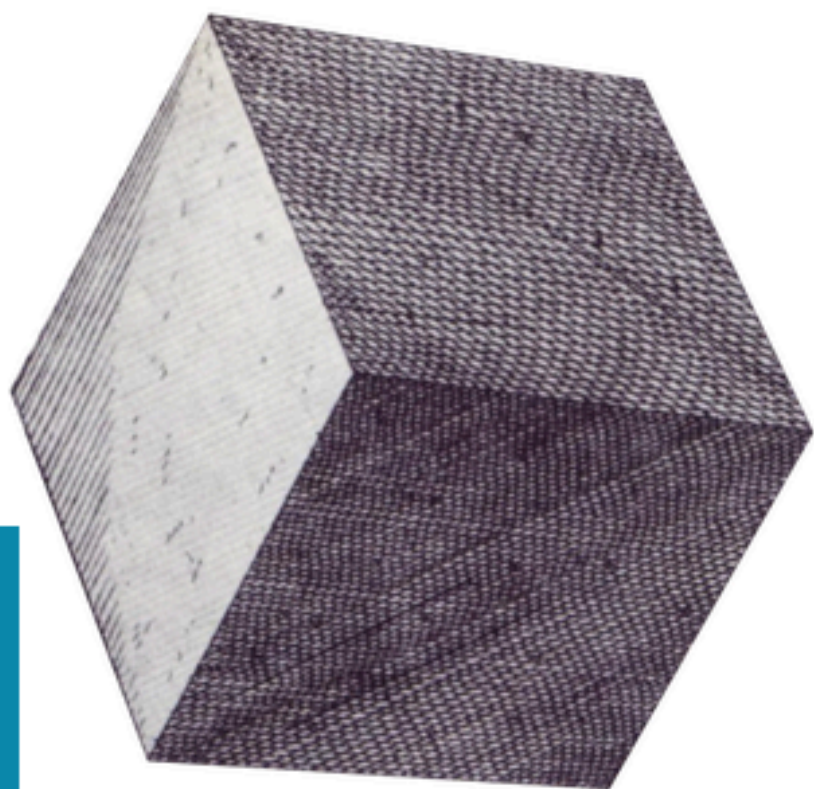
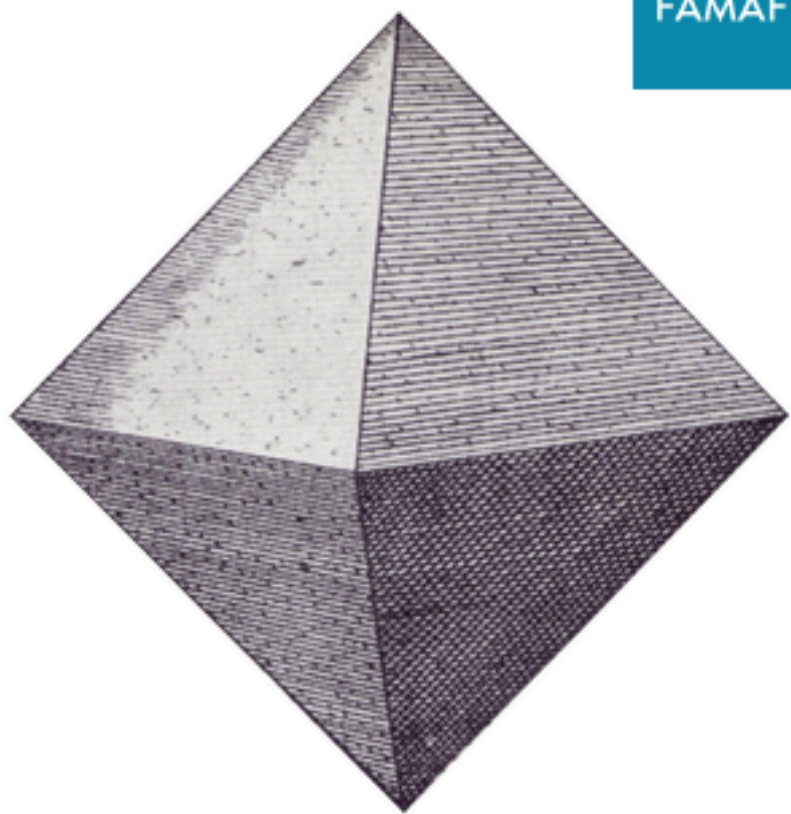
