Цифровая обработка сигналов

Лабораторная работа № 1

Генерация тонов

Содержание

Организация:	Самарский университет
Подразделение:	Кафедра геоинформатики и информационной безопасности
Автор:	Юзькив Руслан Романович [yuzkiv.rr@ssau.ru]
Версия:	2022.09.26 (электронная)

Ты слышишь музыку в гудении осы
И в шорохе опавшего листочка.
Пусть капают минуты и часы
И разбивают время на кусочки,

Но музыку разъять нельзя никак,
Она течет единою волною,
И, как морской прилив, за тактом такт,
Всё заполняет музыка собою.

Татьяна Зубкова, «Ты и музыка»

1 Теоретические сведения

1.1 Базовые детерминированные сигналы

Название	Обозначение	Определение
Единичный импульс	$\delta[n]$	$\begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Единичный скачок	$u[n]$	$\begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Прямоугольный импульс	$\Pi_N[n]$	$\begin{cases} 1, & 0 \leq n < N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Правосторонняя экспонента	—	$\begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = a^n u[n]$
Гармонический сигнал (синусоида или косинусоида)	—	$\cos(\omega n + \varphi)$
Комплексная экспонента	—	$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$

1.2 Относительная циклическая частота

Рассмотрим непрерывный периодический сигнал $\cos(\Omega t)$. Данный сигнал характеризуется циклической (угловой, круговой) частотой $\Omega \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$. Если косинус рассматривать как проекцию равномерного вращательного движения, то эта частота численно равна углу [в радианах], на который вращаемое тело поворачивается за 1 с. Поделив угол полного оборота 2π на Ω, можно найти период сигнала $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ $[\text{с}]$.

Линейной частотой f $[\text{Гц}]$ называют количество колебаний (повторений, периодов) совершаемых объектом за 1 с. Напомним очевидные соотношения: $\Omega = 2\pi f$, $T = \dfrac{1}{f}$. Обозначение f происходит от английского слова «frequency» (частота).

Шаг дискретизации Δ — время между замерами отсчётов при равномерной дискретизации сигнала. Измеряется в $[\text{с}]$. Например, если непрерывный сигнал $\cos(\Omega t)$ дискретизируется с равномерным шагом Δ, начиная с момента времени $t = 0$ с, то получается дискретный сигнал $x[n] = \cos(\Omega \cdot \Delta \cdot n)$. Отметим, что получаемый дискретный сигнал в зависимости от значения $\Omega \cdot \Delta$ может оказаться как периодическим, так и непериодическим.

Частота дискретизации f_s — количество производимых замеров в секунду при равномерной дискретизации. Измеряется в $\left[\frac{\text{отсчёт}}{\text{с}} = \text{Гц}\right]$. Индекс s в обозначении происходит от английского слова «sampling» (дискретизация). Шаг дискретизации связан с частотой дискретизации соотношением $\Delta = \frac{1}{f_s}$.

Вернёмся к дискретному гармоническому сигналу $\cos(\Omega \cdot \Delta \cdot n)$. Часто такая форма записи, требующая знание шага дискретизации, оказывается неудобной. Поэтому вводят понятие относительной циклической частоты $\omega = \Omega \cdot \Delta$. Такую частоту иногда ещё называют нормированной к частоте дискретизации, т. к. $\Omega \cdot \Delta = 2\pi \frac{f}{f_s}$. Эта величина измеряется в $\left[\frac{\text{рад}}{\text{отсчёт}}\right]$, является безразмерной и для равномерного вращательного движения численно равна углу [в радианах], на который тело поворачивается за один дискретный отсчёт. Обратим внимание на отличие от обычной циклической частоты — привязка к физической шкале времени, измеряемой в секундах, заменена на привязку к безразмерным номерам отсчётов. Относительная циклическая частота позволяет оперировать дискретным гармоническим сигналом, записанный в форме $\cos(\omega n)$, без привязки к физической шкале времени и без знания частоты/шага дискретизации (однако знание частоты/шага дискретизации потребуется, если понадобится перейти от отсчётов к физической шкале времени).

1.3 Логарифмическая шкала

Диапазон амплитуд звукового давления, воспринимаемый человеческим ухом, крайне широк и изменяется примерно от $20\ \text{мкПа}$ (порог слышимости) до $60\ \text{Па}$ (сирена, мотоцикл без глушителя). Верхний и нижний порог отличаются в $\frac{60}{20 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^6$ (миллионы!) раз, что делает неудобным использование линейной шкалы для измерения громкости звука.

