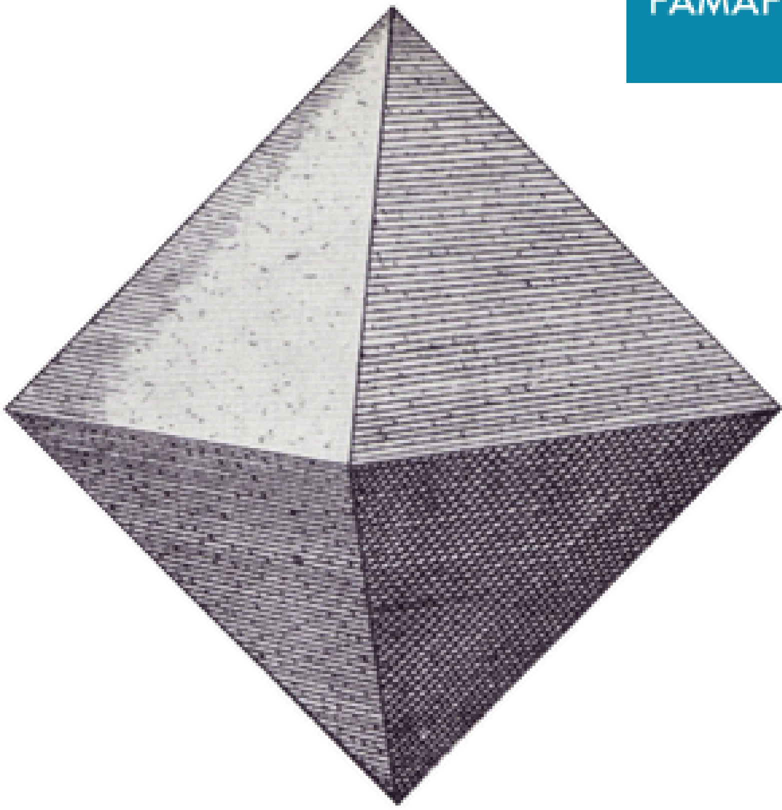
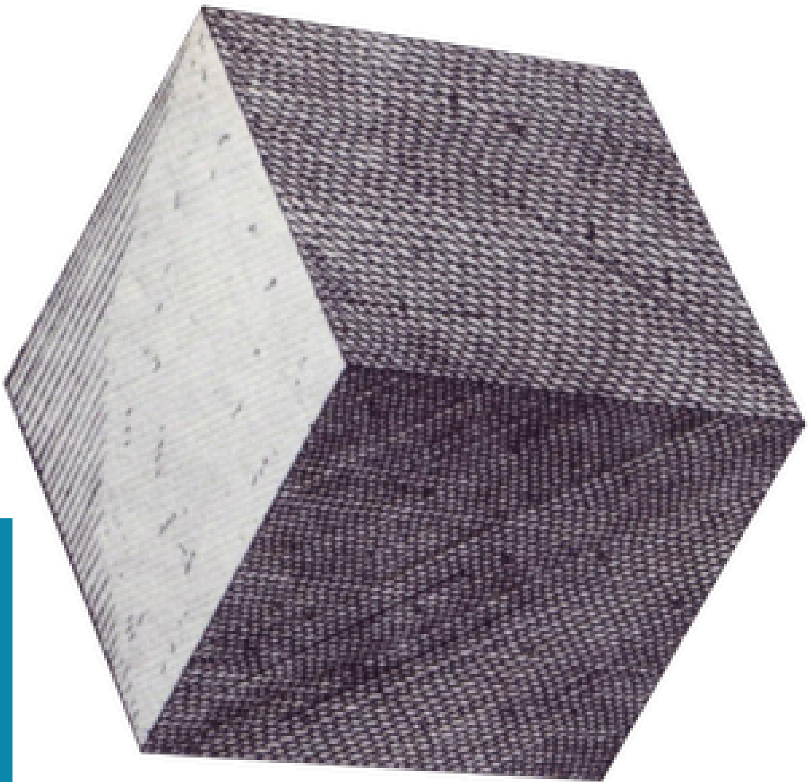
FAMAF

