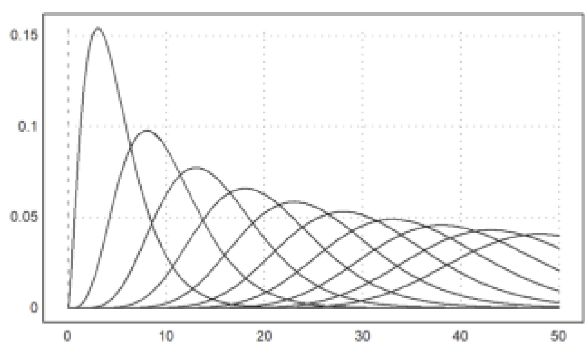
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal yang mean dan deviasinya sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah kepadatan distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```



Euler memiliki fungsi akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.

Penamaannya mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadratnya adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().

Pelengkap distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

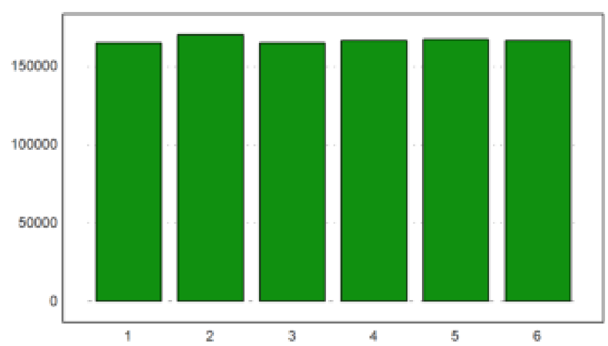
Artinya dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita tentukan generator nomor acak untuk ini. Fungsi find(v,x) mencari nilai x pada vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan banyak iterasi.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa keseragaman distribusi nilai 1...K dalam v. Kita menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsinya menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

```
0
```

Dan ia menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat defaultnya adalah alfa.

Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Namun untuk n yang besar, penjumlahan langsungnya tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

By the way, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
            381           100           519
            376            91           533
            417            80           503
            440            94           466
            406           112           482
            408            94           498
            395           107           498
            399            96           505
            428            87           485
            400            99           501
```

Merencanakan Data

Untuk memetakan data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam jumlah kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk para pihak, kami menggunakan rangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama kita mengekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi seluruhnya. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian statistiknya kita cetak dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai header kolom, dan tahun sebagai header untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih keluaran yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
         CDU/CSU    SPD    FDP     Gr     Li
    1990      48     36     12      1      3
    1994      44     38      7      7      4
    1998      37     45      6      7      5
    2002      41     42      8      9      0
    2005      37     36     10      8      9
    2009      38     23     15     11     12
    2013      49     31      0     10     10
```

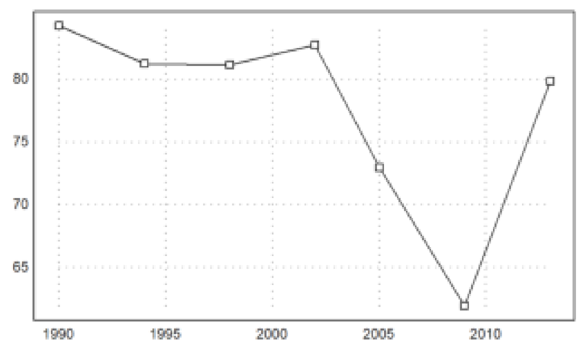
Perkalian matriks berikut ini menjumlahkan persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil berhasil memperoleh suara di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,   81.25,   81.1659,   82.7529,   72.9642,   61.8971,   79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```



Tentukan beberapa warna untuk setiap pesta.

