

# Notas de clase



## Álgebra Lineal

•



# 0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como  $\mathbb{C}$  y está definido por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sea  $z = a + b \cdot i$  un número complejo denotamos *parte real* de  $z$  a  $a$  y *parte imaginaria* de  $z$  a  $b$  de la siguiente manera

$$\Re(z) = a \quad \text{y} \quad \Im(z) = b$$

Los números reales están contenidos en  $\mathbb{C}$ , son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$$

## Operaciones en los Complejos:

1 La suma se define de la siguiente manera:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2 El producto:

- Recordamos que  $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

## Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo  $z$  tiene un opuesto  $-z$
- Todo número complejo  $z$  distinto de  $0$  tiene un inverso  $z^{-1}$

## Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo  $z = a + bi$ , se define su conjugado como  $\bar{z} = a - bi$

Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , se cumple que:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Además notamos que si  $z = a + bi$  entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $z \cdot \bar{z} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$  y es igual a 0  $\Leftrightarrow z = 0$ .

### Definición 1.0:

Si  $z \in \mathbb{C}$ , el *módulo* de  $z$  es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

si  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

si  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces:

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} \\ &= z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} \\ &= |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

### Definición 1.1:

Sea  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . El inverso de un número complejo  $z = a + bi$  es:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Notación: Si  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $w \neq 0$ ,  $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

### Ejemplo 1.1 :

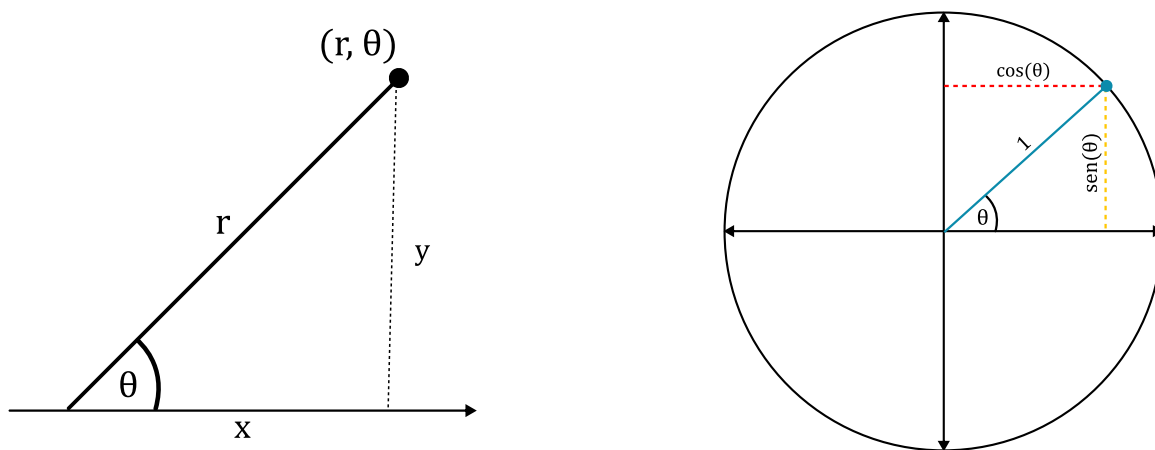
Calculamos el inverso de los números complejos  $2 - 3i$ ,  $3i$  y  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^{-1} &= \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ (3i)^{-1} &= -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3}i \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

## Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en el plano por sus coordenadas con respecto a dos ejes perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Así entonces el punto se describe por un par de números  $(r, \theta)$  que constituyen sus coordenadas polares.



Si tenemos nuestros ejes usuales y  $x$  e  $y$  son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \sin(\theta)$$

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Si trasladamos esto al mundo de los complejos, recordamos que si  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , ahora si consideramos  $z = a + bi$  con  $|z| = 1$ , es decir:

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabemos por conceptos de trigonometría, específicamente las identidades pitagóricas, que:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Entonces existe un número  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que:

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta)$$

Luego  $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$

Ahora si consideramos un número complejo  $z = a + bi$  cualquiera, no nulo, se cumple que:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$$

Dado que el número complejo  $\frac{z}{|z|}$  tiene módulo 1, se sigue que es de la forma  $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$

