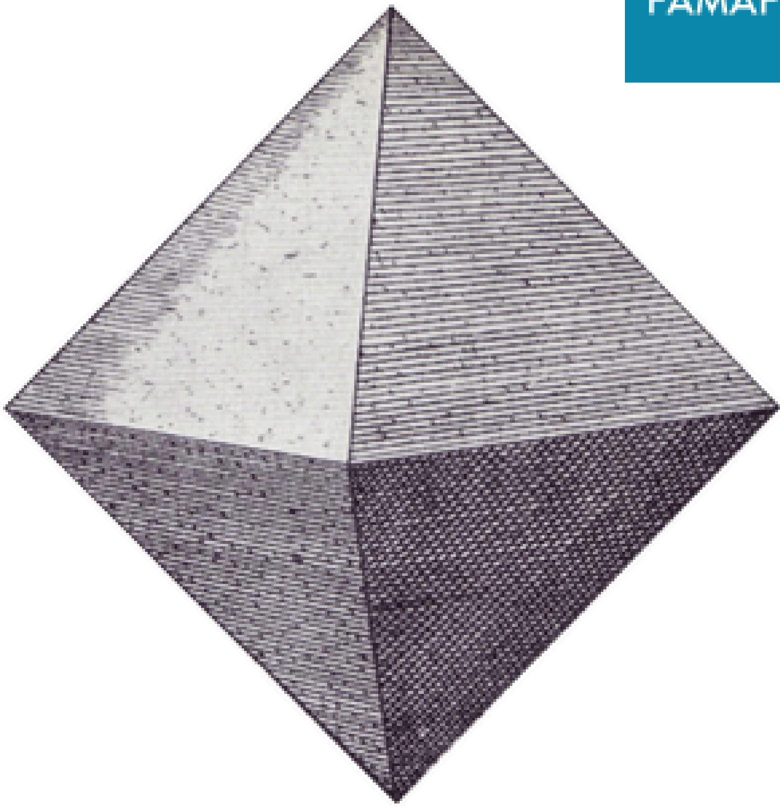
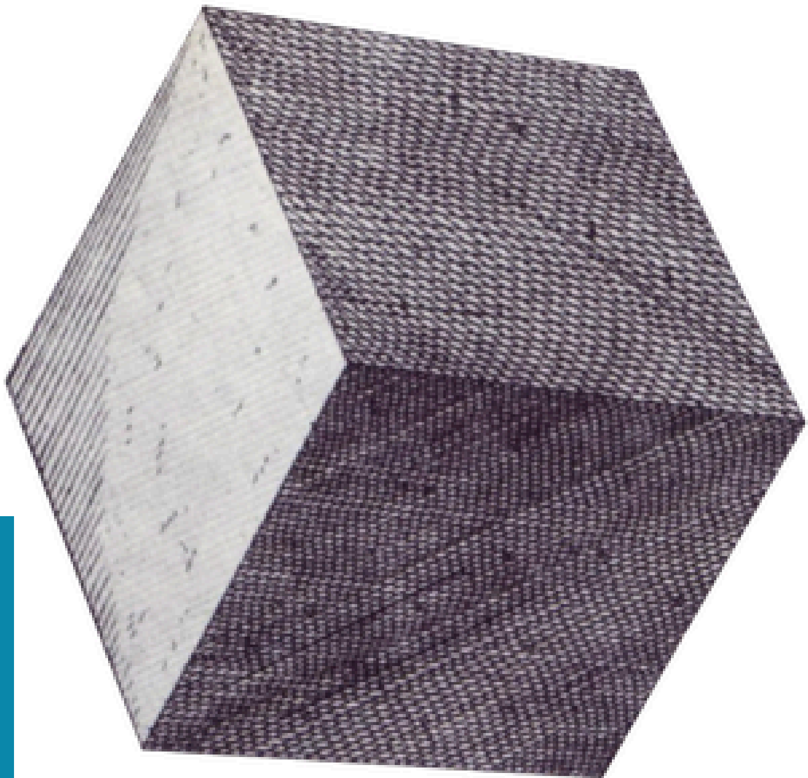
FAMAF