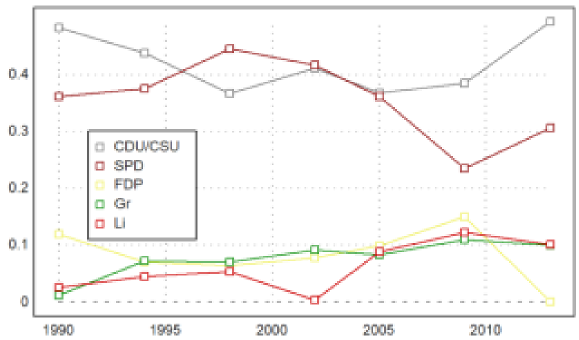
```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

Sekarang kita bisa memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot dengan menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```

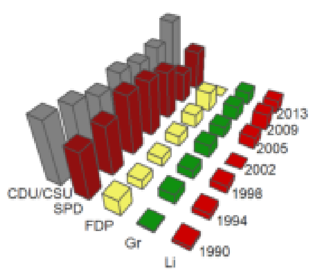
Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP); ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



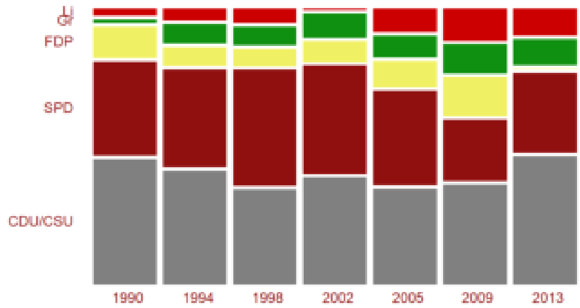
Plot kolom 3D memperlihatkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami memberikan label untuk baris dan kolom. sudut adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```



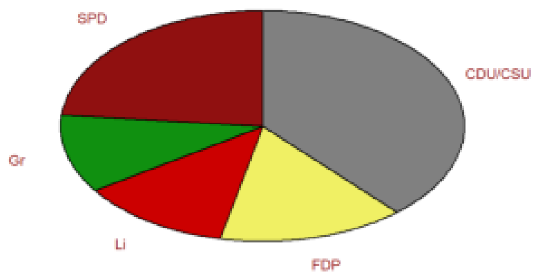
Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjang label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller); ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```



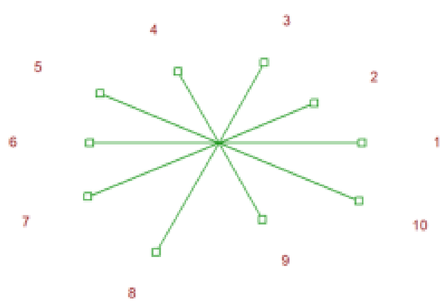
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



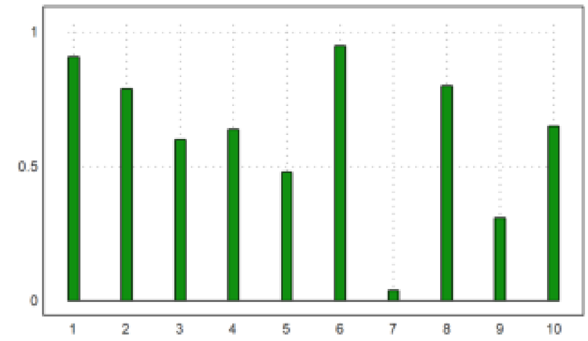
Ini adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```



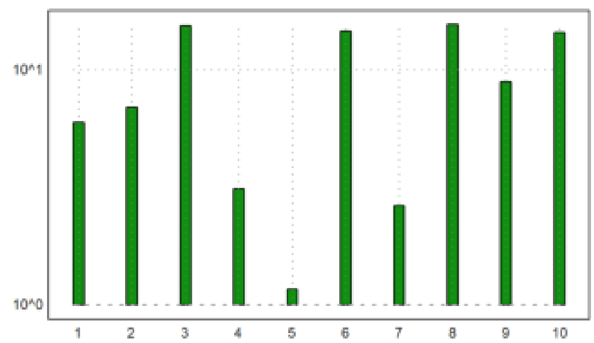
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara seragam di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```



Namun untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

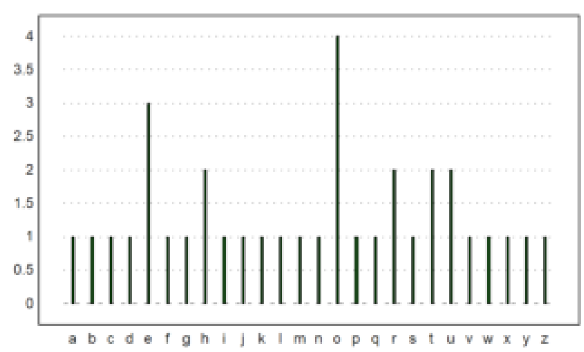
```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



Fungsi Columnplot() lebih mudah digunakan, karena hanya memerlukan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kami telah mendemonstrasikannya di tutorial ini.

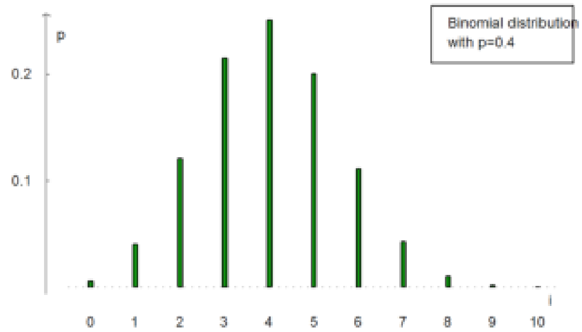
Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan membuat statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Anda juga dapat mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini cara memplot frekuensi bilangan dalam suatu vektor.
Kami membuat vektor bilangan acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8,  5,  8,  8,  6,  8,  8,  3,  5,  5]
```

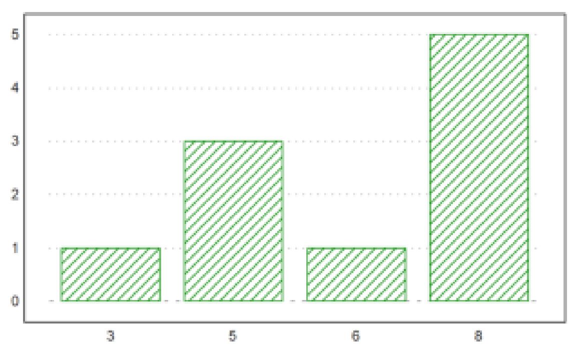
Kemudian ekstrak nomor unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[3,  5,  6,  8]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



Kami ingin mendemonstrasikan fungsi distribusi nilai empiris.

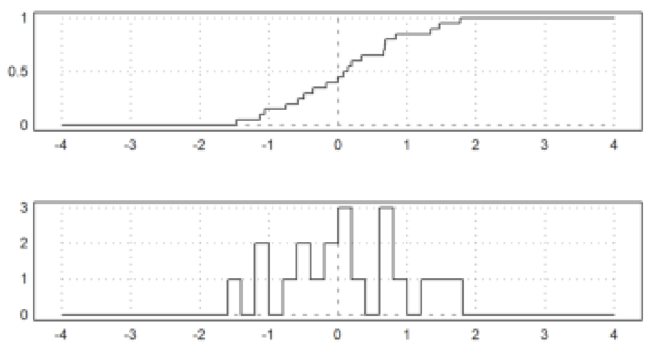
```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) memerlukan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

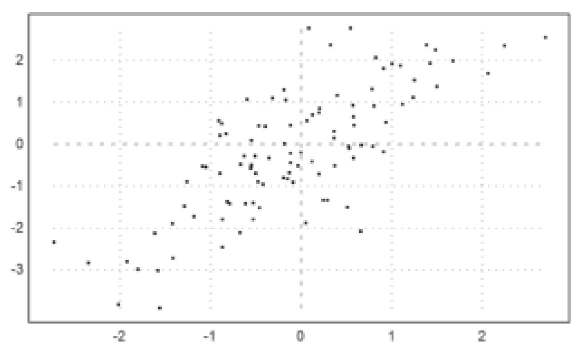
Kemudian kita plot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi kali ini kami menggunakan sawtooth plot.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```