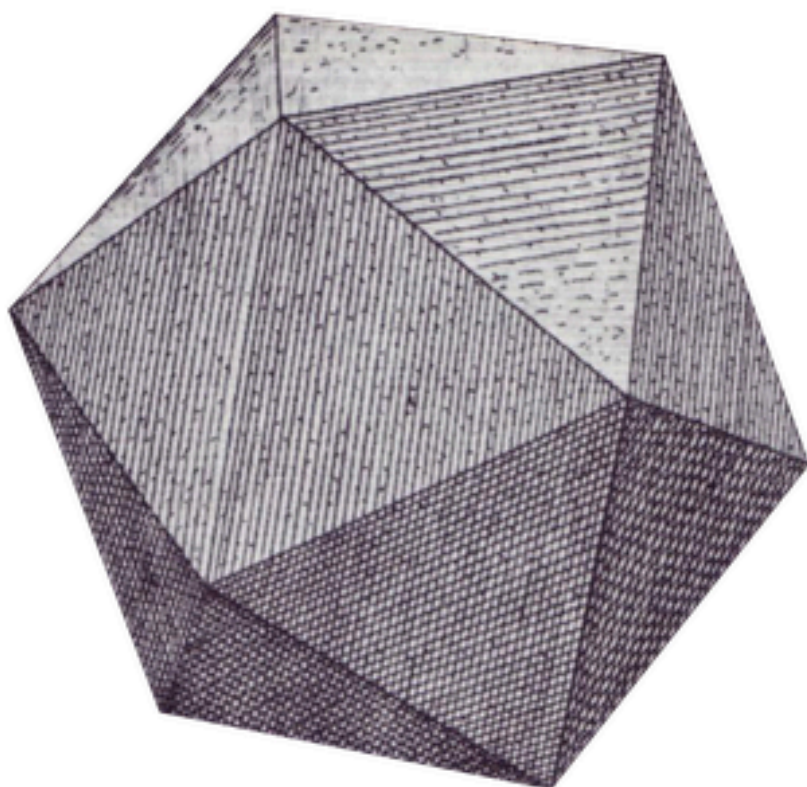