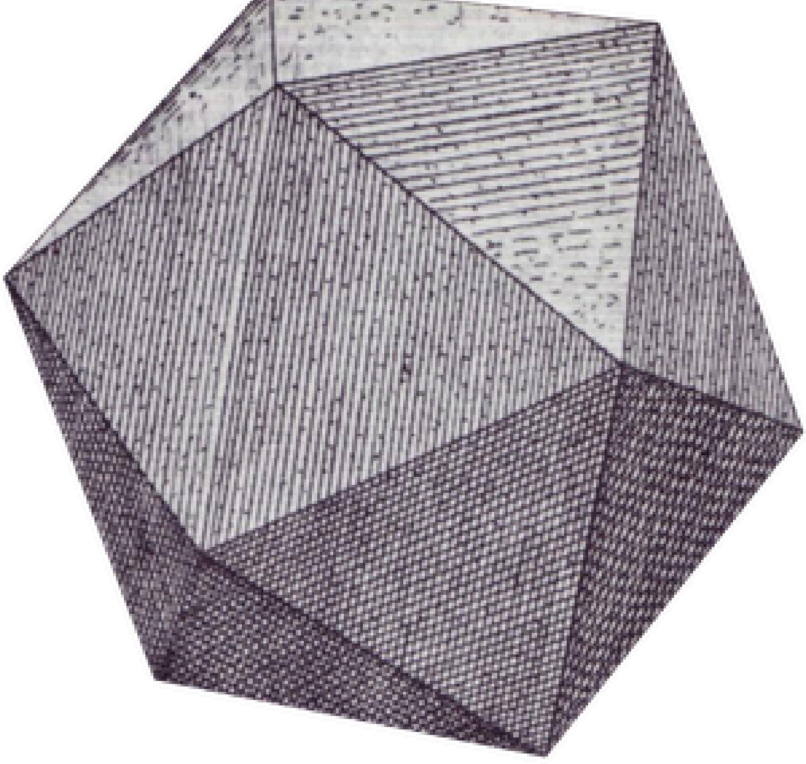
Notas de clase

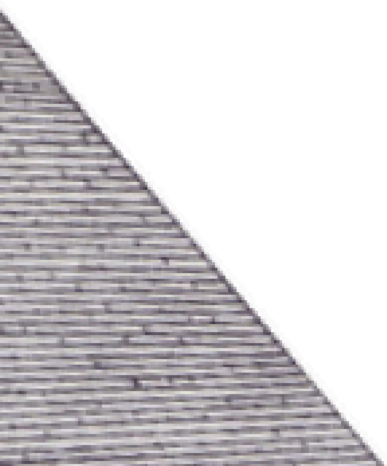




Álgebra Lineal

Santiago Emanuel Nieva





0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como $\mathbb{C}$ y está definido por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sea $z = a + b \cdot i$ un número complejo denotamos *parte real* de z a a y parte imaginaria de z a b de la siguiente manera

$$\Re(z) = a \quad \text{y} \quad \Im(z) = b$$

Los números reales están contenidos en $\mathbb{C}$, son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$$

Operaciones en los Complejos:

1 La suma de define de la siguiente manera:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2 El producto:

- Recordamos que $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo z tiene un opuesto $-z$
- Todo número complejo z distinto de *0* tiene un inverso z^{-1}

Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo $z = a + bi$, se define su conjugado como $\overline{z} = a - bi$

Si $z, w \in \mathbb{C}$,se cumple que:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad\qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Además notamos que si $z = a + bi$ entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \cdot \overline{z} \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y es igual a 0 $\Leftrightarrow z = 0$.

Definición 1.0:

Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

si $z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} \\ &= z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} \\ &= |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Definición 1.1:

Sea $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. El inverso de un número complejo $z = a + bi$ es:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Notación: Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

Ejemplo 1.1 :

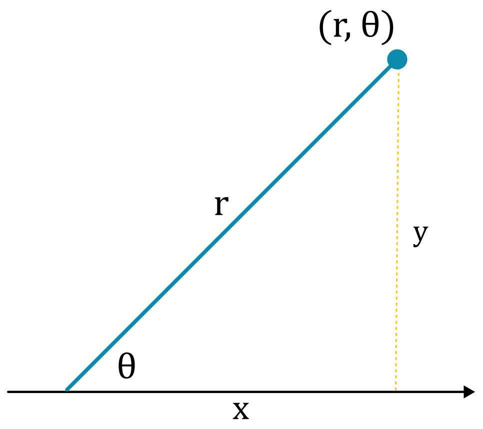
Calculamos el inverso de los números complejos $2 - 3i$,$3i$ y $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

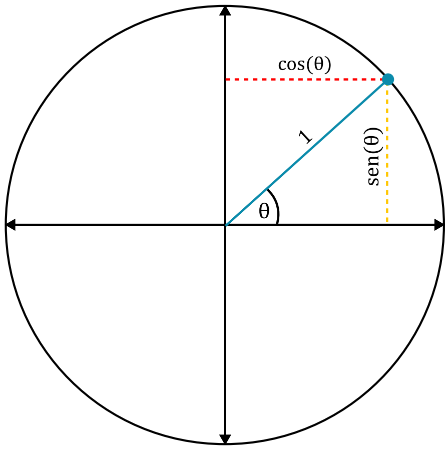
$$\begin{aligned} (2-3i)^{-1} &= \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i \\ (3i)^{-1} &= -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3} i \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en e plano por sus coordenadas con respecto a dos ejees perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Asi entonces el punto se describe por un par de números (r, θ) que constituyen sus coordenadas polares.





Si tenemos nuestros ejes usuales y x e y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \sin(\theta)$$

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Si trasladamos esto al mundo de los complejos, recordamos que si $z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ahora si consideramos $z = a + bi$ con $|z| = 1$, es decir:

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabemos por conceptos de trigonometría, especificamente las identidades pitagóricas, que:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Entonces existe un número $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta)$$

Luego $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$

Ahora si consideramos un número complejo $z = a + bi$ cualquiera,no nulo, se cumple que:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$$

Dado que el número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1, se sigue que es de la forma $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$

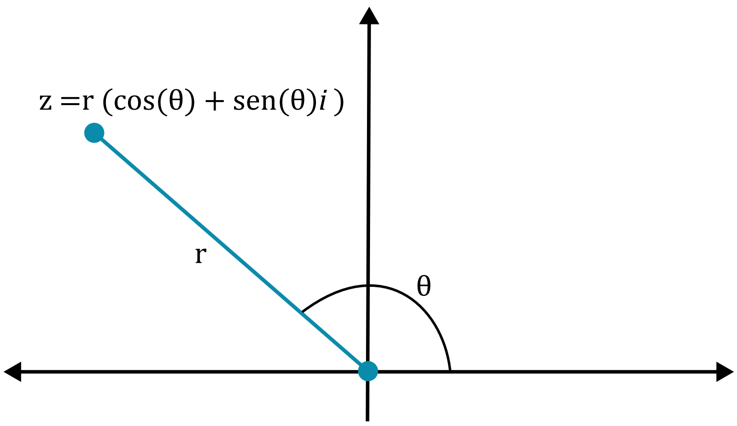
Luego podemos representar a z como:

$$z = |z| \cdot (\ \cos(\theta) + \sin(\theta)i\ )$$

Por lo tanto, todo número complejo no nulo puede escribirse en su *forma polar*

$$z = r \cdot (\ \cos(\theta) + \sin(\theta)i\ )$$

donde estas expresiones están relacionadas por $a = r \cdot \cos(\theta)$ y $b = r \cdot \sin(\theta)$; geométricamente hablando, $r = |z|$ representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y θ es la medida en redianes del ángulo entre el eje real ($\mathfrak{R}$) y la semi recta con origen en 0, que pasa por z, tomando el sentido antihorario.



Representación polar

Ejemplo:

- El número complejo $z = 1 - i$ tiene modulo $\sqrt{2}$, entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

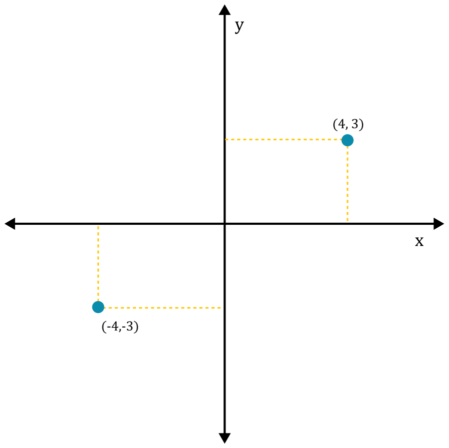
$$1 - i = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)}_{r} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\sin(\theta)} i \right)$$