Plot sebar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

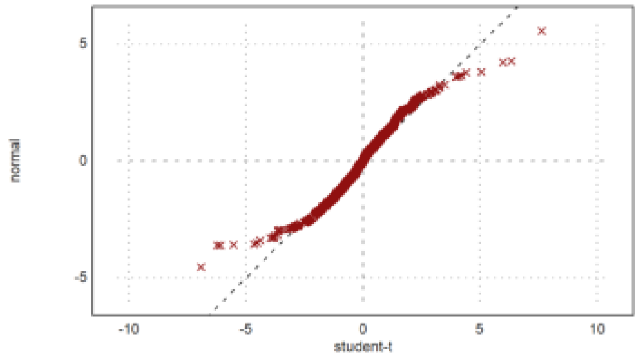
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



Seringkali kita ingin membandingkan dua sampel dengan distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujiannya, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



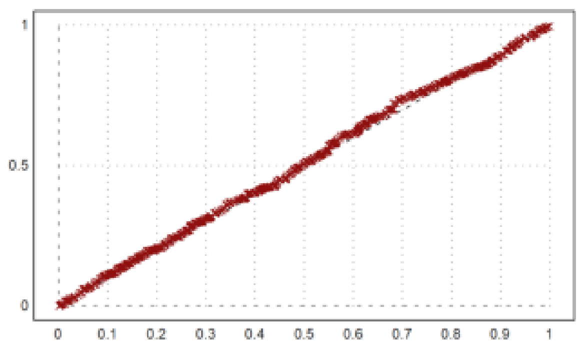
Plot tersebut dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita mempunyai dua distribusi yang ukurannya berbeda, kita dapat memperluas distribusi yang lebih kecil atau mengecilkan distribusi yang lebih besar. Fungsi berikut ini baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
> function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan, kita mencari garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

```
          x          y
          1          2
          2          3
          3          1
          4          5
          5          6
          6          3
          7          7
          8          8
          9          9
         10          8
```

Kami ingin membandingkan kecocokan tanpa bobot dan dengan bobot. Pertama, koefisien dari kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333,  0.812121]
```

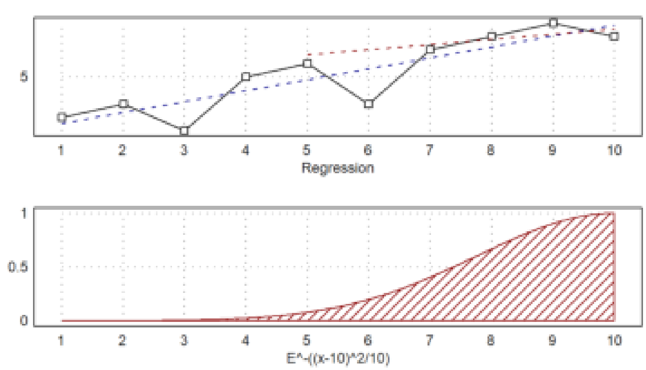
Kami menempatkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik-titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami menempatkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik-titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



Untuk contoh lain, kita membaca survei tentang siswa, usia mereka, usia orang tua mereka, dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

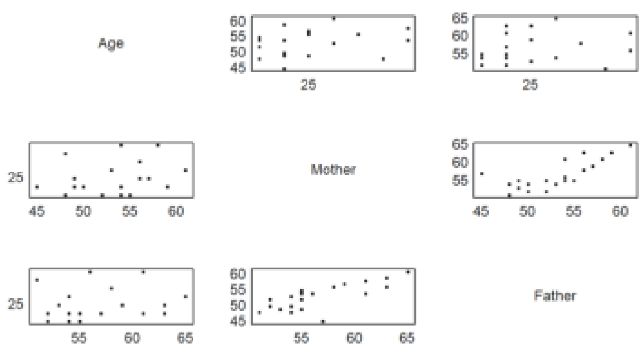
Tabel ini berisi "m" dan "f" pada kolom kedua. Kita menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat dan bukannya membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia saling bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```



Jelas bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
[17.3789,  0.740964]
```

Ini jelas merupakan model yang salah. Garis regresinya adalah s = 17 + 0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s adalah usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

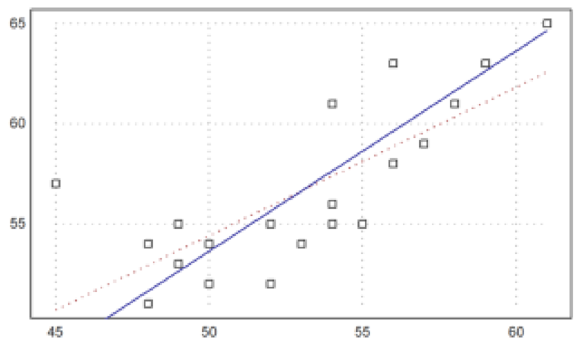
Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s = a + t. Kemudian a adalah rata-rata dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
3.65
```

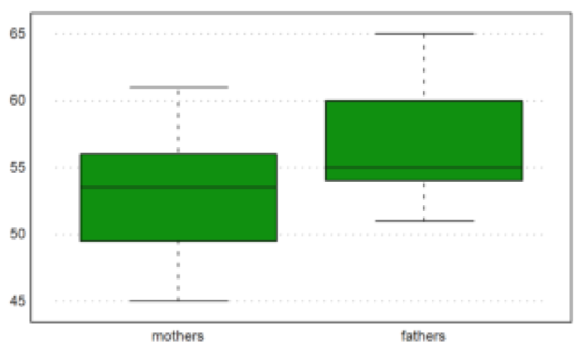
Mari kita plotkan ini ke dalam satu scatter plot.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut ini adalah plot kotak dari kedua usia tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usia keduanya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```



Sangat menarik bahwa perbedaan dalam median tidak sebesar perbedaan dalam mean.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
0.7588307236
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama dalam kedua vektor. Korelasi ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi baru. Sebagai contoh, kita mendefinisikan fungsi kemiringan.

$$\text{sk}(x) = \frac{\sqrt{n}\sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

di mana m adalah rata-rata dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
-0.198710316203
```