Notas de clase



Álgebra Lineal

•



0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como \mathbb{C} y está definido por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sea $z = a + b \cdot i$ un número complejo denotamos *parte real* de z a a y *parte imaginaria* de z a b de la siguiente manera

$$\Re(z) = a \quad \text{y} \quad \Im(z) = b$$

Los números reales están contenidos en \mathbb{C} , son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$$

Operaciones en los Complejos:

1 La suma se define de la siguiente manera:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2 El producto:

- Recordamos que $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo z tiene un opuesto $-z$
- Todo número complejo z distinto de 0 tiene un inverso z^{-1}

Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo $z = a + bi$, se define su conjugado como $\bar{z} = a - bi$

Si $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Además notamos que si $z = a + bi$ entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \cdot \bar{z} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ y es igual a 0 $\Leftrightarrow z = 0$.

Definición 1.0:

Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

si $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} \\ &= z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} \\ &= |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Definición 1.1:

Sea $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. El inverso de un número complejo $z = a + bi$ es:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Notación: Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

Ejemplo 1.1 :

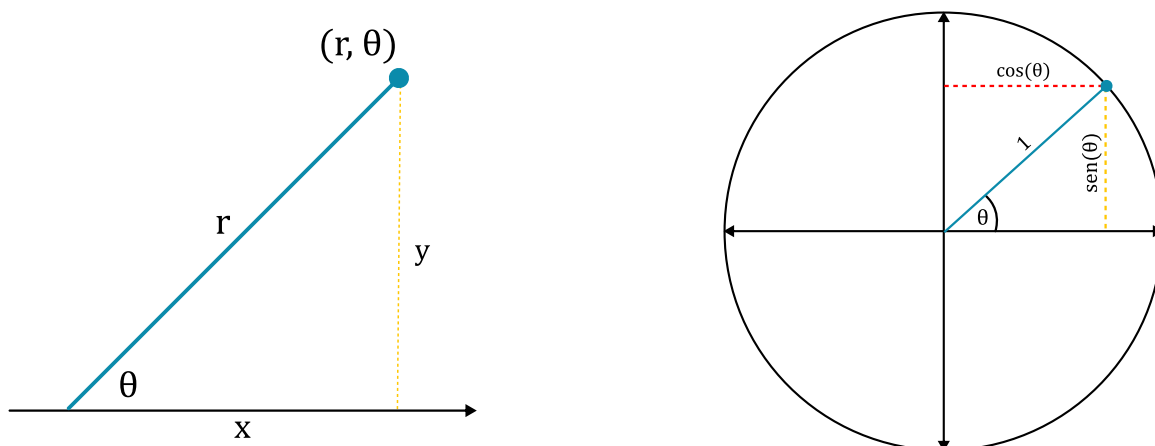
Calculamos el inverso de los números complejos $2 - 3i$, $3i$ y $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^{-1} &= \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \\ (3i)^{-1} &= -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3}i \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en el plano por sus coordenadas con respecto a dos ejes perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Así entonces el punto se describe por un par de números (r, θ) que constituyen sus coordenadas polares.



Si tenemos nuestros ejes usuales y x e y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \sin(\theta)$$

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Si trasladamos esto al mundo de los complejos, recordamos que si $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ahora si consideramos $z = a + bi$ con $|z| = 1$, es decir:

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabemos por conceptos de trigonometría, específicamente las identidades pitagóricas, que:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Entonces existe un número $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta)$$

Luego $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$

Ahora si consideramos un número complejo $z = a + bi$ cualquiera, no nulo, se cumple que:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$$

Dado que el número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1, se sigue que es de la forma $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$

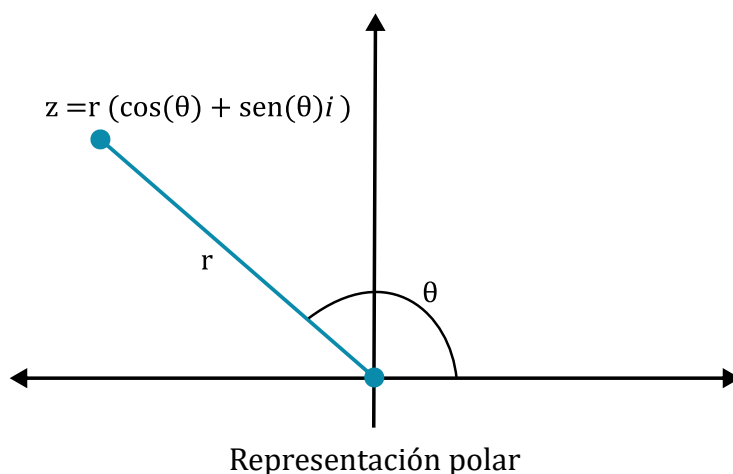
Luego podemos representar a z como:

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

Por lo tanto, todo número complejo no nulo puede escribirse en su *forma polar*

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

donde estas expresiones están relacionadas por $a = r \cdot \cos(\theta)$ y $b = r \cdot \sin(\theta)$; geométricamente hablando, $r = |z|$ representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y θ es la medida en radianes del ángulo entre el eje real (\Re) y la semi recta con origen en 0, que pasa por z , tomando el sentido antihorario.



Ejemplo:

- El número complejo $z = 1 - i$ tiene modulo $\sqrt{2}$, entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$1 - i = \underbrace{(\sqrt{2})}_r \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\sin(\theta)} i \right)$$

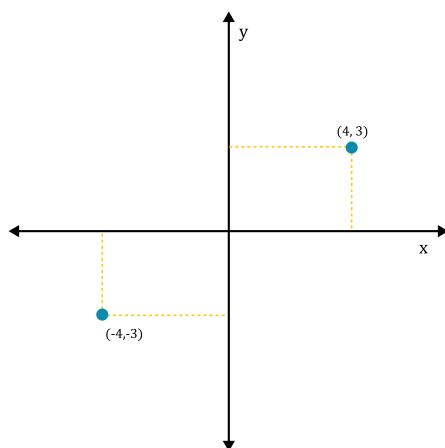
Luego el argumento de z es $\theta = \frac{7}{4}\pi$ y podemos escribir:

$$z = 1 - i$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)i \right)$$

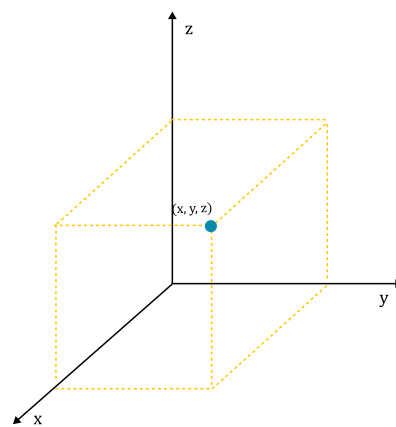
1 Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 :

Se puede utilizar una t pula (x, y) para representar un punto en el plano, asi también una tripla (x, y, z) para representar un punto en el espacio, también suele usarse la notación (x_1, x_2, x_3)



(a)

Representación de puntos en el plano



(b)

Representación de puntos en el espacio

Definición:

Sea \mathbb{R} el cuerpo de los números reales, entonces

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq i \leq n\}$$

Todo v en \mathbb{R}^n será llamado *punto* (vector en el origen o simplemente vector). La mayoría de nuestros ejemplos tendrán lugar cuanto $n = 2$ o $n = 3$; para ello usaremos el *sistemas de coordenadas cartesianas* para representar los elementos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Suma en \mathbb{R}^n :

Si $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

En otras palabras, la suma es *coordenada a coordenada*

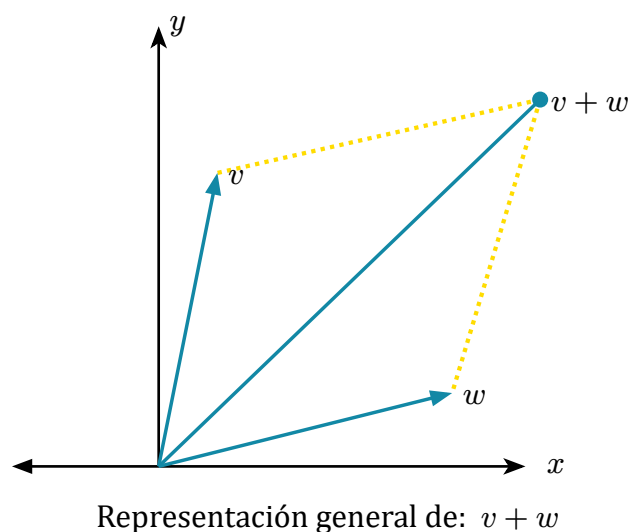
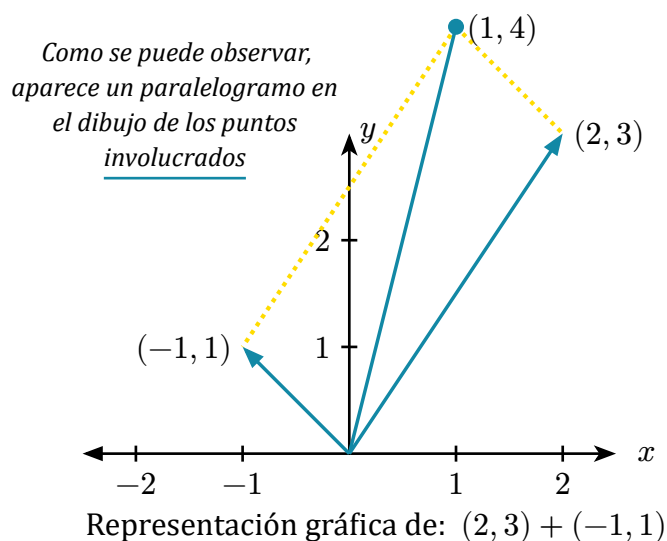
Propiedades:

La suma de vectores en \mathbb{R}^n satisface que:

- 1 Es asociativa
 - $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$
- 2 Es conmutativa
 - $v + w = w + v, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
- 3 El vector $0 := (0, \dots, 0)$, es el *elemento neutro*
 - $v + 0 = 0 + v = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$
- 4 El vector $-v = (-x_1, \dots, -x_n)$ es el opuesto de $v = (x_1, \dots, x_n)$
 - $v + (-v) = (-v) + v = 0$