Бел $[\text{Б}]$ — единица логарифмического отношения двух физических величин, выражающая отношение двух мощностей как десятичный логарифм этого отношения: $1\ \text{Б} = \lg \frac{P_2}{P_1}$. Если вместо энергетической величины P (мощности, интенсивности звука) нужно использовать силовую F (звуковое давление), то с учётом $P \propto F^2$ получаем $1\ \text{Б} = \lg \frac{F_2^2}{F_1^2} = 2 \lg \frac{F_2}{F_1}$.

Если выразить F_2 через F_1, то получим $F_2 = F_1 \cdot 10^{B/2}$. Таким образом, изменение звукового давления на $1\ \text{Б}$ означает увеличение звукового давления в

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,16$ раза. На практике целый Бел практически не употребляется, вместо него используется десятая часть Бела — децибел $[\text{дБ}]$.

Часто в качестве знаменателя F_1 выступает некая общепринятая исходная (опорная) величина. Тогда отношение принято называть уровнем. Для уровня звукового давления опорное значение составляет $20\ \text{мкПа}$. Например, уровень звукового давления $40\ \text{дБ}$ означает амплитуду звукового давления, равную $20\ \text{мкПа} \cdot 10^{\frac{4}{2}} = 2\ \text{мПа}$ и примерно соответствует тихому разговору/шуму компьютера или кондиционера.

2 Практические сведения

Пакет	**Функция**
`matplotlib`	[`matplotlib.pyplot.stem`]
	[`matplotlib.pyplot.show`]
`numpy`	[`numpy.linspace`]
	[`numpy.cos`] или [`numpy.sin`]
`scipy`	[`scipy.io.wavfile.write`]
	[`scipy.signal.sawtooth`]
	[`scipy.signal.square`]

В приведённом фрагменте кода не соблюдены принципы хорошего кода и он предназначен исключительно для иллюстрации работы некоторых функций.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

from scipy.io.wavfile import write


# Создаём массив с моментами времени: 0, 1/16000, 2/16000, …, 15999/16000, 1 с
# Частоту дискретизации полагаем равной 16 кГц
t = np.linspace(0, 1, 16000 + 1)

# Вычисляем гармонический сигнал sin с циклической частотой 2700 рад/с
# При частоте дискретизации 16 кГц это примерно соответствует 430 Гц
x = np.sin(2700 * t)