Luego el argumento de z es $\theta = \frac{7}{4}\pi$ y podemos escribir:

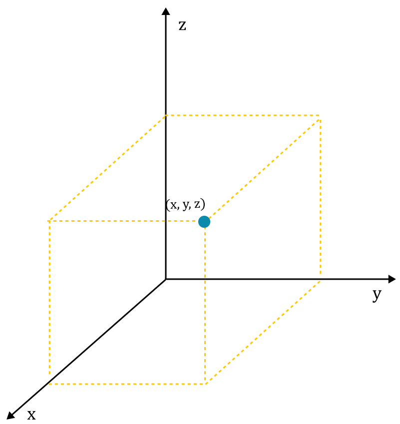
$$\begin{aligned} z &= 1 - i \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) i \right) \end{aligned}$$

1 Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

Se puede utilizar una túpla (x, y) para representar un punto en el plano, asi también una tripla (x, y, z) para representar un punto en el espacio, tambíen suele usarse la notación (x_1, x_2, x_3)



(a)
Representación de puntos en el plano



(b)
Representación de puntos en el espacio

Definición:

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales,entonces

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq i \leq n\}$$

Todo v en $\mathbb{R}^n$ será llamado *punto* (vector en el origen o simplemente vector). La mayoría de nuestros ejemplos tendrán lugar cuanto $n = 2$ o $n = 3$; para ello usaremos el *sistemas de coordenadas cartesianas* para representar los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Suma en $\mathbb{R}^n$:

Si $(x_1, ..., x_n),\ (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}$, se define:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

En otras palabras, la suma es *coordenada a coordenada*

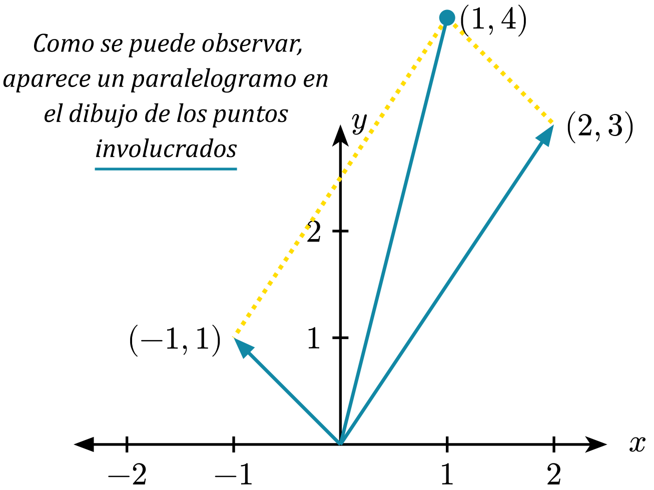
Propiedades:

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ satisface que:

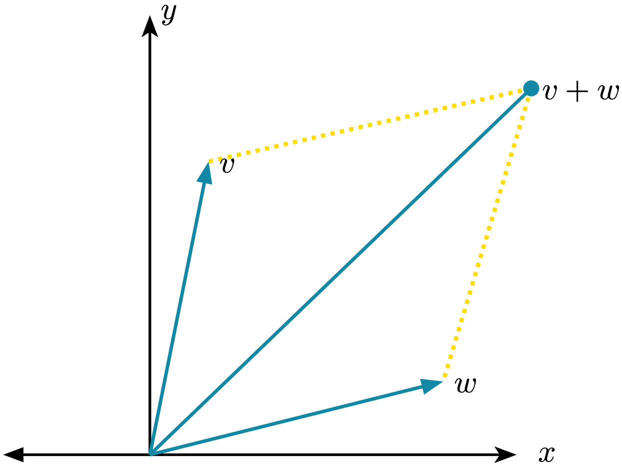
1. Es asociativa
   - $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$
2. Es conmutativa
   - $v + w = w + v, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
3. El vector $0 := (0, ..., 0)$, es el *elemento neutro*
   - $v + 0 = 0 + v = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$
4. El vector $-v = (-x_1, ... - x_n)$ es el opuesto de $v = (x_1, ...x_n)$
   - $v + (-v) = (-v) + v = 0$

