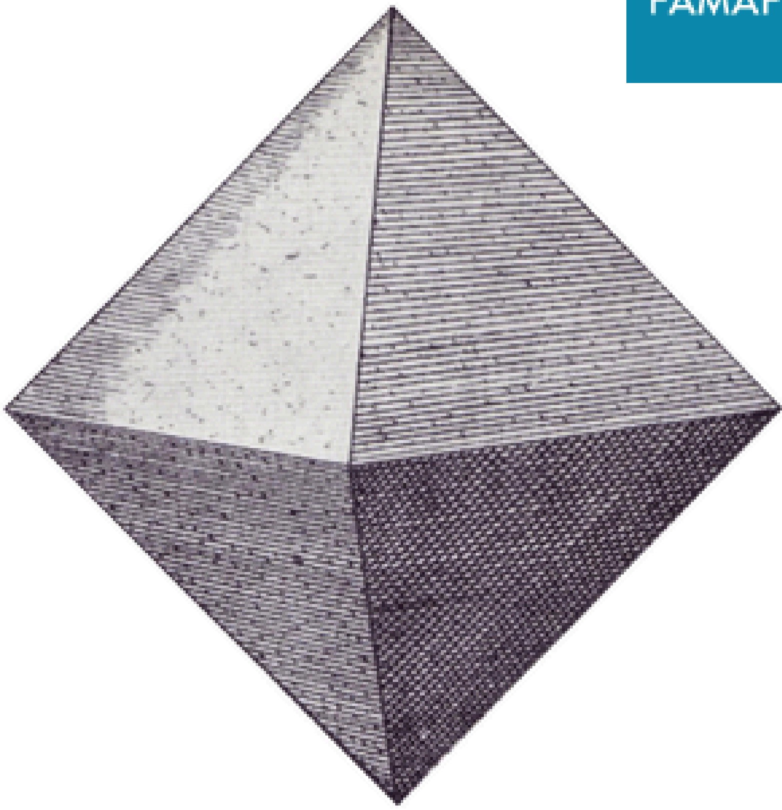
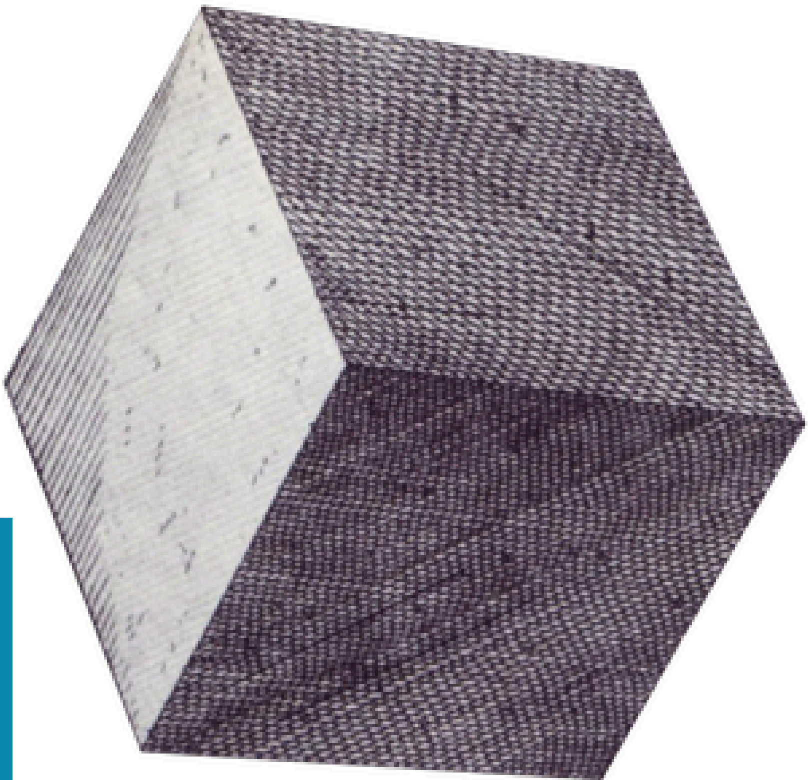
FAMAF