# Сохраняем полученный сигнал в аудиофайл со значением частоты дискретизации 16 кГц
write('example.wav', 16000, x)

# Рисуем график полученного сигнала на интервале от 0 до 5 мс
# Для ускорения отображения большого количества точек можно использовать plot вместо stem
plt.xlim(0, 0.005)
plt.stem(t, x, use_line_collection=True)
plt.show()
```

3 Задание на лабораторную работу

3.1 Генерация чистого тона

Напишите функцию `tone` для генерации звукового тона. Функция должна иметь следующие параметры:

1) `f` — частота сигнала (в герцах);
2) `t` — длительность сигнала (в секундах);
3) `waveform` — форма сигнала (значение по умолчанию: гармоническая);
4) `fs` — частота дискретизации (в герцах, значение по умолчанию: 44100).

Параметр формы сигнала передавать в виде строки или перечисления. Функция должна поддерживать как минимум следующие формы:

1) гармоническая (см. `cos` или `sin`);
2) меандр со скважностью 2 (см. `square`);
3) треугольная (см. `sawtooth` с нужным значением параметра `width`);
4) пила (см. `sawtooth` со значением параметра `width` по умолчанию).

Функция должна возвращать `numpy`-массив значений типа `np.float`. Амплитуда создаваемого сигнала должна равняться 1 (значения сигнала изменяются от -1 до $+1$).

Проверьте корректность реализации:

1) визуально, нарисовав сигнал или его часть с помощью `stem`;
2) аудиально, сохранив сигнал с помощью `write` в wav-файл и проверив на слух полученный аудиофайл с использованием онлайн-сервиса Tone Generator.

3.2 Генерация затухающего составного тона

Напишите функцию `musical_tone` для генерации затухающего составного тона. Об обязательных параметрах функции см. в конце данного подраздела.

В составном тоне присутствует ряд чистых тонов с частотами $f, 2f, 3f, 4f$ и т. д. Частоту f называют основной частотой, кратные ей частоты $2f$, $3f$ и т. д. — обертонами.

Для генерации сигнала составного тона необходимо создать сигналы нужных чистых тонов и сложить их. Амплитуду основного тона выбрать равной 1. Относительная интенсивность обертонов (значения их амплитуд) может быть различной — в частности, именно благодаря этому обеспечивается специфика звучания разных музыкальных инструментов. Значения этих амплитуд выбрать по своему усмотрению. Некоторые возможные примеры приведены на рисунке 1. На приведённой иллюстрации используется понятие амплитудного спектра — графика, показывающего зависимость амплитуды гармоники от её частоты. Учтите, что частота последнего обертона не должна превышать 20 кГц (порог слышимости человека).

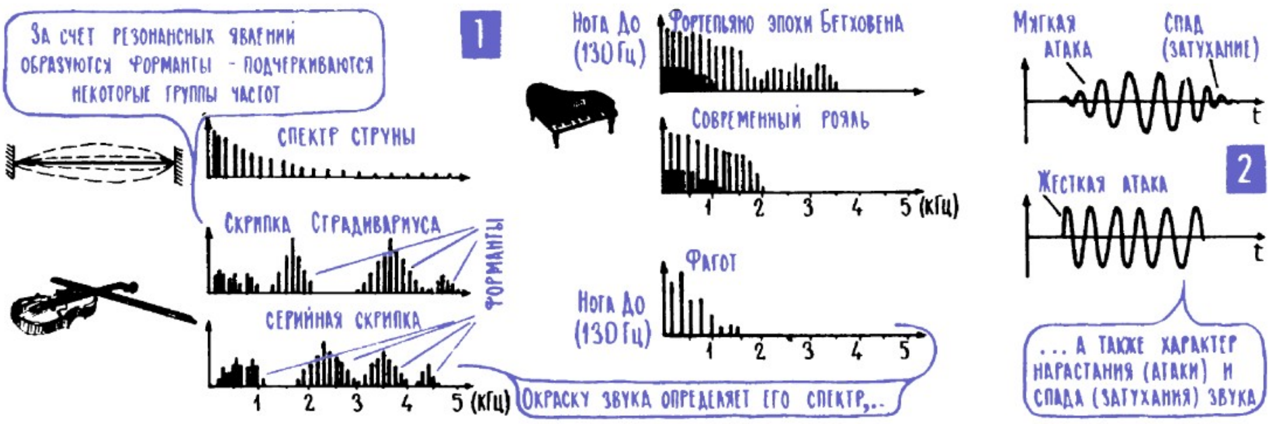


Рисунок 1 — Особенности музыкальных звуков

Источник: [Сворень Р. А., «Электроника шаг за шагом»](#) (рисунок 14.3)

После сложения всех чистых тонов должен получиться незатухающий периодический сигнал сложной формы с периодом $\frac{1}{f}$. Поскольку амплитуда полученного сигнала будет превышать 1, необходимо его нормировать (привести амплитуду к 1).

Затухание сигнала с течением времени можно обеспечить умножением полученного сигнала на правостороннюю экспоненту. Так как при программировании все операции производятся с конечными по длительности сигналами, то формально умножение происходит на правостороннюю экспоненту, ограниченную прямоугольным импульсом — $a^n \cdot \Pi_N[n]$, где $0 < a \leq 1$ — параметр затухания, N — количество отсчётов в сигнале.

С учётом всего вышеизложенного, функция `musical_tone` должна иметь следующие параметры:

1) `f` — частота основного тона (в герцах);

2) `t` — длительность сигнала (в секундах);

3) `waveform` — форма сигнала, используемая для генерации чистых тонов (значение по умолчанию: гармоническая);

4) `fs` — частота дискретизации (в герцах, значение по умолчанию: 44100);

5) `db` — уровень затухания (в децибелах) амплитуды в конце сигнала относительно единичный амплитуды (предоставить значение по умолчанию, которое подобрать по своему вкусу).

Примечание 1. Значение параметра затухания a для правосторонней экспоненты должно вычисляться на основе значений параметров функции `t`, `fs` и `db`.

Примечание 2. Уровень затухания `db` — неположительное число (при нуле обеспечить отсутствие затухания). При передаче положительного числа допускается как генерировать исключение, так и обеспечить противоположный эффект (усиление вместо затухания).