Berikut ini adalah fungsi lain, yang disebut koefisien kemencengan Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
-0.0801873249135
```

Simulasi Monte Carlo

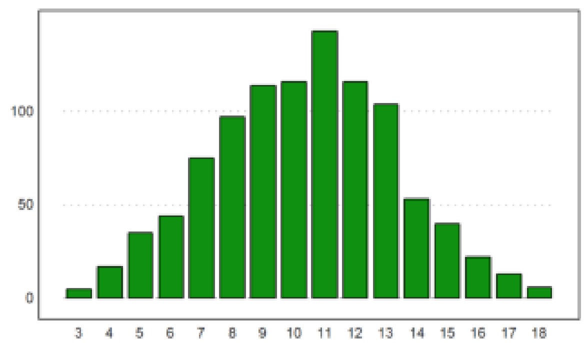
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Berikut ini adalah contoh lainnya, yang mensimulasikan 1000 kali pelemparan 3 dadu, dan menanyakan distribusi dari jumlah tersebut.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[5,  17,  35,  44,  75,  97,  114,  116,  143,  116,  104,  53,  40,
22,  13,  6]
```

Kita bisa plot ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidaklah mudah. Kami menggunakan rekursi tingkat lanjut untuk hal ini.

Fungsi berikut ini menghitung jumlah cara angka k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n angka dalam rentang 1 hingga m. Fungsi ini bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m
    else
      sum=0;
      loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
      return sum;
    end;
  endfunction
```

Berikut ini adalah hasil dari tiga lemparan dadu.

```
>countways(5:25,5,5)
```

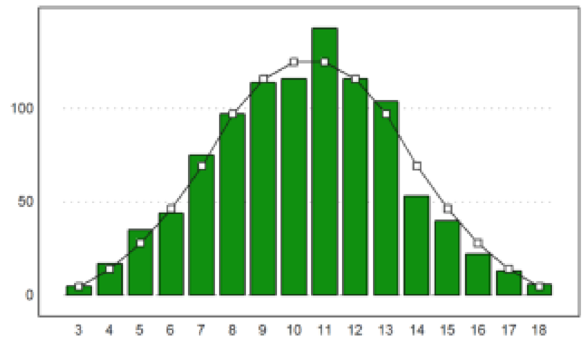
```
[1,  5,  15,  35,  70,  121,  185,  255,  320,  365,  381,  365,  320,
255,  185,  121,  70,  35,  15,  5,  1]
```

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1,  3,  6,  10,  15,  21,  25,  27,  27,  25,  21,  15,  10,  6,  3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lainnya, deviasi nilai rata-rata dari n variabel acak berdistribusi normal 0-1 adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

```
0.316227766017
```

Mari kita periksa dengan sebuah simulasi. Kami menghasilkan 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.319493614817
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```

images/Pradika Larasati_23030630003_MatB_EMT4Statistika-042.p

Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 memiliki deviasi yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.374460271535
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses-proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```

images/Pradika Larasati_23030630003_MatB_EMT4Statistika-043.p

Tes

Tes adalah alat yang penting dalam statistik. Dalam Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kita menguji lemparan dadu untuk distribusi yang seragam. Pada 600 lemparan, kita mendapatkan nilai berikut, yang kita masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Uji chi-square juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya seharusnya hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.526
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kita adil. Tetapi kita tidak dapat menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita buat 1000 lemparan dadu dengan menggunakan generator bilangan acak, dan lakukan pengujian yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.528028118442
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.0218365848476
```

Fungsi ttest() membutuhkan nilai rata-rata, deviasi, jumlah data, dan nilai rata-rata untuk diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kita tolak hipotesis bahwa kedua pengukuran tersebut memiliki nilai rata-rata yang sama, jika hasilnya < 0,05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.38722000942
```

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
5.60009101758e-07
```

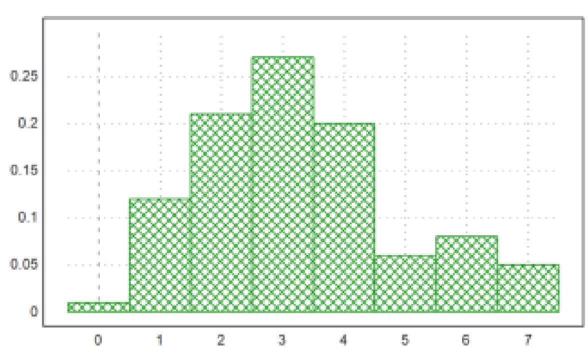
Pada contoh berikut, kita membuat 20 lemparan dadu secara acak sebanyak 100 kali dan menghitung jumlah dadu yang muncul. Rata-rata harus ada 20/6 = 3,3 mata dadu.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.28
```

Sekarang kita bandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama, kita memplot distribusi angka satu.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```



```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kami harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.53921579764
```

Contoh berikut ini berisi hasil dari dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) yang memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
           1     2     3     4     5     6
     m    23    37    43    52    64    74
     f    27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Uji tabel chi^2 melakukan hal ini. Hasilnya terlalu besar untuk menolak independensi. Jadi kita tidak dapat mengatakan, jika pemungutan suara tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
           1     2     3     4     5     6
     m  24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
     f  25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang telah dikoreksi. Karena koefisien ini sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Beberapa Tes Lainnya

Selanjutnya kita menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi secara normal dengan nilai rata-rata yang sama. Metode ini disebut ANOVA (analisis varians). Dalam Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan sebesar 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda dengan menguji median dari sampel gabungan.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Uji lain tentang kesetaraan adalah uji peringkat. Uji ini jauh lebih tajam daripada uji median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut ini, kedua distribusi memiliki rata-rata yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

    0.129608141484

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perawatan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Uji signum memutuskan, apakah a lebih baik daripada b.