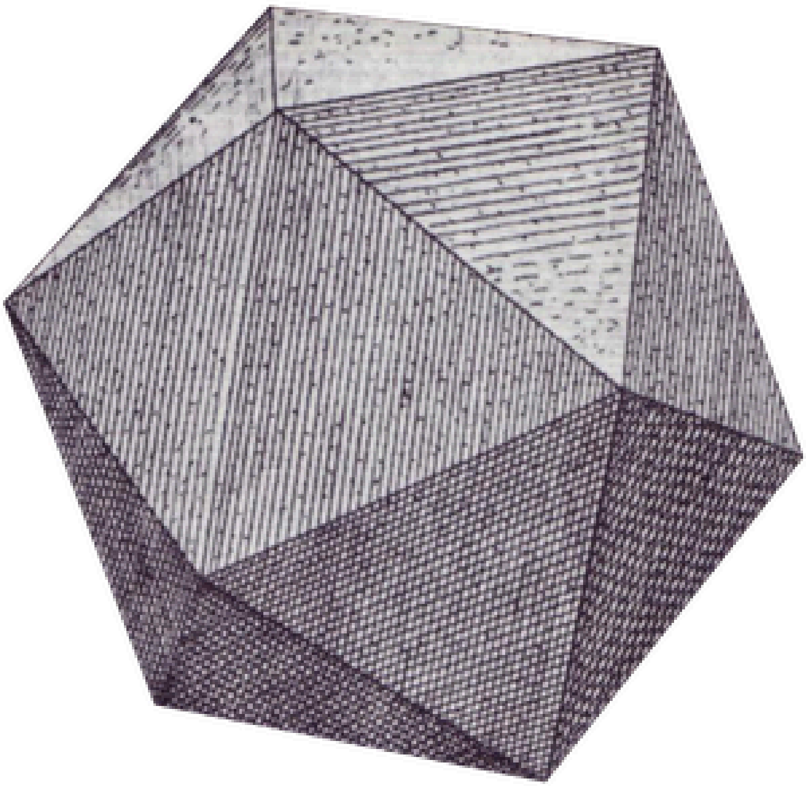
Notas de clase

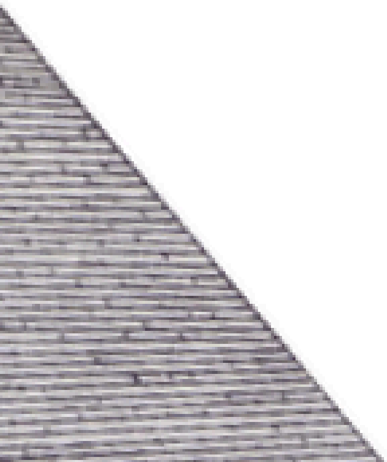




Análisis Matemático 2

Santiago Emanuel Nieva





Intencionalmente dejada en blanco

Intencionalmente dejada en blanco

Breve repaso

1 Continuidad

- En un punto
- En un intervalo
- Ejemplos
- Teorema del Valor intermedio:
  - Enunciado
  - Aplicación
- Teorema de Weierstrass:
  - Enunciado

2 Derivación

- Definición de derivadas, interpretacion geométrica
- Reglas de Derivación
- Derivada de funciones trigonométricas
- Derivadas de exponenciales y logaritmos
- Derivada de la función inversa
  - Funciones trigonométricas inversas
- Ecuación de la recta tangente
- Derivadas de orden superior
- Diferenciación logaritmica

3 Análisis de funciones

- Información a partir de $f(x)$
- Información a partir de $f'(x)$
- Información a partir de $f''(x)$
- Ejemplos:
  - Análisis completo y gráfica de $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$
  - Análisis completo y gráfica de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1 Continuidad:

Continuidad en un punto

- Una función f es continua en un valor si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

