

0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como $\mathbb C$ y está definido por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}\$$

sea $z=a+b\cdot i$ un número complejo denotamos $parte\ real$ de z a a y parte imaginaria de z a b de la siguiente manera

$$\Re(z) = a$$
 y $\Im(z) = b$

Los números reales están contenidos en C, son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0 \}$$

Operaciones en los Complejos:

1 La suma de define de la siguiente manera:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

- 2 El producto:
 - Recordamos que $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} (a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+bd(-1)+(ad+bc)i\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo z tiene un opuesto -z
- Todo número complejo z distinto de θ tiene un inverso z^{-1}

Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo z=a+bi, se define su conjugado como $\overline{z}=a-bi$

Si $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Además notamos que si z = a + bi entonces:

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2 + b^2$$

Por lo tanto $z \cdot \overline{z} \ge 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \ \ \text{y es igual a } 0 \Leftrightarrow z = 0.$

Definición 1.0:

Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

si
$$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)}$$
$$= z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$$
$$= |z|^2 \cdot |w|^2$$

por lo tanto $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Definición 1.1:

Sea $z=a+bi\,\,,a,b\in\mathbb{C},z\neq0.$ El inverso de un número complejo z=a+bi es:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Notación: Si $z,w\in\mathbb{C}\;$ y $w\neq 0$, $\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$

Ejemplo 1.1 :

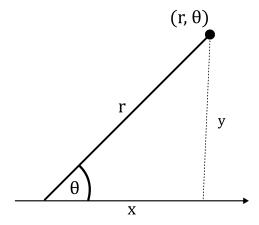
Calculamos el inverso de los números complejos 2-3i ,3i y $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$(2-3i)^{-1} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$
$$(3i)^{-1} = -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3}i$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en e plano por sus coordenadas con respecto a dos ejees perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Asi entonces el punto se describe por un par de números (r,θ) que constituyen sus coordenadas polares.



Si tenemos nuestros ejes usuales y $x \in y$ son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta)$$
 y $\frac{y}{r} = \sin(\theta)$

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias