计数基础

俞畅

福建师范大学附属中学

2023 年 7 月 15 日

目录

一些说明

以认识为主，不会讲太深。

前置知识：

- 加法原理、乘法原理
- 简单排列组合
- 简单 DP

请多多提问，积极发言。

明天早上的模拟赛会有比较多的计数题。

一些说明

以认识为主，不会讲太深。
前置知识：

- 加法原理、乘法原理
- 简单排列组合
- 简单 DP

请多多提问，积极发言。
明天早上的模拟赛会有比较多的计数题。

一些说明

以认识为主，不会讲太深。
前置知识：

- 加法原理、乘法原理
- 简单排列组合
- 简单 DP

请多多提问，积极发言。
明天早上的模拟赛会有比较多的计数题。

目录

排列数与组合数

阶乘（注意 $0! = 1$）

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

组合数

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个的方案数。

排列数/下降幂

$$A_n^m = n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个排成一排的方案数。

排列数与组合数

阶乘（注意 $0! = 1$）

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

组合数

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个的方案数。

排列数/下降幂

$$A_n^m = n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个排成一排的方案数。

排列数与组合数

阶乘（注意 $0! = 1$）

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

组合数

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个的方案数。

排列数/下降幂

$$A_n^m = n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n 个不同物品选出 m 个排成一排的方案数。

常用等式

- 二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

- 对称性

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$$

- 帕斯卡公式

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$$

常用等式

- 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

- 对称性

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

- 帕斯卡公式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

常用等式

- 二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

- 对称性

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$$

- 帕斯卡公式

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$$

常用等式

- 阶乘展开式的推论

$$\binom{n}{m+1} = \frac{n-m}{m+1}\binom{n}{m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

- 二项式定理的推论

$$2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

$$[n=0] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$$

常用等式

- 阶乘展开式的推论

$$\binom{n}{m+1}=\frac{n-m}{m+1}\binom{n}{m}$$

$$\binom{n}{m}=\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

- 二项式定理的推论

$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

$$[n=0]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$$

常用等式

- 竖线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

- 斜线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m}=\binom{n+1}{n-m}$$

- 三项式等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

- 范德蒙等式

$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}=\binom{r+s}{m}$$

常用等式

- 竖线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

- 斜线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m}=\binom{n+1}{n-m}$$

- 三项式等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

- 范德蒙等式

$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}=\binom{r+s}{m}$$

常用等式

- 竖线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

- 斜线求和

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m}=\binom{n+1}{n-m}$$

- 三项式等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

- 范德蒙等式

$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{m-k}=\binom{r+s}{m}$$

随堂小练习

1. 求 n 个不同物品选出 m 个排成环的方案数，旋转后相同的也算相同的环。
2. 有 k 种物品，其中第 j 种物品有 n_j 个相同的，求把它们排成一排的方案数。
3. 求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=b$ 的正整数解的个数。
4. 求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=b$ 的非负整数解的个数。
5. 求从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选出 m 个数，使得两两不相邻的方案数。
6. 求集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集的子集个数和。

组合数的求法

- 杨辉三角递推
- 逆元法
- 从相邻项递推
- 卢卡斯定理 *

杨辉三角的前几行要很熟悉。

组合数的求法

- 杨辉三角递推
- 逆元法
- 从相邻项递推
- 卢卡斯定理 *

杨辉三角的前几行要很熟悉。

组合数的求法

- 杨辉三角递推
- 逆元法
- 从相邻项递推
- 卢卡斯定理 *

杨辉三角的前几行要很熟悉。

组合数的求法

- 杨辉三角递推
- 逆元法
- 从相邻项递推
- 卢卡斯定理 *

杨辉三角的前几行要很熟悉。

组合数的求法

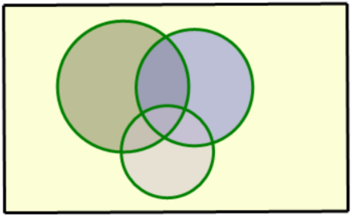
- 杨辉三角递推
- 逆元法
- 从相邻项递推
- 卢卡斯定理 *

杨辉三角的前几行要很熟悉。

目录

小学题

求出 n 以内不能被 $2, 3, 5$ 整除的整数个数。



考虑这个 Venn 图。三个圆分别表示被 $2, 3, 5$ 整除的数构成的集合，那么要求的就是圆外的面积。

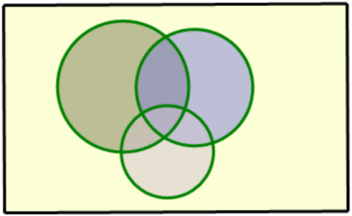
经过一番加加减减，你发现答案是：

$n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2\times3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2\times5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3\times5} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2\times3\times5} \rfloor$