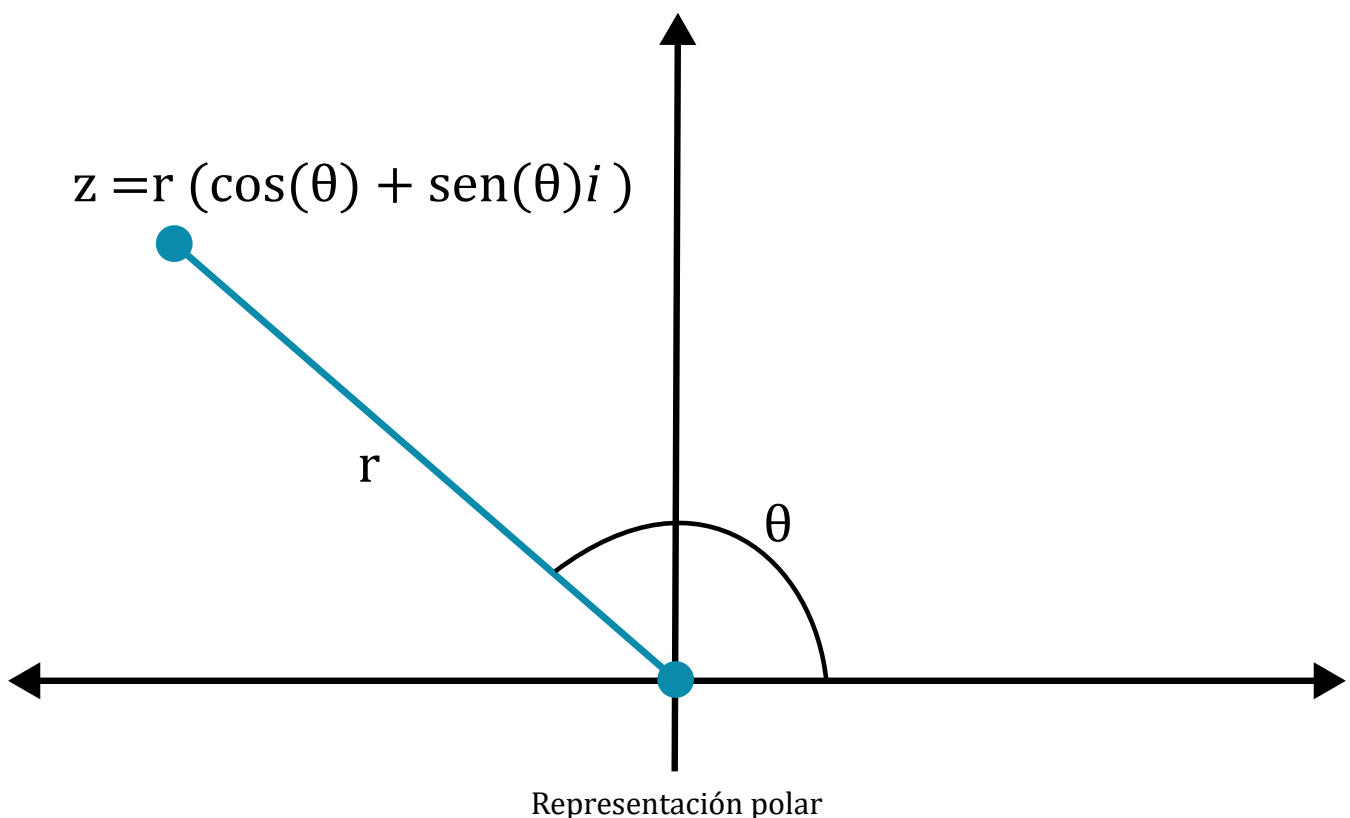
Luego podemos representar a  $z$  como:

$$z = |z| \cdot ( \cos(\theta) + \sin(\theta)i )$$

Por lo tanto, todo número complejo no nulo puede escribirse en su *forma polar*

$$z = r \cdot ( \cos(\theta) + \sin(\theta)i )$$

donde estas expresiones están relacionadas por  $a = r \cdot \cos(\theta)$  y  $b = r \cdot \sin(\theta)$ ; geométricamente hablando,  $r = |z|$  representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y  $\theta$  es la medida en radianes del ángulo entre el eje real ( $\Re$ ) y la semi recta con origen en 0, que pasa por  $z$ , tomando el sentido antihorario.



Ejemplo:

- El número complejo  $z = 1 - i$  tiene modulo  $\sqrt{2}$ , entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$
$$1 - i = \underbrace{(\sqrt{2})}_r \cdot \left( \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\sin(\theta)} i \right)$$

Luego el argumento de  $z$  es  $\theta = \frac{7}{4}\pi$  y podemos escribir:

$$z = 1 - i$$
$$= \sqrt{2} \cdot \left( \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)i \right)$$