Примечание 3. Опционально можно предусмотреть параметры, позволяющие регулировать тембровую окраску звука (относительную интенсивность обертонов) и/или более тонко задавать параметры нарастания и спада (см. рисунок 1). Допускается обеспечение затухания не на всей длительности сигнала, а только на некой концевой части (т. е. умножение на затухающую экспоненту происходит не для всего сигнала целиком, а только для какого-то количества последних секунд). Данный пункт не является обязательным к выполнению.

3.3 Творческая часть

Используя функцию `musical_tone`, написать код, который создаёт простенькое музыкальное произведение небольшой длительности (ориентировочно от 8 до 20 секунд). Для стыковки фрагментов, звучащих в разные моменты времени, могут быть полезными функции `numpy.concatenate`, `numpy.roll`, `numpy.zeros`.

Возможный вариант выполнения:

1. На сайте https://virtualpiano.net зайти в раздел Music Sheets, подобрать произведение по вкусу (рекомендуется выбрать произведение не выше 4-го уровня сложности) и перейти на страницу этого произведения (пример страницы: Fur Elise; разумеется, вы должны использовать любое другое произведение).

2. На странице отображается список нот в виде клавиш английской раскладки клавиатуры. Объяснение используемой нотации можно посмотреть в секции «Semantics of music sheets» раздела Learn/Teach.

3. Внизу страницы можно нажать на кнопку «Play this song», чтобы загрузить указанные ноты в виртуальное пианино, прослушать произведение (кнопка «Auto Play») и выбрать небольшую часть композиции для воспроизведения в собственном скрипте. Пример виртуального пианино с загруженными нотами: Fur Elise.

4. Для того, чтобы узнать значения основных частот используемых клавиш, необходимо включить американскую стандартную систему нотации. Это делается с помощью переключателя «Note Labels». На странице произведения этот переключатель находится внизу, после нот; на странице виртуального пианино — в меню «Key

Assist». В итоге должны появиться обозначения в американской системе нотации — в виде букв C, D, E, F, G, A, B с цифрой (буква означает ноту, цифра — октаву).

5. Используя сопоставление нот с соответствующими основными частотами (например: [Table of note frequencies]), реконструировать часть композиции в собственном скрипте с использованием функции `musical_tone`.

4 Формат сдачи

Предоставить скрипт и wav-файл, содержащий музыкальное произведение из творческой части задания.

Скрипт должен содержать:

1) реализованную функцию `tone`;

2) реализованную функцию `musical_tone`;

3) код генерации предоставляемого wav-файла с музыкальным произведением.

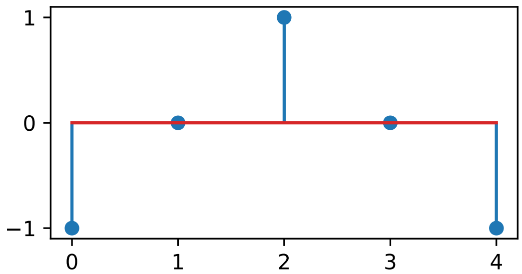
5 Контрольные вопросы

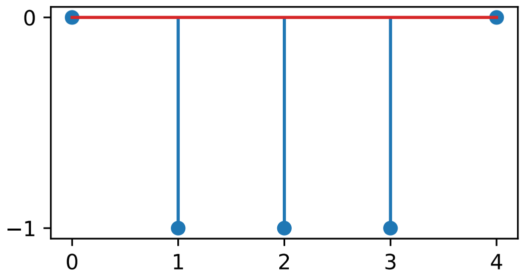
1. Определение единичного импульса, единичного скачка, правосторонней экспоненты, комплексной экспоненты, гармонического сигнала.

2. Запишите единичный скачок в виде импульсной декомпозиции (в виде линейной комбинации единичных импульсов). Подсказка: нужно использовать знак $\sum$.

3. Запишите комплексную экспоненту в виде импульсной декомпозиции.

4. Запишите импульсные декомпозиции для следующих сигналов:





5. Определение частоты: линейной, циклической, относительной циклической.

6. Дан дискретный сигнал $x[n] = (-1)^n$. Какой линейной частоте может соответствовать такой сигнал, если частота дискретизации равна $4\ \text{Гц}$?

7. Для дискретного сигнала $x[n] = \cos(\omega n)$ приведите примеры конкретных значений циклической частоты ω, при которых дискретный сигнал будет: 1) периодическим; 2) непериодическим.

8. Почему для частоты дискретизации используют весьма специфическое значение $44{,}1\ \text{кГц}$, а не, например, «красивое» круглое значение $40\ \text{кГц}$?

9. Амплитуда звукового давления некоторого сигнала равна 50 мкПа. Сигнал был усилен на 2 Б. Чему равна амплитуда звукового давления усиленного сигнала?

10. Оцените, какая сила действует на барабанную перепонку при уровне звукового давления 100 дБ? Площадь барабанной перепонки принять равной 65 мм^2. Ответ выразить в ньютонах. Справочно: указанный уровень звукового давления примерно соответствует громкому автомобильному сигналу на расстоянии 5 м.

11. Как можно на пальцах объяснить тот факт, что сигналы чистых тонов 1 Гц, 5 Гц, 9 Гц и т. д., генерируемых функцией `tone` при $f_s = 4$ Гц, являются неразличимыми? Поясните наблюдаемый эффект на схематичном графике. Как с учётом этого эффекта может измениться ответ на задачу № 6?