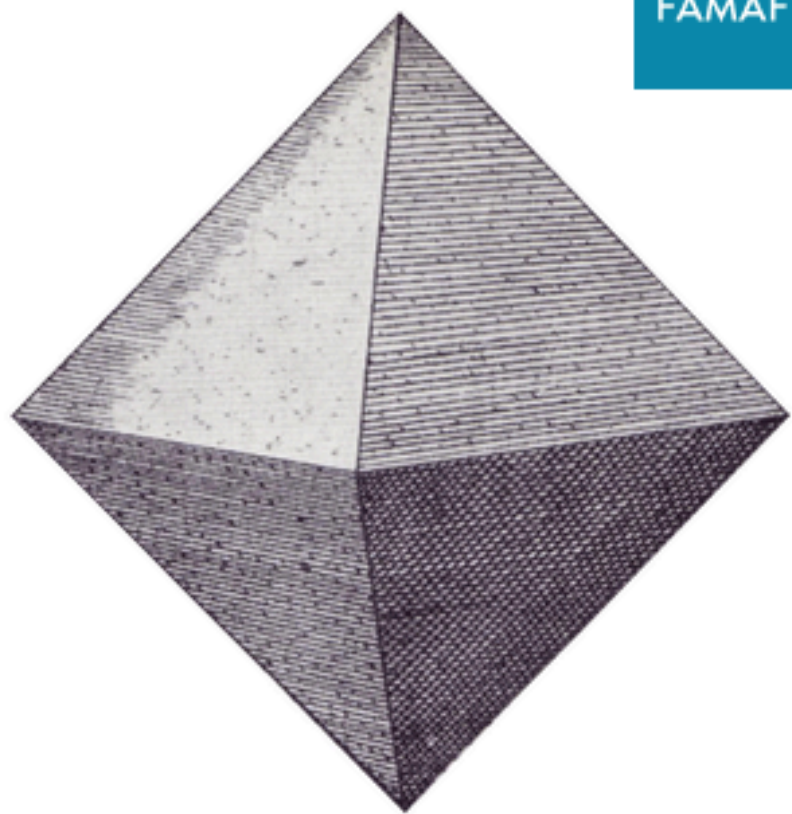
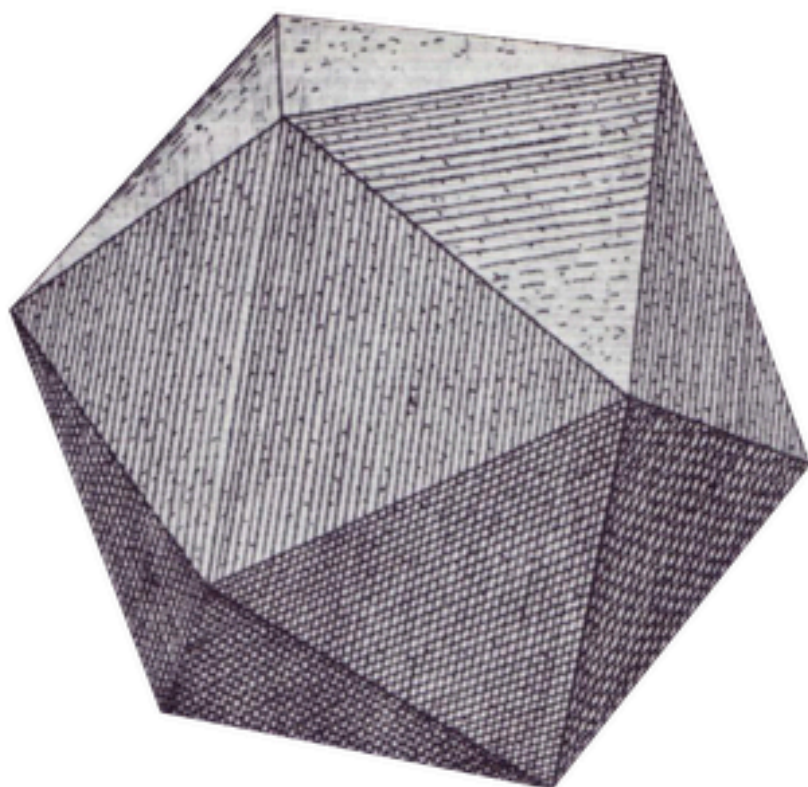
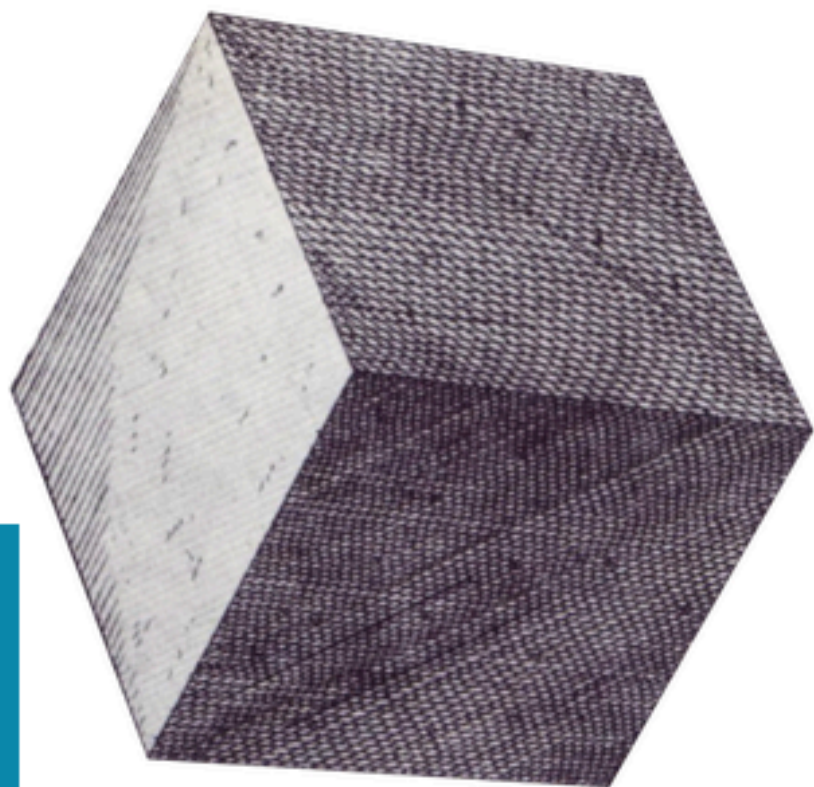