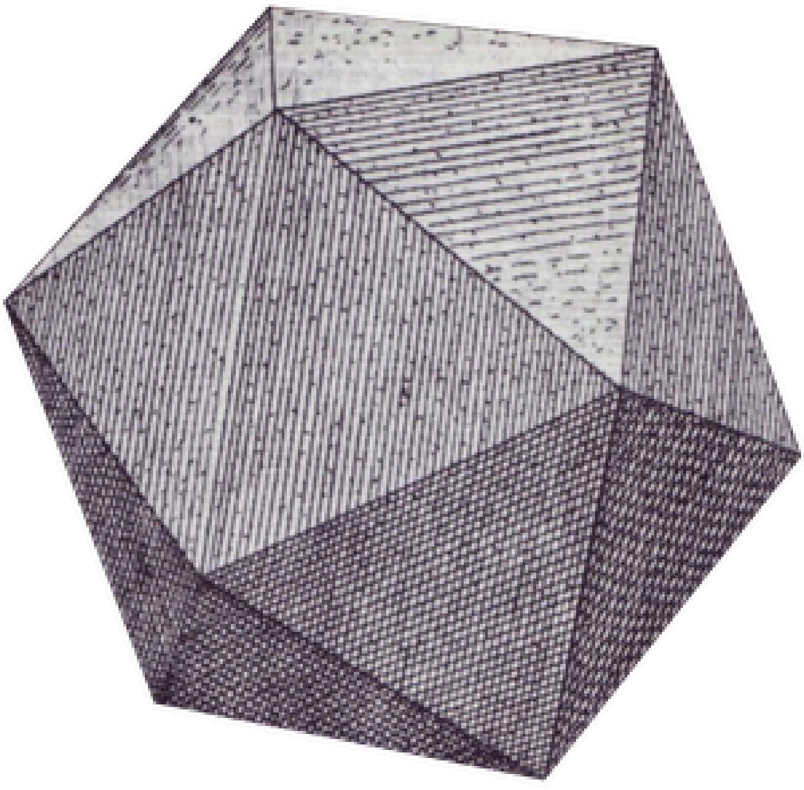
Notas de clase

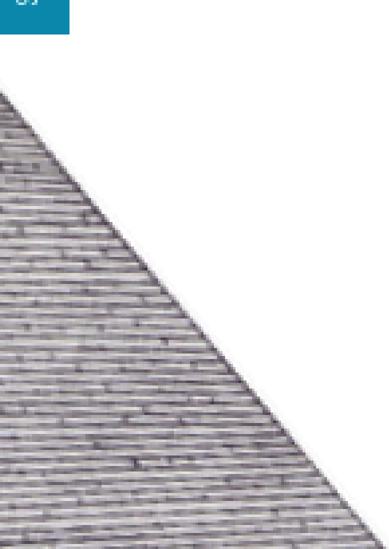




Análisis Matemático 2

Santiago Emanuel Nieva





Intencionalmente dejada en blanco

Intencionalmente dejada en blanco

Breve repaso

1 Continuidad

- En un punto
- En un intervalo
- Ejemplos
- Teorema del Valor intermedio:
  - Enunciado
  - Aplicación
- Teorema de Weierstrass:
  - Enunciado

2 Derivación

- Definición de derivadas, interpretacion geométrica
- Reglas de Derivación
- Derivada de funciones trigonométricas
- Derivadas de exponenciales y logaritmos
- Derivada de la función inversa
  - Funciones trigonométricas inversas
- Ecuación de la recta tangente
- Derivadas de orden superior
- Diferenciación logaritmica

3 Análisis de funciones

- Información a partir de $f(x)$
- Información a partir de $f'(x)$
- Información a partir de $f''(x)$
- Ejemplos:
  - Análisis completo y gráfica de $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$
  - Análisis completo y gráfica de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1 Continuidad:

Continuidad en un punto

- Una función f es continua en un valor si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