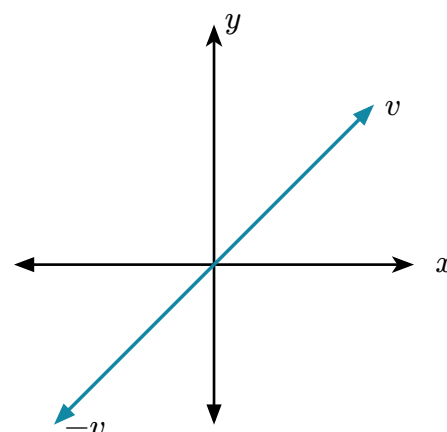
Ley del paralelogramo

Sea $v = (2, 3)$ y $w = (-1, 1)$, entonces $v + w = (1, 4)$



El opuesto de un vector

El opuesto de un vector v en el plano es $-v$ y geométricamente es el vector reflejado respecto al centro.

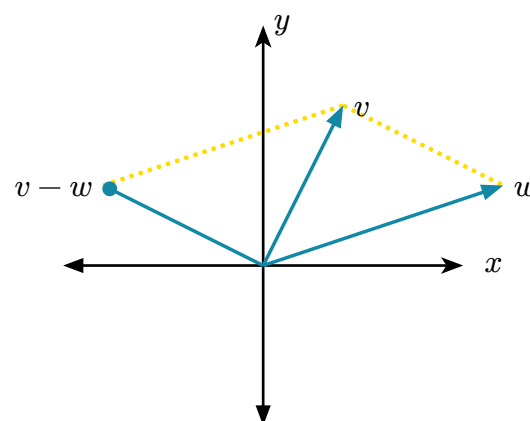


Resta de vectores

Dados dos vectores v, w en el plano, podemos representar la resta como la suma de v más el opuesto de w , es decir:

$$v - w := v + (-w)$$

Como $(v - w) + w = v$, la ley del paralelogramo también es útil para representar geoméricamente la resta



Producto de un vector por un escalar

Sea $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

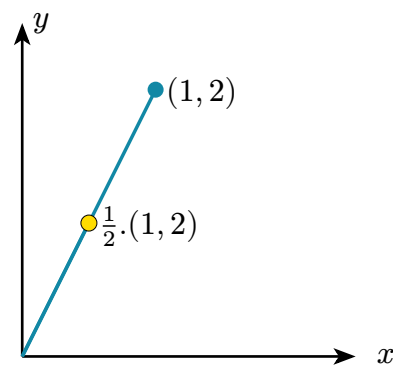
$$\lambda \cdot v = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

También denotamos a esta multiplicación por λv

Ejemplo:

Si $v = (1, 2)$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\lambda v = \left(\frac{1}{2} \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$



Representación de $\lambda \cdot v$

Propiedades

La multiplicación por escalares satisface que:

1 Es asociativa:

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2 Es distributiva:

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3 Existencia del opuesto:

$$(-1)v = -v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

A continuación se introducirá un concepto fundamental para los temas sub-siguientes:

Combinación Lineal

Sean v_1, \dots, v_k vectores en \mathbb{R}^n

Una *combinación lineal* de v_1, \dots, v_k es un vector de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son números reales.

Ejemplo:

Sean $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 3, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$ y $v_4 = (-2, -1, -3)$ vectores en \mathbb{R}^3

Entonces:

$$\begin{aligned}v &= 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - 5v_4 \\&= 2(1, 2, 3) - 3(-1, 3, 0) + 4(-1, 0, 1) - 5(-2, -1, -3) \\&= (2, 4, 6) + (3, -9, 0) + (-4, 0, 4) + (10, 5, 15) \\&= (11, 0, 25)\end{aligned}$$

Es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4 .

Base canónica

Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se denota $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada i -ésima que es 1.

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ se llama *base canónica* de \mathbb{R}^n .

Ejemplo:

En \mathbb{R}^3 los vectores son $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, estos vectores son fundamentales para la materia.

Propiedad

Todo vector de \mathbb{R}^n se escribe como *combinación lineal* de la base canónica.

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) \\&= 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \\&= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3\end{aligned}$$