这就是**容斥**。

小学题

求出 n 以内不能被 $2,3,5$ 整除的整数个数。



考虑这个 Venn 图。三个圆分别表示被 $2,3,5$ 整除的数构成的集合，那么要求的就是圆外的面积。

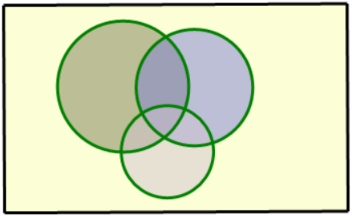
经过一番加加减减，你发现答案是：

$n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-\lfloor\frac{n}{5}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2\times3}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2\times5}\rfloor+\lfloor\frac{n}{3\times5}\rfloor-\lfloor\frac{n}{2\times3\times5}\rfloor$

这就是**容斥**。

小学题

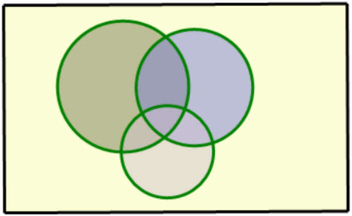
求出 n 以内不能被 $2, 3, 5$ 整除的整数个数。



考虑这个 Venn 图。三个圆分别表示被 $2, 3, 5$ 整除的数构成的集合，那么要求的就是圆外的面积。
经过一番加加减减，你发现答案是：
$n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2\times3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2\times5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3\times5} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2\times3\times5} \rfloor$
这就是**容斥**。

小学题

求出 n 以内不能被 $2,3,5$ 整除的整数个数。



考虑这个 Venn 图。三个圆分别表示被 $2,3,5$ 整除的数构成的集合，那么要求的就是圆外的面积。
经过一番加加减减，你发现答案是：
$n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-\lfloor\frac{n}{5}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2\times3}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2\times5}\rfloor+\lfloor\frac{n}{3\times5}\rfloor-\lfloor\frac{n}{2\times3\times5}\rfloor$
这就是**容斥**。

容斥

记 A_1 到 A_n 是 n 个集合，$U=\{1,2,\cdots,n\}$。那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subset U, S\neq\emptyset} (-1)^{|S|-1} \left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$$

为什么?

考虑一个元素。假设它出现在了 n 个集合中的 $k(k>0)$ 个。则它的贡献恰好是

$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}$

$=1-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}$

$=1-(-1+1)^{k}$

$=1$

我们发现有出现过的算了一次，没出现过的算了零次。

容斥

记 A_1 到 A_n 是 n 个集合，$U=\{1,2,\cdots,n\}$。那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subset U, S\neq\emptyset} (-1)^{|S|-1}\left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$$

为什么?

考虑一个元素。假设它出现在了 n 个集合中的 $k(k>0)$ 个。则它的贡献恰好是

$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}$

$=1-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}$

$=1-(-1+1)^k$

$=1$

我们发现有出现过的算了一次，没出现过的算了零次。

容斥

记 A_1 到 A_n 是 n 个集合，$U=\{1,2,\cdots,n\}$。那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subset U, S\neq\emptyset} (-1)^{|S|-1} \left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$$

为什么?
考虑一个元素。假设它出现在了 n 个集合中的 $k(k>0)$ 个。则它的贡献恰好是
$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}$
$=1-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}$
$=1-(-1+1)^k$
$=1$
我们发现有出现过的算了一次，没出现过的算了零次。

随堂小练习

1. 求欧拉函数 $\varphi(n)$。
2. 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b$ 的整数解的个数，满足 $\forall i, l_i \le x_i \le r_i$。

硬币购物

题目描述

有 m 种硬币，面值为 $c_1, c_2, \cdots, c_m$。
q 次询问，每次给出 $d_1, d_2, \cdots, d_m, s$，表示第 i 种硬币带了 d_i 个，要付的价格为 s，求有多少种付款方法。