```
>signtest(a,b)
```

    0.0546875

Ini adalah kesalahan yang terlalu besar. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.
Uji Wilcoxon lebih tajam daripada uji ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif dari perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

    0.0296680599405

Mari kita coba dua pengujian lagi dengan menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

    0.0068706451766

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

    0.275145971064

Bilangan Acak

Berikut ini adalah tes untuk generator bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan adanya masalah.
Pertama, kita akan membangkitkan sepuluh juta bilangan acak dalam [0,1].

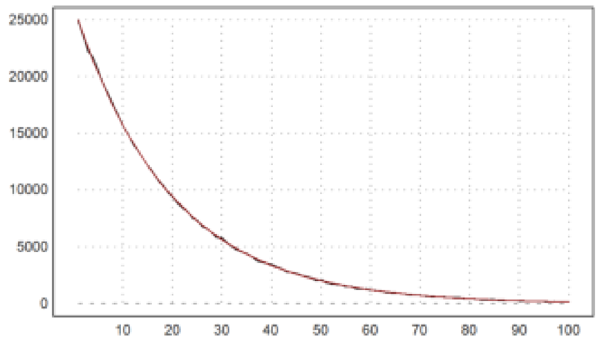
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya, kami menghitung jarak antara dua angka yang kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Terakhir, kami memplot berapa kali, setiap jarak yang terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Menghapus data.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai sebuah paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Buku ini diperuntukkan bagi Anda yang sudah terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum mengenai hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami juga membahas cara-cara untuk bertukar data di antara kedua sistem tersebut.

Note that this is a work in progress.

Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari dalam R adalah membuat sebuah vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, operator ini memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Anda dapat menggunakan vektor untuk menggabungkan beberapa hal.

Contoh berikut ini, seperti banyak contoh lainnya, berasal dari "Interoduksi ke R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti alurnya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() dalam R. Kita dapat menulis fungsi ini dalam EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada dalam EMT. Untuk input vektor, dapat dituliskan sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk penugasan. Operator "->" digunakan untuk unit dalam EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator "<-" untuk penugasan menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 dalam EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Dalam R, "a<-4<3" bisa digunakan, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga mengalami ambiguitas yang sama di EMT, tetapi saya mencoba untuk menghilangkannya.

EMT dan R memiliki vektor dengan tipe boolean. Tetapi dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk merepresentasikan salah dan benar. Dalam R, nilai benar dan salah tetap dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti dalam EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,  0,  1,  0,  0]
[0,  0,  3.1,  0,  0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada flag "kesalahan".

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String sama saja dalam R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Dalam R ada paket-paket untuk Unicode. Dalam EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. Sebuah string Unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem Anda sebagai A dengan titik dan tanda hubung di atasnya. Hal ini tergantung pada jenis huruf yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

The string concatenation is done with "+" or "|". It can include numbers, which will print in the current format.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Pengindeksan

Seringkali, ini akan berfungsi seperti di R.

Namun EMT akan menafsirkan indeks negatif dari belakang vektor, sementara R menafsirkan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[10.4,   5.6,   3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,   3.1,   6.4,   21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan secara berbeda dengan indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda harus mengekstrak elemen-elemen yang bukan nol terlebih dahulu di EMT.Logical vectors are not treated differently as index in EMT, in contrast to R. You need to extract the non-zero elements first in EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[1,   1,   0,   1,   1]
[10.4,   5.6,   6.4,   21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,   5.6,   5.6,   10.4]
```

Namun pemberian nama untuk indeks tidak dimungkinkan dalam EMT. Untuk paket statistik, hal ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen-elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^
[10.4,   3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data yang tetap dibandingkan R. Jelas, dalam R terdapat vektor yang berkembang. Anda bisa mengatur sebuah vektor numerik kosong v dan memberikan sebuah nilai pada elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan dalam EMT.

Hal berikut ini sedikit tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i yang ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor tersebut kembali ke variabel global v.

Semakin efisien mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,   2+0i ,   3+0i ,   4+0i   ]
```

Konversi ke string hanya dapat dilakukan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tetapi ada fungsi-fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
  s="[";
  loop 1 to length(v);
     s=s+print(v[#],2,0);
     if #<length(v) then s=s+","; endif;
  end;
  return s+"]";
  endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
  [0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, ada sebuah fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
  [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex, perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
  \left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Pada pengantar R terdapat sebuah contoh dengan apa yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kita ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Sebagai sebuah program statistik, R memiliki fungsi factor() dan tappy() untuk hal ini.

EMT dapat melakukan hal ini dengan mencari indeks dari wilayah-wilayah di dalam daftar unik dari wilayah-wilayah tersebut.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik ini, kita dapat menulis fungsi perulangan kita sendiri untuk melakukan berbagai hal untuk satu faktor saja.

Atau kita dapat meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini sedikit tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berfungsi.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini bekerja untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti halnya di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita dapat mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang ramah.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus disimpan dengan jelas dalam sebuah koleksi dengan jenis dan kategorinya (negara bagian dan wilayah dalam contoh kita). Untuk EMT, kita menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi ini akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita dapat meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan sebuah tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
   ind=nonzeros(f==i);
   if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
   else x[i]=f$(t[ind]);
   endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pemeriksaan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan adalah kategori (faktor) yang tidak memiliki data. Tetapi kita harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini bisa dicetak sebagai sebuah tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Arrays

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe data ini disebut matriks. Akan lebih mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R, larik adalah sebuah vektor dengan sebuah bidang dimensi.

Dalam EMT, sebuah vektor adalah sebuah matriks dengan satu baris. Ini bisa dibuat menjadi sebuah matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
          1           2           3           4           5
          6           7           8           9          10
         11          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sama seperti di R.