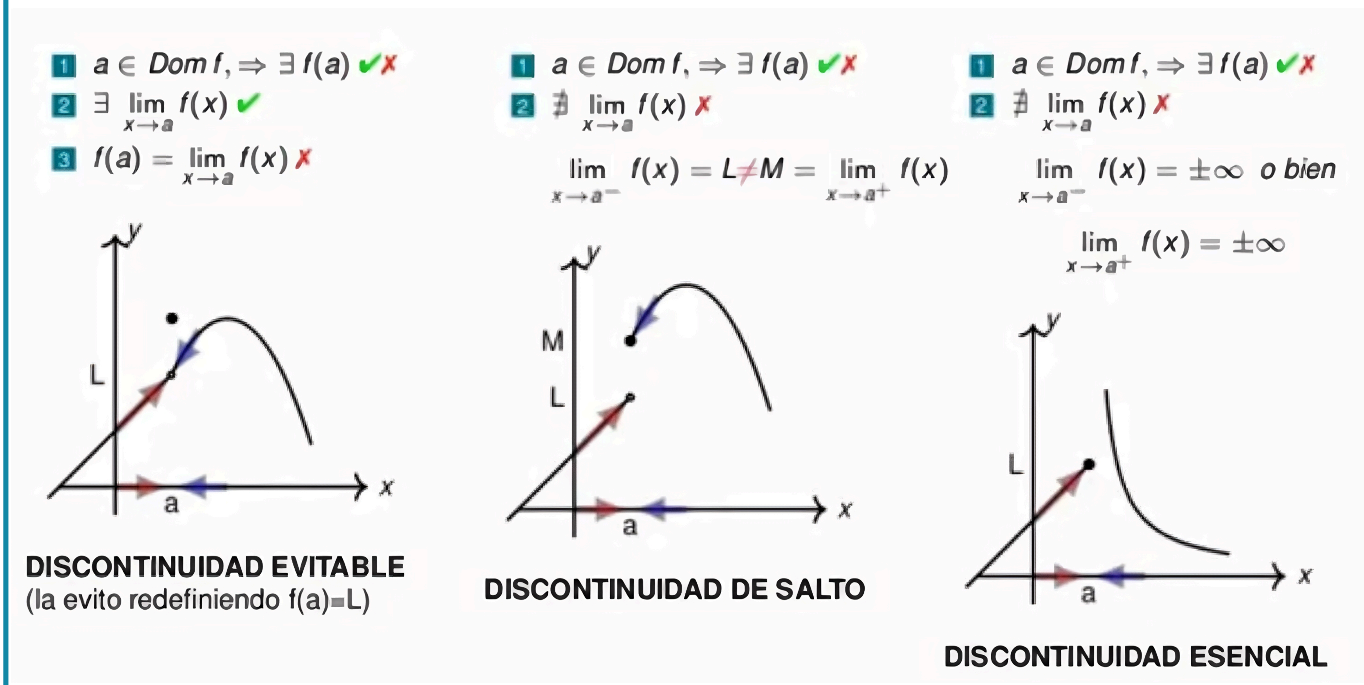
- Condiciones:

1. f debe estar definida en $x = a$:
   - $a \in \mathbb{D}\text{om de } f \Rightarrow \exists f(a)$
2. Tiene que existir el limite de f alrededor de a
   - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. f esta definida en un intervalo abierto que contiene a a
4. Los limites laterales son iguales:
   - $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Si alguno de estas condiciones no se cumpliese:

- Diremos que f es discontinua en a

Tipos de discontinuidades



Continuidad lateral:

Continuidad por Izquierda

- Una funcion f es continua por izquierda en un valor a si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(x)$$

Continuidad por Derecha

- Una funcion f es continua por derecha en un valor a si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(x)$$

Continuidad en Intervalo:

Definición

- Una funcion f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todo número del intervalo

Definición

- Una funcion f es continua en un intervalo abierto $[a, b]$ si:

1. Es continua en todo número del intervalo abierto (a, b)
2. Es continua por derecha en a
3. Es continua por izquierda en b

Propiedades de funciones

- Sean f y g continuas en a, entonces tambien son continuas en a las siguientes funciones:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f \cdot g)(x)$
3. $c \cdot f(x)$, siendo c constante.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, *si* $g(a) \neq 0$
5. $(f \circ g)(x)$,*si* f *es continua en* $g(a)$

Resultados utiles para demostrar la continuidad

- Sea a un punto cualquiera dentro del dominio (sin los extremos)

1. Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$
2. Toda función racional es continua en cualquier punto de su dominio
3. La radicación es continua en los puntos de su dominio (sin los extremos)
4. Las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

Ejercicios resueltos

Usando la definición de continuidad y las propiedades de los limites:

- Demostrar que f es continua en a :

$$f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot x^2}, \qquad a = 3$$

Recordamos

1. $a \in \mathbb{D}\text{om } f \Rightarrow f(a)$
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Resuelvo:

$\mathbb{D}\text{om } f = \mathbb{R}$,

$$f(3) = \sqrt[3]{3 \cdot (3^2)} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{3 \cdot x^2} \underset{\text{prop.Raiz}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \to a} (3 \cdot x^2)}$$

$$\underset{\text{prop.poliomio}}{=} \sqrt[3]{3 \cdot 3^2} = 3 \quad \checkmark$$

$f(x)$ es continua en $a = 3$

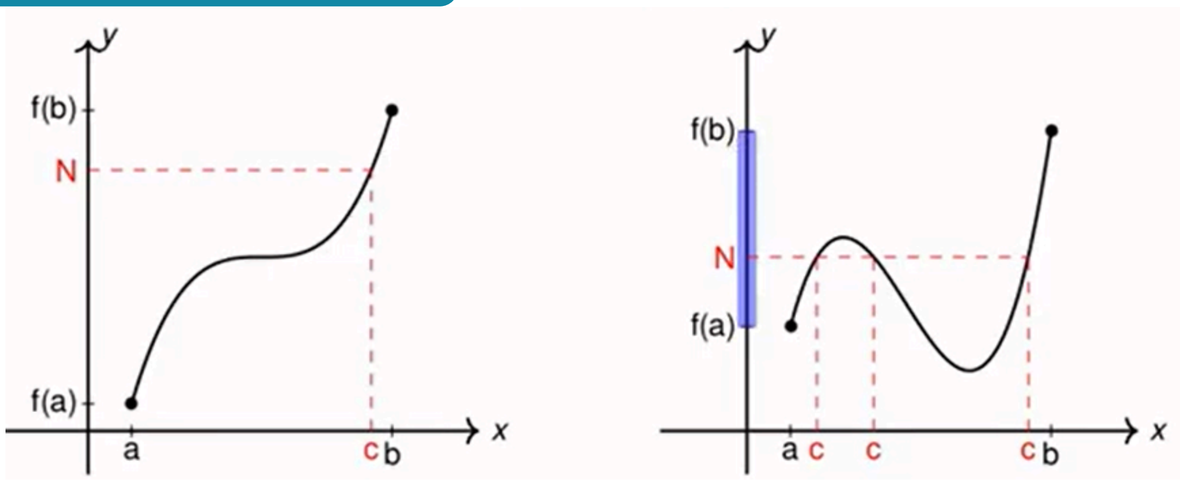
Teorema del valor intermedio

- Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y N es un número estrictamente situado entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$

f continua en [a,b]:

$$si\ f(a) < N < f(b) \vee f(b) < N < f(a)$$
$$\Rightarrow \exists c : a < c < b \mid f(c) = N$$

Ejemplo en gráfica



Ejercicios de aplicación:

Dada la ecuación $\cos(x) = 2x$ demostar que tenga solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos(x) = 2x \Rightarrow \cos(x) - 2x = 0$$

Tomemos la función $f(x) = \cos(x) - 2x$ y tomamos el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $f(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ debido a que tenemos una suma de funciones continuas

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1, \quad 1 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0 - \pi, \quad -\pi < 0$$

por el teorema del valor intermedio,si f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puedo elegir $N = 0$ ya que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0)$, entonces puedo asegurar que existe al menos un $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$

