***Estruturas algébricas e cardinalidade***

Volnei Luiz Campos Prado

Prof: Thilene Falcão

**SUMÁRIO**

**1 Estrutura Algébrica .....................................................................................................3**

**1.1 Grupo .........................................................................................................................3**

**1.1.1 Consequência .........................................................................................................3**

**1.1.2 Exemplos .................................................................................................................4**

**1.1.3 Classificação de grupos ..........................................................................................6**

**1.1.4 Classificação dos anéis ............................................................................................6**

**1.1.5 Classificação dos módulos ......................................................................................7**

**2 Cardinalidade ...............................................................................................................7**

* 1. **Comparação de conjuntos ........................................................................................7**

**2.1.1 |A|=|B| ...................................................................................................................................7**

**2.1.2 |A|≥|B| ...................................................................................................................................7**

**2.1.3 |A|<|B| ...................................................................................................................................8**

**2.2 Números cardinais .................................................................................................................8**

1. **Estrutura Algébrica**

Em álgebra abstracta, uma estrutura algébrica consiste num conjunto associado a uma ou mais operações sobre o conjunto que satisfazem certos axiomas. Caso não existam ambiguidades, geralmente identifica-se o conjunto com a estrutura algébrica. Por exemplo, um grupo (G,\*) refere-se geralmente apenas como grupo G.

Em algumas estruturas algébricas além do conjunto principal existe mais um conjunto, denominado conjunto de escalares. Neste caso a estrutura terá dois tipos de operações: operações internas, que operam os objetos principais entre si e operações externas, que representam ações dos escalares sobre elementos do conjunto principal. Por exemplo, um espaço vectorial tem dois conjuntos, um conjunto de vectores e outro de escalares. Assim, se v1 e v2 são dois vetores e k é um escalar v1 \* v2 seria o produto (interno) de vetores e k \* v1 seria o produto (externo) de um escalar por um vetor.

O conceito de estrutura algébrica pode ser considerado sinônimo de Álgebra e Álgebra universal.

É comum representar uma estrutura algébrica por uma *n-upla* do tipo *(G,F,+,-,f,<,1)*. Nesta notação, são enumerados os conjuntos que fazem parte da estrutura, seguido de constantes, funções e relações.

* 1. **Grupo**

Dado um conjunto não-vazio  G  e uma operação  ❋  sobre esse conjunto,   
se diz que o par  ( G ,  ❋ )  é um grupo,  ou,  que,   
G  é grupo em relação a operação  ❋,  se:   
  i)  a operação sobre  G  é associativa,   
 ii)  a operação sobre  G  admite elemento neutro,   
 iii)  todo elemento de  G  tem simétrico em relação a essa lei.

* + 1. **Consequência**

Todo elemento do grupo  (G ,  ❋)  é regular, pelos três motivos acima.

Se  r  ∈  G,  então ele tem simétrico  (r′),  e,  para quaisquer  x,  y  em  G,  se:   
r  ❋  x  =  r  ❋  y   ⇒   x  =  y   
  
Pois:   
r′  ❋  (r  ❋  x)  =  r′  ❋  (r  ❋  y)  ( item  iii )   
(r′  ❋  r)  ❋  x  =  (r′  ❋  r)  ❋  y  ( item  i )   
*e*  ❋  x  =  *e*  ❋  y  ( item  ii )   
x  =  y   
  
x  ❋  r  =  y  ❋  r  ❋  y   ⇒   x  =  y   
  
Pois:   
(x  ❋  r)  ❋  r′  =  (x  ❋  r)  ❋  r′  ( item  iii )   
x  ❋  (r  ❋  r′)  =  x  ❋  (r  ❋  r′)  ( item  i )   
x  ❋  *e*  =  y  ❋  *e*  ( item  ii )   
x  =  y