数据范围

$m = 4$，$1 \le q \le 1000$，$1 \le c_i, d_i, s \le 10^5$

题目来源

HAOI2008

硬币购物

Grid

题目描述

有一个 $h \times w$ 的网格，给出的 n 个单元格 $(r_1, c_1), (r_2, c_2), \cdots, (r_n, c_n)$ 有障碍，是不能经过的。每一步只能向右或向下走到相邻单元格，求从左上角 $(1, 1)$ 走到右下角 (h, w) 的方案数。
答案对 M 取模。

数据范围

$2 \le h, w \le 10^5$，$n \le 3000$，$M = 1\ 000\ 000\ 007$

题目来源

Atcoder DP Contest Y

Grid

目录

错排数

如果 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，满足 $p_i \neq i$，那么这个排列称为 1 到 n 的**错排**。

错排数 D_n 即为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错排个数。

考虑一个容斥。我们强行选定 i 个位置使 $p_i=i$，其他位置任意排列，乘上容斥系数 $(-1)^i$ 后相加即可。即：

$$D_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-i)!(-1)^i$$

递推式

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$$

错排数

如果 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，满足 $p_i \neq i$，那么这个排列称为 1 到 n 的**错排**。
错排数 D_n 即为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错排个数。
考虑一个容斥。我们强行选定 i 个位置使 $p_i = i$，其他位置任意排列，乘上容斥系数 $(-1)^i$ 后相加即可。即：

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)!(-1)^i$$

递推式

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

错排数

如果 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，满足 $p_i \neq i$，那么这个排列称为 1 到 n 的**错排**。
错排数 D_n 即为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错排个数。
考虑一个容斥。我们强行选定 i 个位置使 $p_i = i$，其他位置任意排列，乘上容斥系数 $(-1)^i$ 后相加即可。即：

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)!(-1)^i$$

递推式

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

错排数

如果 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，满足 $p_i \neq i$，那么这个排列称为 1 到 n 的**错排**。
错排数 D_n 即为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错排个数。
考虑一个容斥。我们强行选定 i 个位置使 $p_i = i$，其他位置任意排列，乘上容斥系数 $(-1)^i$ 后相加即可。即：

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)!(-1)^i$$

递推式

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

欧拉数

求有多少个 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得恰有 m 个位置 i 满足 $p_i < p_{i+1}$。

答案即为**欧拉数** $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle$。

递推式

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = (m+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\rangle + (n-m)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right\rangle$$

欧拉数

求有多少个 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得恰有 m 个位置 i 满足 $p_i < p_{i+1}$。

答案即为**欧拉数** $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle$。

递推式

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = (m+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\rangle + (n-m)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right\rangle$$

欧拉数

求有多少个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得恰有 m 个位置 i 满足 $p_i<p_{i+1}$。

答案即为**欧拉数** $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle$。

递推式

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = (m+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\rangle + (n-m)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right\rangle$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ......

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

卡特兰数

卡特兰数 C_n 是

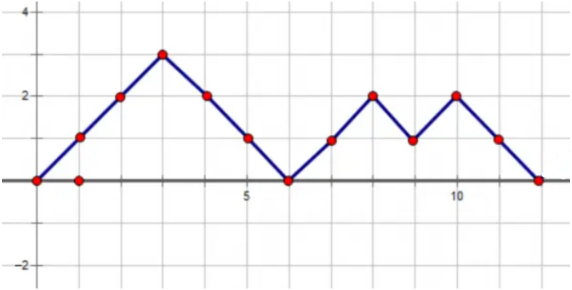
- $1 \sim n$ 依次进栈，可能的出栈序列个数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列个数
- n 个结点的二叉树个数，结点无标号，区分左右儿子
- 凸 $n+2$ 边形的三角剖分数，三角形的顶点必须是原多边形的顶点
- 每次往右或上走一步，不能经过 $y=x$ 上方的点，从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的路径数
- 每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数
- ……