Ley del paralelogramo

Sea $v = (2, 3)$ y $w = (-1, 1)$, entonces $v + w = (1, 4)$



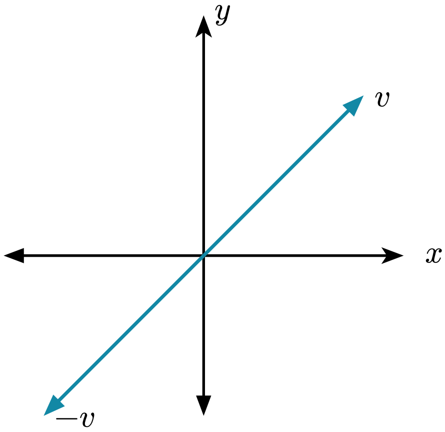
Representación gráfica de: $(2, 3) + (-1, 1)$



Representación general de: $v + w$

El opuesto de un vector

El opuesto de un vector v en el plano es $-v$ y geometricamente es el vector reflejado respecto al centro.

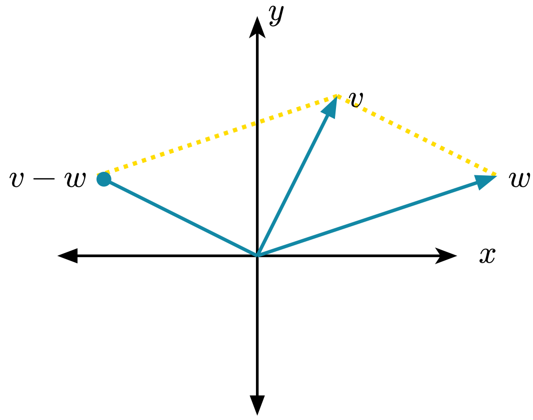


Resta de vectores

Dados dos vectores v, w en el plano, podemos representar la resta como la suma de v más el opuesto de w, es decir:

$$v - w := v + (-w)$$

Como $(v - w) + w = v$, la ley del paralelogramo también es útil para representar geométricamente la resta



Producto de un vector por un escalar

Sea $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

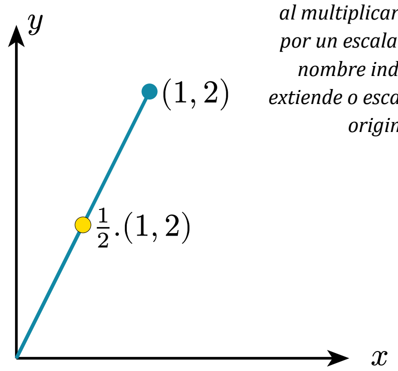
$$\lambda.v = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

También denotamos a esta multiplicación por λv

Ejemplo:

Si $v = (1,2)$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\lambda v = \left(\frac{1}{2} \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$



Representación de $\lambda.v$

Como se puede observar, al multiplicar un vector por un escalar, como su nombre indica, este extiende o escala el vector original

Propiedades

La multiplicación por escalares satisface que:

1. Es asociativa:

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Es distributiva:

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \ \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Existencia del opuesto:

$$(-1)v = -v, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

A continuación se introducirá un concepto *fundamental* para los temas sub-siguientes:

Combinación Lineal

Sean $v_1, ..., v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$

Una *combinación lineal* de $v_1, ..., v_k$ es un vector de la forma

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son números reales.

Ejemplo:

Sean $v_1 = (1,2,3), v_2 = (-1,3,0), v_3 = (-1,0,1)\ y\ v_4 = (-2,-1,-3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$

Entonces:

$$\begin{aligned} v &= 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - 5v_4 \\ &= 2(1,2,3) - 3(-1,3,0) + 4(-1,0,1) - 5(-2,-1,-3) \\ &= (2,4,6) + (3,-9,0) + (-4,0,4) + (10,5,15) \\ &= (11,0,25) \end{aligned}$$

Es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4.

Base canónica

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, se denota $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada *i-ésima* que es 1.

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$ los vectores son $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$, estos vectores son fundamentales para la materia.

Propiedad

Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se escribe como *combinación lineal* de la base canónica.

$$(x_1, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (1,2,3) &= (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3) \\ &= 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) \\ &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$