```
>X[,2:3]
```

```
          2           3
          7           8
         12          13
         17          18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk mengatur daftar indeks tertentu dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama juga dapat dilakukan dalam EMT hanya dengan sebuah perulangan.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
  loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
     M[i{#},j{#}] = v{#};
  end;
  endfunction
```

Kami mendemonstrasikan hal ini untuk menunjukkan bahwa matriks diteruskan dengan referensi dalam EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
          1           2           0           4           5
          6           0           8           9          10
          0          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Hasil kali luar dalam EMT hanya dapat dilakukan di antara vektor. Hal ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

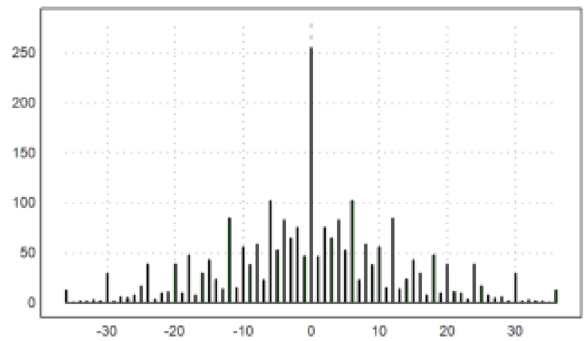
```
          1           2           3           4           5
          2           4           6           8          10
          3           6           9          12          15
          4           8          12          16          20
          5          10          15          20          25
```

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a, b, c, d yang dipilih dari 0 sampai n secara acak. Solusinya dalam R adalah membentuk sebuah matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini bisa dicapai dengan sebuah perulangan. Tetapi perulangan tidak efektif dalam EMT atau R. Dalam EMT, kita bisa menulis perulangan dalam C dan itu adalah solusi tercepat.

Tetapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat sebuah matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



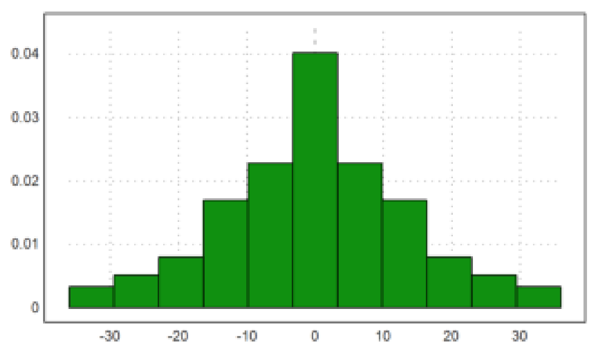
Selain kelipatan yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0,   23,   132,   316,   602,   801,   333,   141,   53,   0]
```

Cara yang paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

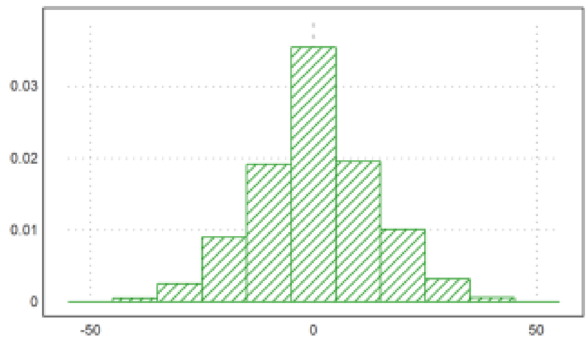
```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Tetapi juga memungkinkan untuk menghitung jumlah dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```



Lists

EMT memiliki dua jenis daftar. Yang pertama adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang kedua adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kita tidak peduli dengan daftar global di sini.

Tipe daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi dalam EMT. Ia berperilaku seperti struktur dalam C, tetapi elemen-elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini elemen-elemen tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Elemen-elemen tersebut diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

Input dan Output File (Membaca dan Menulis Data)

Anda mungkin sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini akan menjelaskan kepada Anda tentang berbagai cara untuk melakukan hal tersebut. Fungsi yang sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan bagaimana cara membaca dan menulis sebuah vektor real ke sebuah file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Untuk menulis data ke sebuah berkas, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di sebuah direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita tuliskan vektor kolom a' ke dalam file. Hal ini akan menghasilkan satu angka pada setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Sebagai contoh, jika Anda memiliki sistem bahasa Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda membutuhkan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan dengan koma). File "test.csv" berikut ini akan muncul di folder cuurent Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk menandai ini, kita mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
 f
 m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan tajuk token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
                f       m
       1        6       7
       2        5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

File terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
 A,B,C
 0.7003664386138074,0.1875530821001213,0.3262339279660414
 0.5926249243193858,0.1522927283984059,0.368140583062521
 0.8065535209872989,0.7265910840408142,0.7332619844597152
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan sebuah koleksi nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke sebuah file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
   0.70037   0.18755   0.32623
   0.59262   0.15229   0.36814
   0.80655   0.72659   0.73326
```

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris-baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.40472
0.37102
0.75547
```

File CSV

Pertama, mari kita tulis sebuah matriks ke dalam sebuah file. Untuk keluarannya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv";  ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut ini adalah isi file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.8221197733097619,0.821531098722547,0.7771240608094004
0.8482947121863489,0.3237767724883862,0.6501422353377985
0.1482301827518109,0.3297459716109594,0.6261901074210923
```

CVS ini dapat dibuka di sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu pada sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Namun, titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca sebuah matriks dari sebuah file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
0.82212   0.82153   0.77712
0.84829   0.32378   0.65014
0.14823   0.32975   0.62619
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke dalam satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk menulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks-matriks tersebut dipisahkan oleh sebuah baris kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
           1           0           0
           0           1           0
           0           0           1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan dengan koma). Pada Excel 2007, gunakan "simpan sebagai" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut ini adalah contohnya.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu untuk membaca matriks ke dalam EMT.