Notas de clase



Análisis Matemático 2.



Intencionalmente dejada en blanco

Intencionalmente dejada en blanco

Breve repaso

1 Continuidad

- En un punto
- En un intervalo
- Ejemplos
- Teorema del Valor intermedio:
 - Enunciado
 - Aplicación
- Teorema de Weierstrass:
 - Enunciado

2 Derivación

- Definición de derivadas, interpretación geométrica
- Reglas de Derivación
- Derivada de funciones trigonométricas
- Derivadas de exponenciales y logaritmos
- Derivada de la función inversa
 - Funciones trigonométricas inversas
- Ecuación de la recta tangente
- Derivadas de orden superior
- Diferenciación logarítmica

3 Análisis de funciones

- Información a partir de $f(x)$
- Información a partir de $f'(x)$
- Información a partir de $f''(x)$
- Ejemplos:
 - Análisis completo y gráfica de $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$
 - Análisis completo y gráfica de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1 Continuidad:

Continuidad en un punto

- Una función f es continua en un valor si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- Condiciones:

- f debe estar definida en $x = a$:

- $a \in \mathbb{D}om\ de\ f \Rightarrow \exists f(a)$

- Tiene que existir el límite de f alrededor de a

- $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- f esta definida en un intervalo abierto que contiene a a

- Los límites laterales son iguales:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Si alguno de estas condiciones no se cumpliese:

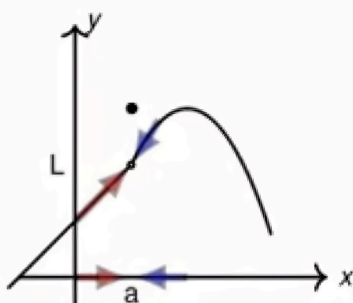
- Diremos que f es discontinua en a

Tipos de discontinuidades

- $a \in Dom\ f, \Rightarrow \exists f(a)$ ✓✗

- $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ✓

- $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ✗

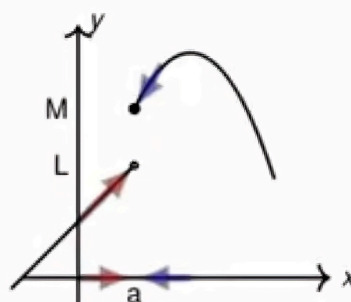


DISCONTINUIDAD EVITABLE
(la evito redefiniendo $f(a)=L$)

- $a \in Dom\ f, \Rightarrow \exists f(a)$ ✓✗

- $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ✗

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \neq M = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$



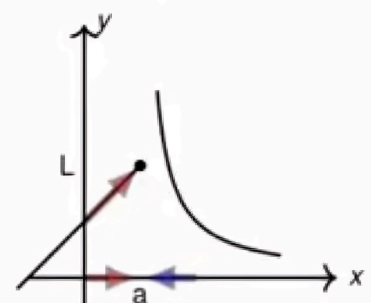
DISCONTINUIDAD DE SALTO

- $a \in Dom\ f, \Rightarrow \exists f(a)$ ✓✗

- $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ✗

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o bien}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$



DISCONTINUIDAD ESENCIAL

Continuidad lateral:

Continuidad por Izquierda

- Una función f es continua por izquierda en un valor a si:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad por Derecha

- Una función f es continua por derecha en un valor a si:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Continuidad en Intervalo:

Definición

- Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todo número del intervalo

Definición

- Una función f es continua en un intervalo abierto $[a, b]$ si:

- Es continua en todo número del intervalo abierto (a, b)
- Es continua por derecha en a
- Es continua por izquierda en b

Propiedades de funciones

- Sean f y g continuas en a , entonces también son continuas en a las siguientes funciones:

- $(f + g)(x)$

- $(f \cdot g)(x)$

- $c \cdot f(x)$, siendo c constante.