* + 1. **Exemplos**

**Grupos aditivos**  (grupos cuja operação é a adição usual):   
( Z ,  + );  ( Q ,  + );   ( IR ,  + );   ( C ,  + );   
( Zₘ ,  + )  ( grupo aditivo de classe de resto );   
( Mₘ ₓ ₙ (IR) ,  + )  ( grupo aditivo das matrizes reais  "m"  por  "n" ).   
**Grupos multiplicativos** (grupos cuja operação é a multiplicação usual):   
( Z❋,  • );   ( Q❋,  • );   ( IR❋,  • );   ( C❋,  • ).   
Todos com exceção do  "zero"  (pois não admite inverso multiplicativo).   
**Grupo linear de grau**  "n":   
O conjunto  GLR (IR)  é o conjunto formado por:   
matrizes quadradas inversíveis de ordem  "n",  de números reais.

**Grupoide** um conjunto com uma única operação binária.

**Quasegrupo** um grupoide no qual a divisão é sempre possível.

**Laço um quase-grupo** com um elemento neutro.

**Semigrupo** um grupoide associativo.

**Monoide** um semigrupo com um elemento neutro.

**Grupo um monoide**, no qual cada elemento tem um inverso ou, o que é equivalente, um laço associativo.

**Grupo abeliano** um grupo que obedece a comutatividade.

**Anel** um conjunto com uma operação de grupo abeliano definida como adição, junto com uma operação de semigrupo como a multiplicação, que satisfaça a distributividade.

**Corpo um anel** no qual os elementos não-zero formam um grupo abeliano sob multiplicação. Reticulado um conjunto com duas operações comutativas, associativas e idempotentes, que satisfazem a lei de absorção.

**Álgebra booleana** um reticulado limitado, distributivo e complementado.

Nas estruturas seguintes, temos dois conjuntos, um deles (auxiliar), chamado de *conjunto de escalares* e outro, o conjunto principal. Além das operações internas sobre o conjunto principal, podemos ter operações conectando os dois conjuntos:

**Módulo M** é um módulo sobre um anel A quando M é um grupo abeliano, e temos uma função de A x M em M, definida como multiplicação escalar, com regras que se parecem formalmente com a distributividade e a associatividade.

**Espaço vectorial** um módulo sobre um corpo. Se V é um espaço vectorial sobre um corpo F, chamamos os elementos de V de vectores e os elementos de F de escalares.

**Álgebra** um módulo ou espaço vectorial, junto com uma operação bilinear entre vectores definida como multiplicação.

**Álgebra associativa** uma álgebra cuja multiplicação é associativa.

**Álgebra comutativa** uma álgebra associativa cuja multiplicação é comutativa.

**Álgebra de Kleene** duas operações binárias e um operador unitário, modelados em expressões regulares.

**Conjunto** embora alguns matemáticos discordem, um conjunto pode ser considerado uma estrutura algébrica degenerada, com zero operações definidas sobre ela.

Além das estruturas algébricas, existem mais duas estruturas fundamentais na matemática. São elas:

**Estruturas de ordem**, em que ao conjunto principal é associado uma relação de ordem. Por exemplo, um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado em que para quaisquer dois elementos a,b existe um supremo sup(a,b) e um ínfimo inf(a,b).

**Estruturas topológicas** em que o foco está no conjunto das partes P(C) de um conjunto C.

A partir destas três estruturas podem ser definidas estruturas mistas, quando para um conjunto são considerados operações, relações e partes de forma combinada. Por exemplo, um grupo topológico é um espaço topológico com uma estrutura de grupo tal que as operações de multiplicação e inversão são contínuas; um grupo topológico possui quer uma estrutura topológica, quer uma estrutura algébrica. Outros exemplos comuns são espaços vectoriais topológicos e grupos de Lie.

