

福建省夏令营 A 班模拟赛 解题报告

2023/07/09

T1. 同余方程 (fang)

枚举， 树状数组

- 三元关系可以考虑枚举中间元 b ，这样结构比较好。
- 将方程转化为 $-c^3 \equiv a + b^2 \pmod{m}$ ， $a \leq b \leq c$ 。
- 从大到小枚举 b ，同时在模 m 意义下维护 $-c^3$ 的所有取值。
- 那么就是求在区间 $[b^2 + 1, b^2 + b]$ 内有多少个 $-c^3$ 取值（当然下标要模 m ）。
- 这是经典的单点加，区间求和，用树状数组维护即可。注意树状数组处理不了 0，要特殊处理。
- 时间复杂度 $O(n \log m)$ 。

T2. 部落冲突 (clash)

图论， 动态规划

- t 时刻在点 x 上扩张 k 次可以转化为 t 时刻在点 x 与其相邻点上扩张 $k - 1$ 次。
- t 时刻在点 x 上扩张 k 次与 t' ($t' > t$) 时刻在点 x 上扩张 k 次只要保留后者。
- 按 k 从大到小处理扩张，先把所有 k 的扩张转化为 $k - 1$ 的扩张，再对 $k - 1$ 扩张的每个点保留 t 最大的扩张，一直处理直到只剩下 0 的扩张，即为答案。
- 一次扩张只会有 $O(n + m)$ 次的运算，故总时间复杂度为 $O((\max k)(n + m))$ 。

T3. 图上开花 (flower)

图论， 并查集， 数论

- 由于存在 $v_s - v_s(v_s + 1) - v_t(v_t + 1) - v_t$ 的连接方式（中间二者都为偶数），故答案不超过 2。
- 只要判定答案为 0 或 1。
- 答案为 0 的判定比较简单。对每个质数与每一个 v 开点，将 v_i 与它的所有质因数连边，用并查集维护连通性；查询时直接查询 v_s 与 v_t 是否连通即可。
- 答案为 1 的判定也不困难。 $v_i(v_i + 1)$ 可以保证它的质因数两两连通。尝试用哈希表暴力维护可行的连通关系，由于前 12 个质数的积超过 $10^6(10^6 + 1)$ ，所以质因数个数不超过 11，连通关系不超过 5.5×10^6 对，维护完全可行。
- 时间复杂度 $O\left(\alpha\left(n + \frac{W}{\ln W}\right)n \log \log n + kn\right)$ ，其中 $W = 10^6$ ， $k = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ 。

T4. 防御工事 (defense)

树的重心

- 显然， dis 最小的点是树的重心，而 dis 最大的点是树的叶子。
- 以重心为根，那么从根到叶子 dis 单调递增。
- 按 dis 从大到小，确定每个点的父亲。
- 对于当前点 x ，其子树的所有点 dis 都比它大，从而子树已经确定。于是可以求得其父亲的 dis ，如果没有对应点那么不存在方案，否则向该点连边。
- 连好边之后只是满足了 dis 的相对大小关系，要保证绝对大小需要再判定一个点。
- 时间复杂度 $O(n\log n)$ 。

谢谢大家！