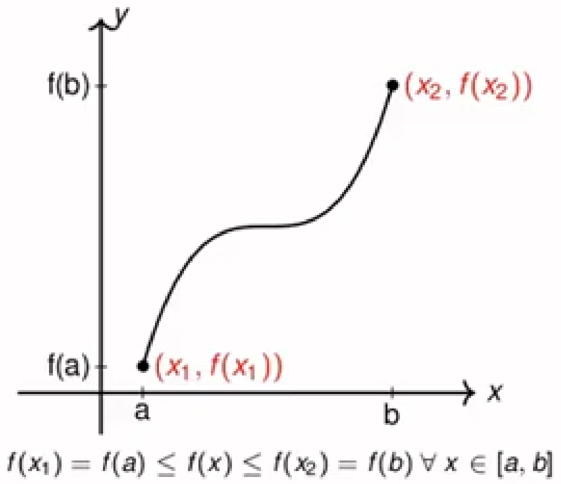
Teorema de Weierstrass

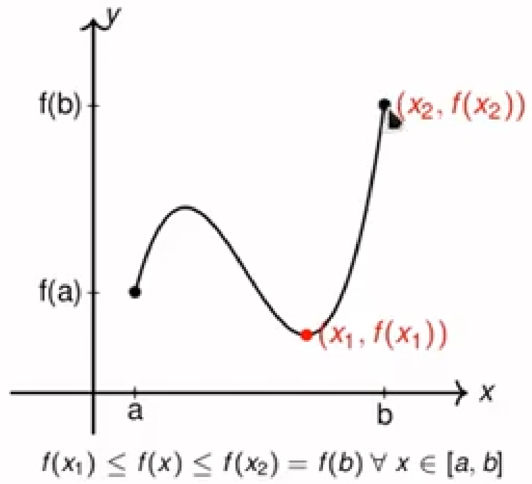
- Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 en el $[a, b]$,tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a, b]$$

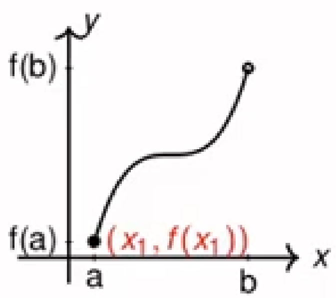
- En otras palabras, f alcanza su valor mínimo y máximo en $[a, b]$

Ejemplo en gráfica

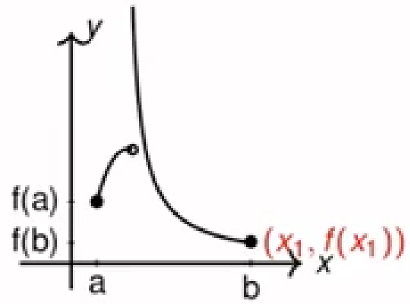




La importancia de la hipótesis



No tiene máximo! No aplica el teorema porque el intervalo NO es cerrado!



NO tiene máximo! No cumple con la continuidad en el intervalo, no se puede aplicar el teorema

2 Derivación:

Información acerca de $f(x)$

1. Dominio: $\mathbb{D}$om f = $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x)\}$
2. Continuidad en $\mathbb{I}$: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \forall a \in \mathbb{I}$
3. Discontinuidades evitables y de salto
4. Discontinuidades esenciales:
   - Asíntota Vertical en $x = a$:

   $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
5. Comportamiento en $|x|$ grandes:
   - Asíntotas Horizontales en:

   $y = L$ y/o $y = M$

   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ y/o $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

Introducción:

Sea m las pendientes secantes que pasan por el punto a:

$$m = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\text{Cociente incremental}} = \frac{\triangle f}{\triangle x}$$

y la pendiente en si de la recta tangente se define:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underbrace{=}_{x=a+h} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición formal de la derivada

Sea a un número en el dominio de f, la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observación

Si $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entonces decimos que f es *diferenciable* en a

Teorema

Si f es *diferenciable* en a entonces f es continua en a.

- Hay que tener en cuenta que no vale la recíproca del teorema

Derivadas laterales:

Derivada por Izquierda

- Si nos acercamos al punto a con valores negativos de h, es decir:

$$(a+h) < a,$$

Entonces:

$$f'^{-} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

,

Derivada por Derecha

- Si nos acercamos al punto a con valores positivos de h, es decir:

$$(a+h) > a,$$

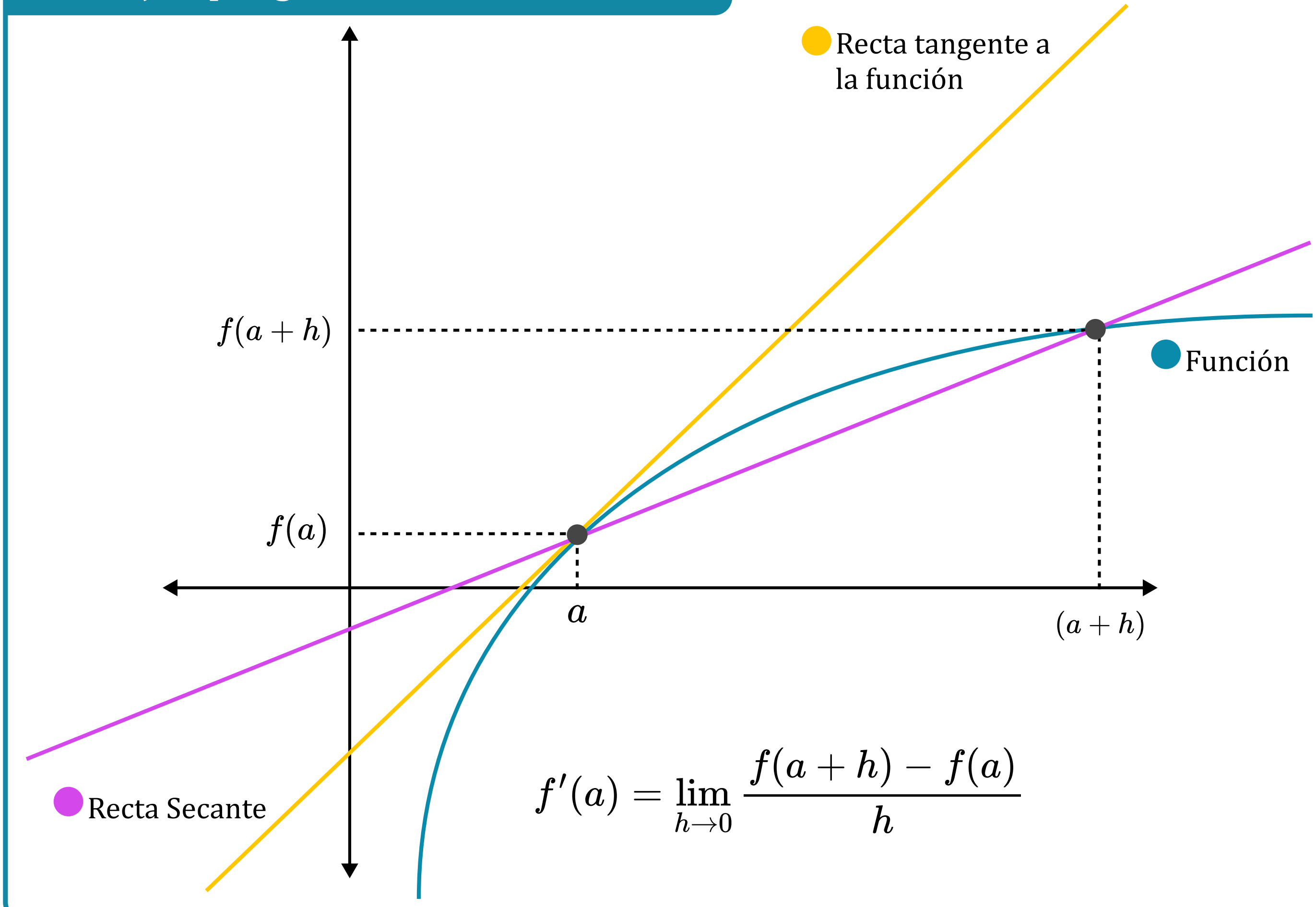
Entonces:

$$f'^{+} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Observación

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow f'^{-}(x) = f'^{+}(x)$$

Ejemplo gráfico: La derivada



Propiedades y Reglas de Derivación:

- $(c)' = 0, \forall c \in \mathbb{R}$
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(ax+b)'(x) = a$
- $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \forall c \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$**, $\forall\, g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$**
- *Si* $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
- $\underbrace{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{\text{Regla de la cadena}}$
- $\left(\sqrt{g(x)}\right)'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

Derivadas trigonométricas, logarítmicas y exponenciales:

- $\left(e^{g(x)}\right)'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$
- $(\ln g(x))'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- $\left(x^{g(x)}\right)'(x) = \left(e^{g(x) \cdot \ln x}\right)'$
- $(a^x)'(x) = \ln(a) \cdot a^x, a > 0$
- $(\ln x)'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
- $(e^x)' = e^x$
- $\left(\log_{a(x)}\right)'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}, a > 0 \wedge x > 0$
- $(\sin g(x))' = g'(x) \cdot \cos(g(x))$
- $(\cos g(x))' = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$

Derivada de la función inversa:

Antes de continuar con la derivada de la función inversa, primero quiero hacer un breve repaso de los conceptos básicos relevantes para entender este tema.