* + 1. **Classificação dos grupos**
* Semigrupo
* Monoide
* Grupo
* Grupo solúvel
* Grupos nilpotentes
* Grupo abeliano (grupo comutativo)
* Grupo cíclico
  + 1. **Classificação dos anéis**
* Anel
* Anel comutativo
* Domínio de integridade (anel de integridade)
* Domínio de fatoração única (anel fatorial)
* Domínio principal
* Domínio euclidiano
* Corpo
  + 1. **Classificação dos módulos**
* Módulo
* Módulo finitamente gerado
* Módulo cíclico
* Álgebra sobre um anel
* Espaço vetorial
* Álgebra sobre um corpo

1. **Cardinalidade**

Na matemática, a cardinalidade de um conjunto é uma medida do "número de elementos do conjunto". Por exemplo, o conjunto A={2,4,6} contém 3 elementos e por isso possui cardinalidade 3. Existem duas abordagens para cardinalidade. Uma que compara conjuntos diretamente, usando funções bijetoras e funções injetoras, e outra que usa números cardinais.

A cardinalidade de um conjunto A é usualmente denotada |A|, com uma barra vertical de cada lado; trata-se da mesma notação usada para valor absoluto, por isso o significado depende do contexto.

* 1. **Comparação de conjuntos**
     1. **|A|=|B|**

Dois conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade se existe uma bijeção, ou seja, uma função que seja simultaneamente injetora e sobrejetora, entre eles.

Por exemplo, o conjunto E={0, 2, 4, 6, ...} dos números pares não-negativos tem a mesma cardinalidade do conjunto N={0, 1, 2, 3, ...} dos números naturais, uma vez que a função f(n)=2n é uma bijeção de N para E.

* + 1. **|A|≥|B|**

A tem cardinalidade maior ou igual que a cardinalidade de B se existe uma função injetora de B para A.

* + 1. **|A|>|B|**

A tem cardinalidade estritamente maior do que a cardinalidade de B se existe uma função injetora de B para A, mas não existe nenhuma função bijetora de B para A.

Por exemplo, o conjunto R de todos os números reais tem cardinalidade estritamente maior do que a cardinalidade do conjunto N de todos os números naturais pois a função identidade i:N→R, definida como i(x)=x, é injetora. Por outro lado, é possível demonstrar a inexistência de uma função bijetora de N para R (veja Argumento de Diagonalização de Cantor ou a Primeira Prova da Incontabilidade de Cantor).

* 1. **Números cardinais**

O cardinal indica o número ou quantidade dos elementos constituintes de um conjunto. É interessante destacar que se diferencia do ordinal, porque o ordinal introduz ordem e dá ideia de hierarquia: Primeiro, segundo, terceiro, etc. O cardinal, por sua vez, nomeia o número de elementos constituintes e esse é o nome do conjunto correspondente. Para a nomenclatura destes números ver nomes dos números.

Os numerais podem ser cardinais ou ordinais. O número cardinal é aquele que expressa uma quantidade única, enquanto o número ordinal indica a ordem ou a série em que determinado número se encontra.

Em geral, aprendemos e nos acomodamos tão facilmente a passar do ponto de vista cardinal para o ordinal que quase não distinguimos mais essa diferença. Num exemplo simples: o mês de setembro é composto de 30 dias. O número 30 indica o total, a quantidade absoluta, de dias desse mês. Trata-se, portanto, de um número cardinal.

Porém, empregamos outro ponto de vista quando dizemos "dia 30 de outubro". Nesse caso o número 30 não está sendo usado para indicar os 30 dias do mês, mas o trigésimo dia de outubro, especificando o seu lugar na ordem de sucessão dos dias desse mês, explicando uma ordem. Trata-se, então, de uma utilização ordinal.

ado um conjunto A, o cardinal deste conjunto é simbolizado por |A|

Por exemplo: Se A tem 3 elementos o cardinal indica-se |A| = 3

Existe uma relação entre o cardinal de um conjunto e o [conjunto de partes](https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_partes) ou conjunto potência:

**|A| = n => |P(A)| = 2^n{\displaystyle |A|=n\Rightarrow |P(A)|=2^{n}}**

Onde |P(A)| é o cardinal do conjunto de partes.