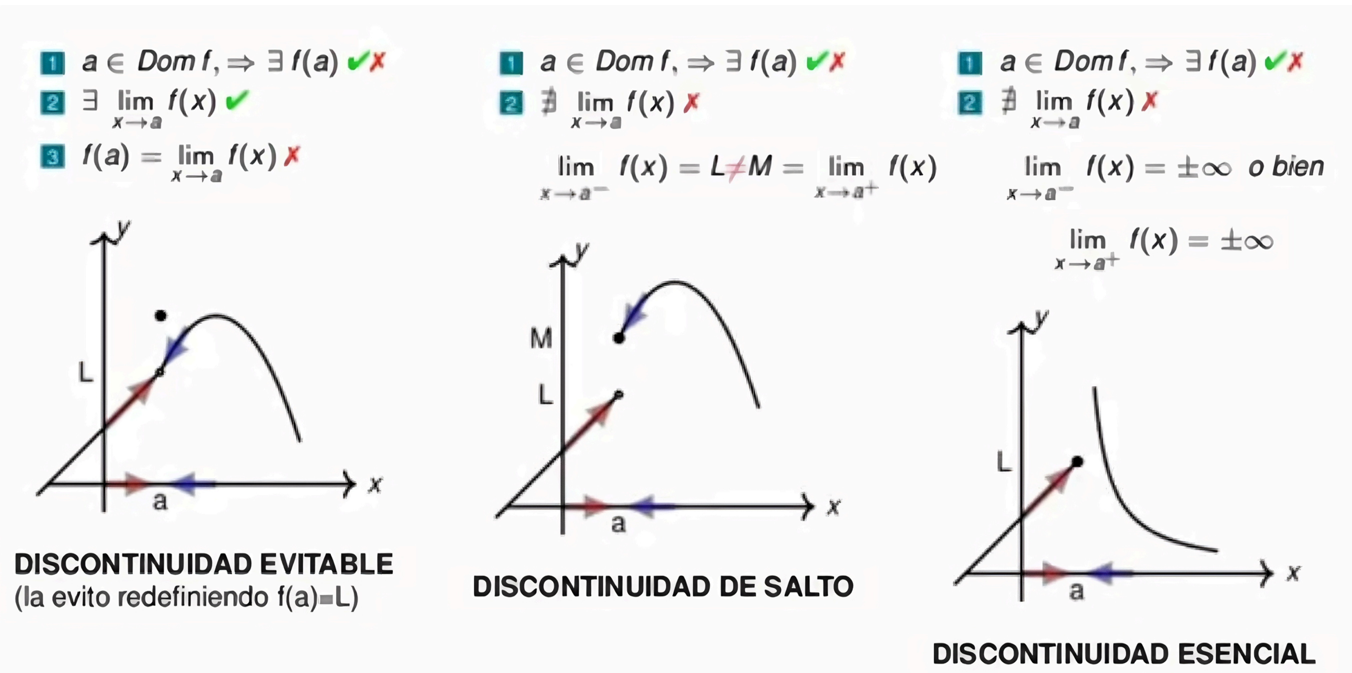
- Condiciones:

1. f debe estar definida en $x = a$:
   - $a \in \mathbb{D}\text{om de } f \Rightarrow \exists f(a)$
2. Tiene que existir el limite de f alrededor de a
   - $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. f esta definida en un intervalo abierto que contiene a a
4. Los limites laterales son iguales:
   - $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Si alguno de estas condiciones no se cumpliese:

- Diremos que f es discontinua en a

Tipos de discontinuidades



Continuidad lateral:

Continuidad por Izquierda

- Una funcion f es continua por izquierda en un valor a si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(x)$$

Continuidad por Derecha

- Una funcion f es continua por derecha en un valor a si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(x)$$

Continuidad en Intervalo:

Definición

- Una funcion f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todo número del intervalo

Definición

- Una funcion f es continua en un intervalo abierto $[a, b]$ si:

1. Es continua en todo número del intervalo abierto (a, b)
2. Es continua por derecha en a
3. Es continua por izquierda en b

Propiedades de funciones

- Sean f y g continuas en a, entonces tambien son continuas en a las siguientes funciones:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f \cdot g)(x)$
3. $c \cdot f(x)$, siendo c constante.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, *si* $g(a) \neq 0$
5. $(f \circ g)(x)$,*si* f *es continua en* $g(a)$

Resultados utiles para demostrar la continuidad

- Sea a un punto cualquiera dentro del dominio (sin los extremos)

1. Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$
2. Toda función racional es continua en cualquier punto de su dominio
3. La radicación es continua en los puntos de su dominio (sin los extremos)
4. Las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

Ejercicios resueltos

Usando la definición de continuidad y las propiedades de los limites:

- Demostrar que f es continua en a :

$$f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot x^2}, \qquad a = 3$$

Recordamos

1. $a \in \mathbb{D}\text{om } f \Rightarrow f(a)$
2. $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Resuelvo:

$\mathbb{D}\text{om } f = \mathbb{R}$,

$$f(3) = \sqrt[3]{3 \cdot (3^2)} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[3]{3 \cdot x^2} \underset{\text{prop.Raiz}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x\to a}(3 \cdot x^2)}$$

$$\underset{\text{prop.poliomio}}{=} \sqrt[3]{3 \cdot 3^2} = 3 \quad \checkmark$$

$f(x)$ es continua en $a = 3$

ho