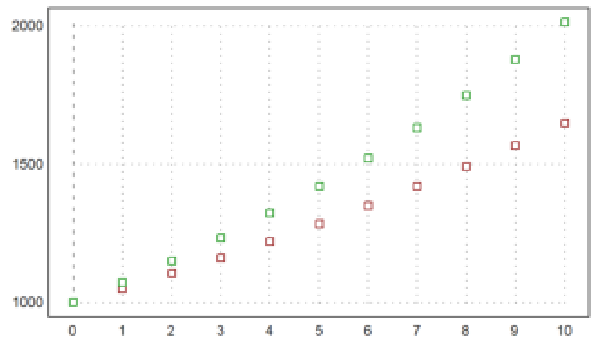
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma digantikan oleh titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```
           0        1000        1000
           1      1051.3      1072.5
           2      1105.2      1150.3
           3      1161.8      1233.7
           4      1221.4      1323.1
           5        1284      1419.1
           6      1349.9        1522
           7      1419.1      1632.3
           8      1491.8      1750.7
           9      1568.3      1877.6
          10      1648.7      2013.8
```

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada beberapa cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebuah baris data. Secara default, fungsi ini mengharapkan sebuah titik desimal. Tetapi fungsi ini juga dapat menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut ini adalah contohnya. Fungsi ini akan berhenti pada akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
  open(file);
  M=[];
  repeat
     until eof();
     v=getvectorline(3);
     if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
  end;
  return M;
  close(file);
  endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
    0.82212    0.82153    0.77712
    0.84829    0.32378    0.65014
    0.14823    0.32975    0.62619
```

Anda juga dapat membaca semua angka dalam file tersebut dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.82212    0.82153    0.77712
    0.84829    0.32378    0.65014
    0.14823    0.32975    0.62619
```

Dengan demikian, sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.50303
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.50303
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kita menulis tabel dengan judul baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
one,two,three
      0.09,      0.39,      0.86
      0.39,      0.86,      0.71
       0.2,      0.02,      0.83
```

File ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kita menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
       one       two     three
      0.09      0.39      0.86
      0.39      0.86      0.71
       0.2      0.02      0.83
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki baris dengan format berikut.

```
> line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1'114.05
```

Pertama, kita dapat memberi tanda pada garis tersebut.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1’114.05
```

Kemudian, kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis dengan menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"’","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, Anda dapat mengekstrak hampir semua informasi dari sebuah baris data.
Anggaplah kita memiliki baris dokumen HTML berikut ini.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kita menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
- tanda kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pencocokan "(...)",

```
- kurung pembuka dan kurung penutup menggunakan solusi terpendek,
- sekali lagi, semua string yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan sebuah kurung pembuka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit untuk dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-cocokan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut ini adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
  v=[]; cp=0;
  repeat
     {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
     until pos==0;
     if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
     cp=pos+strlen(s);
  end;
  return v;
  endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
  1145.45
  5.6
  -4.5
  non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kita membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam judul.

```
>function readversion () ...
```

```
  urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
  repeat
    until urleof();
    s=urlgetline();
    k=strfind(s,"Version ",1);
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
  end;
  urlclose();
  endfunction
```

```
>readversion
```

```
  Version 2024-01-12
```

Masukan dan Keluaran Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
  mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
  0.59918   0.79603
  0.51672   0.29967
```

Sebagai catatan, jika writevar() digunakan pada sebuah variabel, maka ia akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel tersebut.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga dapat membuka file baru atau menambahkan ke file yang sudah ada. Dalam contoh ini, kami menambahkan ke file yang telah dibuat sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
  0.30287   0.15372
   0.7504   0.75401
M2 =
  0.27213
 0.053211
  0.70249
```

Untuk menghapus file, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Sebuah vektor baris dalam sebuah file tidak membutuhkan koma, jika setiap angka berada dalam baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.344851384551
0.0807510017715
0.876519562911
0.754157709472
0.688392638934
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.34485,  0.080751,  0.87652,  0.75416,  0.68839]
```

TAMBAHAN

1)Mencari Median, Mean, dan standar deviasi atau simpangan baku dari data M

```
>M=[1:2023]; ...
>median(M), mean(M), dev(M),
```

```
1012
1012
584.13411702
```

2)Membaca dan Menulis file GOOG.csv yang berada di besmart

```
>filename="GOOG.csv";
>printfile(filename)
```

```
Date,Open,High,Low,Close,Adj Close,Volume
2019-11-04,1276.449951,1323.739990,1276.354980,1311.369995,1311.369995,7217800
2019-11-11,1303.180054,1334.880005,1293.510010,1334.869995,1334.869995,5900600
2019-11-18,1332.219971,1335.529053,1291.150024,1295.339966,1295.339966,6446400
2019-11-25,1299.180054,1318.359985,1298.130005,1304.959961,1304.959961,3688500
2019-12-02,1301.000000,1344.000000,1279.000000,1340.619995,1340.619995,6719700
2019-12-09,1338.040039,1359.449951,1336.040039,1347.829956,1347.829956,6129400
2019-12-16,1356.500000,1365.000000,1348.984985,1349.589966,1349.589966,9558800
2019-12-23,1355.869995,1364.530029,1342.780029,1351.890015,1351.890015,2936500
2019-12-30,1350.000000,1372.500000,1329.084961,1360.660034,1360.660034,4605700
2020-01-06,1350.000000,1434.928955,1350.000000,1429.729980,1429.729980,8084600
2020-01-13,1436.130005,1481.295044,1426.020020,1480.390015,1480.390015,8063800
2020-01-20,1479.119995,1503.213989,1465.250000,1466.709961,1466.709961,6783300
2020-01-27,1431.000000,1470.130005,1421.199951,1434.229980,1434.229980,8166900
2020-02-03,1462.000000,1490.000000,1426.300049,1479.229980,1479.229980,11826100
```