递推式

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

抓住这个组合意义：每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数。



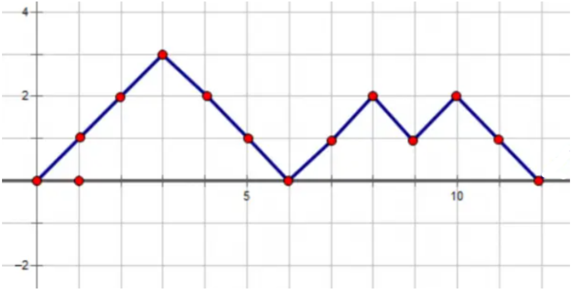
对称思想得到通项

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

循环思想得到通项

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

抓住这个组合意义：每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数。



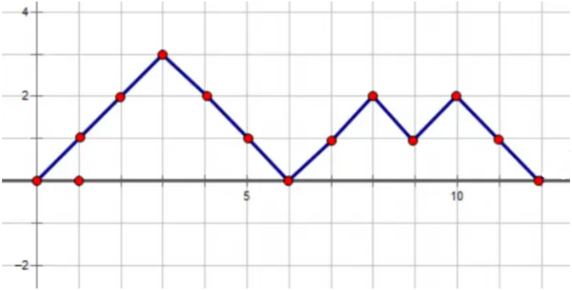
对称思想得到通项

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

循环思想得到通项

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

抓住这个组合意义：每次往右上或右下走一步，不能经过 x 轴下方的点，从 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$ 的路径数。



对称思想得到通项

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

循环思想得到通项

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

第二类斯特林数

第二类斯特林数 $\left\{ n \atop m \right\}$ 表示把 n 个不同小球放入 m 个相同盒子，盒子不能空的方案数。

递推

$$\left\{ n \atop m \right\} = \left\{ n-1 \atop m-1 \right\} + m \left\{ n-1 \atop m \right\}$$

容斥

$$\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

第二类斯特林数

第二类斯特林数 $\left\{ n \atop m \right\}$ 表示把 n 个不同小球放入 m 个相同盒子，盒子不能空的方案数。

递推

$$\left\{ n \atop m \right\} = \left\{ n-1 \atop m-1 \right\} + m\left\{ n-1 \atop m \right\}$$

容斥

$$\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

第二类斯特林数

第二类斯特林数 $\left\{ n \atop m \right\}$ 表示把 n 个不同小球放入 m 个相同盒子，盒子不能空的方案数。

递推

$$\left\{ n \atop m \right\} = \left\{ n-1 \atop m-1 \right\} + m\left\{ n-1 \atop m \right\}$$

容斥

$$\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

贝尔数

贝尔数 B_n 表示把 n 个不同小球放入若干个相同盒子，盒子不能空的方案数。

容易发现贝尔数是第二类斯特林数一行的和

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\}$$

也有递推式

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} B_i \binom{n}{i}$$

贝尔数

贝尔数 B_n 表示把 n 个不同小球放入若干个相同盒子，盒子不能空的方案数。
容易发现贝尔数是第二类斯特林数一行的和

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \left\{ n \atop j \right\}$$

也有递推式

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} B_i \binom{n}{i}$$

贝尔数

贝尔数 B_n 表示把 n 个不同小球放入若干个相同盒子，盒子不能空的方案数。
容易发现贝尔数是第二类斯特林数一行的和

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \left\{ n \atop j \right\}$$

也有递推式

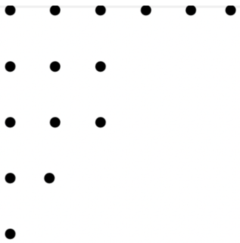
$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} B_i \binom{n}{i}$$

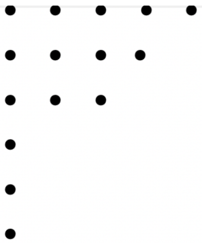
拆分数

n 的**拆分数**即为把 n 个相同小球放入若干个相同盒子的方案数。

拆分数虽然也是指数级，但增长很慢。

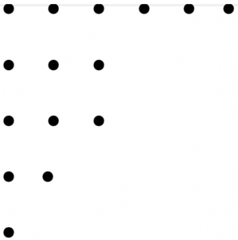
相当于有 n 个点的 **Ferrers 图**的个数。

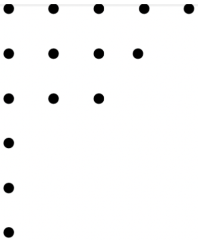




拆分数

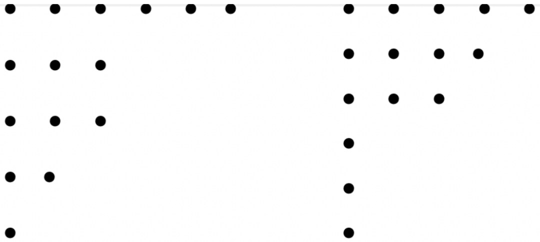
n 的**拆分数**即为把 n 个相同小球放入若干个相同盒子的方案数。
拆分数虽然也是指数级，但增长很慢。
相当于有 n 个点的 Ferrers 图的个数。





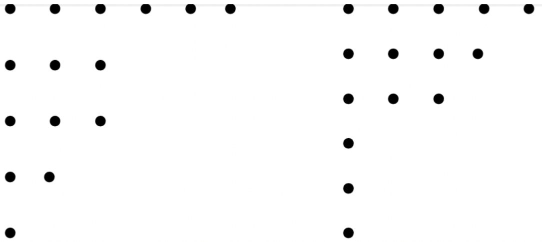
拆分数

n 的**拆分数**即为把 n 个相同小球放入若干个相同盒子的方案数。
拆分数虽然也是指数级，但增长很慢。
相当于有 n 个点的 **Ferrers 图**的个数。



拆分数

n 的**拆分数**即为把 n 个相同小球放入若干个相同盒子的方案数。
拆分数虽然也是指数级，但增长很慢。
相当于有 n 个点的 **Ferrers 图**的个数。



随堂小练习

1. 求有多少 1 到 n 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，满足恰有 k 个位置 $p_i = i$。
2. 有 n 个 1 和 m 个 -1，求把它们排成一排的方案数，使所有前缀和非负。

跑步

题目描述

求 n 的拆分数。

数据范围

$1 \le n \le 100\,000$，$1 \le m \le 2^{30}$

题目来源

NOI Online #1 入门组

跑步

凸多边形正则划分

题目描述

求把一个凸 $nk-2n+2$ 边形添加一些不相交的对角线划分成 n 个凸 k 边形区域的方案数。
答案对 M 取模。

数据范围

$1 \le n \le 555\ 555$，$3 \le k \le 200$，$M = 1\ 000\ 000\ 007$

题目来源

FJOI2020

凸多边形正则划分

最大前缀和

题目描述

将 n 个 1 和 m 个 -1 任意排成一列，记为序列 $\{a_i\}$。记 $\{a_i\}$ 的前缀和为 $\{b_i\}$，其中 $b_0 = 0$，定义 $\max_{i=0}^{n+m} b_i$ 为 a_i 的前缀和最大值。
求对于所有可能得到的序列，前缀和最大值之和是多少。
答案对 M 取模。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 10^6$，$M = 998\,244\,353$

题目来源

CF1204E 加强版

最大前缀和

目录

多叉堆

题目描述

初始时有 n 个结点，每个结点都是一棵单点树。q 次操作，操作有两种：

1. `1 x y` 将 x 所在树的根直接接在 y 所在树的根之下，保证 x, y 原本不在同一棵树。
2. `2 x` 设 x 当前所在树的结点数为 s。求有多少种方式将 $0 \sim s-1$ 这 s 个数分别填入 x 所在树的结点中，使所有儿子上的数大于父亲。

答案对 M 取模。

数据范围

$1 \leq q, n \leq 3 \times 10^5$，$M = 10^9 + 7$

题目来源

CSP-S 2019 江西

多叉堆

Emiya 家今天的饭

题目描述

给定一个 $n \times m$ 的表格，每个位置写有非负整数 $a_{i,j}$。
你需要在表格中选取至少一个位置，使得：

- 每行最多选一个位置；
- 设总共选了 c 个位置，那么不存在一列选的个数超过 $\lfloor c/2 \rfloor$。

对于一种合法方案，它的权值是所有选的位置的 $a_{i,j}$ 的乘积，求所有合法方案的权值之和。
答案对 M 取模。

数据范围

$1 \le n \le 100$，$1 \le m \le 2000$，$0 \le a_{i,j} < M = 998\,244\,353$

题目来源

CSP-S 2019

Emiya 家今天的饭

微信步数

题目描述

你在 $w_1 \times w_2 \times \cdots \times w_k$ 的 k 维空间里面散步。你从空间中 $w_1 \times w_2 \times \cdots \times w_k$ 个位置都分别要出发一次，按照以下规则散步：

- 第 i 步时第 $c_{(i-1) \bmod n+1}$ 维坐标加上 $d_{(i-1) \bmod n+1}$；
- 一旦走出这个空间范围，停止本次散步。

求一共走了多少步。
答案对 M 取模。

数据范围

$1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le k \le 10, 1 \le w_j \le 10^9, d_i \in \{-1, 1\}$,
$M = 1\ 000\ 000\ 007$

题目来源

NOIP2020

微信步数

谢谢大家