```
2020-02-10,1474.319946,1529.630005,1474.319946,1520.739990,1520.739990,6059400
2020-02-17,1515.000000,1532.105957,1480.439941,1485.109985,1485.109985,4898300
2020-02-24,1426.109985,1438.140015,1271.000000,1339.329956,1339.329956,14316700
2020-03-02,1351.609985,1410.150024,1261.050049,1298.410034,1298.410034,11969000
2020-03-09,1205.300049,1281.150024,1113.300049,1219.729980,1219.729980,16512100
2020-03-16,1096.000000,1157.969971,1037.280029,1072.319946,1072.319946,19600200
2020-03-23,1061.319946,1169.969971,1013.536011,1110.709961,1110.709961,18250300
2020-03-30,1125.040039,1175.310059,1079.810059,1097.880005,1097.880005,11683000
2020-04-06,1138.000000,1225.569946,1130.939941,1211.449951,1211.449951,9202500
2020-04-13,1209.180054,1294.430054,1187.598022,1283.250000,1283.250000,10349000
2020-04-20,1271.000000,1293.310059,1209.709961,1279.310059,1279.310059,9148200
2020-04-27,1296.000000,1359.989990,1232.199951,1320.609985,1320.609985,13086900
2020-05-04,1308.229980,1398.760010,1299.000000,1388.369995,1388.369995,7156600
2020-05-11,1378.280029,1416.530029,1323.910034,1373.189941,1373.189941,7924600
2020-05-18,1361.750000,1415.489990,1354.250000,1410.420044,1410.420044,7454400
2020-05-25,1437.270020,1441.000000,1391.290039,1428.920044,1428.920044,7276700
2020-06-01,1418.390015,1446.552002,1404.729980,1438.390015,1438.390015,6970600
2020-06-08,1422.339966,1474.259033,1386.020020,1413.180054,1413.180054,8274100
2020-06-15,1390.800049,1460.000000,1387.920044,1431.719971,1431.719971,9501200
2020-06-22,1429.000000,1475.941040,1351.989990,1359.900024,1359.900024,10226400
2020-06-29,1358.180054,1482.949951,1347.010010,1464.699951,1464.699951,7486900
2020-07-06,1480.060059,1543.829956,1472.859985,1541.739990,1541.739990,7551500
2020-07-13,1550.000000,1577.131958,1483.500000,1515.550049,1515.550049,8018100
2020-07-20,1515.260010,1586.989990,1488.400024,1511.869995,1511.869995,6879500
2020-07-27,1515.599976,1540.969971,1454.030029,1482.959961,1482.959961,9166000
2020-08-03,1486.640015,1516.844971,1458.650024,1494.489990,1494.489990,9785200
2020-08-10,1487.180054,1537.250000,1473.079956,1507.729980,1507.729980,6991400
2020-08-17,1514.670044,1597.719971,1507.969971,1580.420044,1580.420044,8219400
2020-08-24,1593.979980,1659.219971,1580.569946,1644.410034,1644.410034,11011800
2020-08-31,1647.890015,1733.180054,1547.613037,1591.040039,1591.040039,11877700
2020-09-07,1533.510010,1584.081055,1497.359985,1520.719971,1520.719971,7601300
2020-09-14,1539.005005,1564.000000,1437.130005,1459.989990,1459.989990,9323100
2020-09-21,1440.060059,1469.520020,1406.550049,1444.959961,1444.959961,8902600
2020-09-28,1474.209961,1499.040039,1449.301025,1458.420044,1458.420044,7750300
2020-10-05,1466.209961,1516.520020,1436.000000,1515.219971,1515.219971,6728000
2020-10-12,1543.000000,1593.859985,1532.569946,1573.010010,1573.010010,8989300
2020-10-19,1580.459961,1642.359985,1525.670044,1641.000000,1641.000000,9226500
2020-10-26,1625.010010,1687.000000,1514.619995,1621.010010,1621.010010,11248500
2020-11-02,null,null,null,null,null,null
2020-11-02,1628.160034,1660.674927,1627.652466,1638.349976,1638.349976,1278888
```

3. Mean data berkelompok

Sampel acak 20 pekerja survei lapangan BPS, setelah diteliti mengenai besar pengeluarannya untuk biaya operasional survei per hari, diperoleh data sebagai berikut:
Pengendara dengan pengeluaran 50-59 ribu rupiah terdapat 5 orang, dengan pengeluaran 60-69 ribu rupiah sebanyak 3 orang, dengan pengeluaran 70-79 ribu rupiah sebanyak 7 orang, dengan pengeluaran 80-89 ribu rupiah sebanyak 2 orang, dengan pengeluaran 90-99 ribu rupiah sebanyak 3 orang.
Berapa rata-rata pengeluaran biaya operasional pekerja survei tersebut?

```
>Tb:=50-0.5, p:=(59-50)+1, Ta:=99+0.5
```

```
49.5
10
99.5
```

```
>r:=Tb:p:Ta; v=[5,3,7,2,3];
>T:=r[1:5]' | r[2:6]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","frekuensi"])
```

```
 tepi bawah tepi atas frekuensi
       49.5      59.5         5
       59.5      69.5         3
       69.5      79.5         7
       79.5      89.5         2
       89.5      99.5         3
```

```
>t=(T[,1]+T[,2])/2, t=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
          54.5
          64.5
          74.5
          84.5
          94.5
[54.5,  64.5,  74.5,  84.5,  94.5]
```

```
>mean(t,v)
```

```
72
```