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, si $g(a) \neq 0$

- $(f \circ g)(x)$, si f es continua en $g(a)$

Resultados utiles para demostrar la continuidad

- Sea a un punto cualquiera dentro del dominio (sin los extremos)

- | | |
|---|---|
| 1 Los polinomios son continuos en \mathbb{R} | 3 La radicación es continua en los puntos de su dominio (sin los extremos) |
| 2 Toda función racional es continua en cualquier punto de <u>su dominio</u> | 4 Las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en \mathbb{R} |

Ejercicios resueltos

Usando la definición de continuidad y las propiedades de los limites:

- Demostrar que f es continua en a :

$$f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot x^2}, \quad a = 3$$

Recordamos

- 1 $a \in \mathbb{D}om f \Rightarrow f(a)$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Resuelvo:

$$\mathbb{D}om f = \mathbb{R},$$

$$f(3) = \sqrt[3]{3 \cdot (3^2)} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{3 \cdot x^2} &\stackrel{\text{prop. Raiz}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} (3 \cdot x^2)} \\ &\stackrel{\text{prop. polinomio}}{=} \sqrt[3]{3 \cdot 3^2} = 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(x) \text{ es } \underline{\text{continua en } a = 3}$$

Teorema del valor intermedio

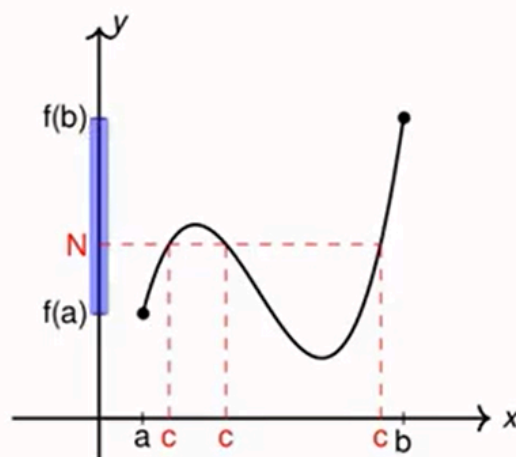
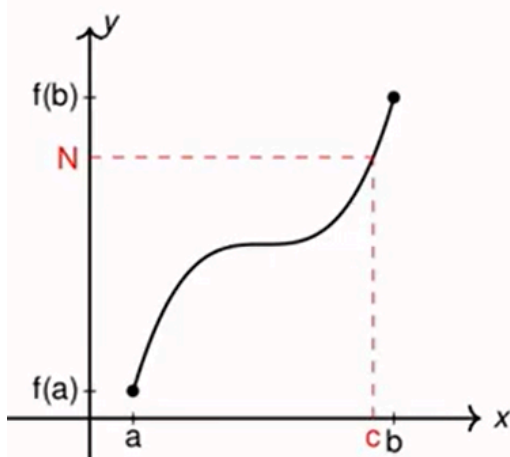
- Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y N es un número estrictamente situado entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$

f continua en $[a, b]$:

$$\text{si } f(a) < N < f(b) \vee f(b) < N < f(a)$$

$$\Rightarrow \exists c : a < c < b \mid f(c) = N$$

Ejemplo en gráfica



Ejercicios de aplicación:

Dada la ecuación $\cos(x) = 2x$ demostrar que tenga solución en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\cos(x) = 2x \Rightarrow \cos(x) - 2x = 0$$

Tomemos la función $f(x) = \cos(x) - 2x$ y tomamos el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$

- $f(x)$ es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ debido a que tenemos una suma de funciones continuas

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1, \quad 1 > 0$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 - \pi, \quad -\pi < 0 \end{aligned}$$

por el teorema del valor intermedio, si f es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$, puedo elegir $N = 0$ ya que $f(\frac{\pi}{2}) < 0 < f(0)$, entonces puedo asegurar que existe al menos un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$

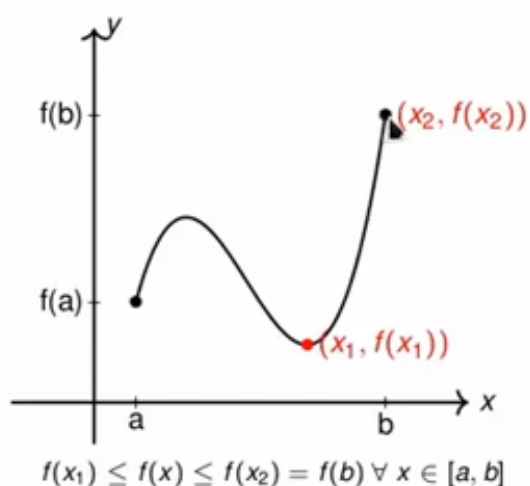
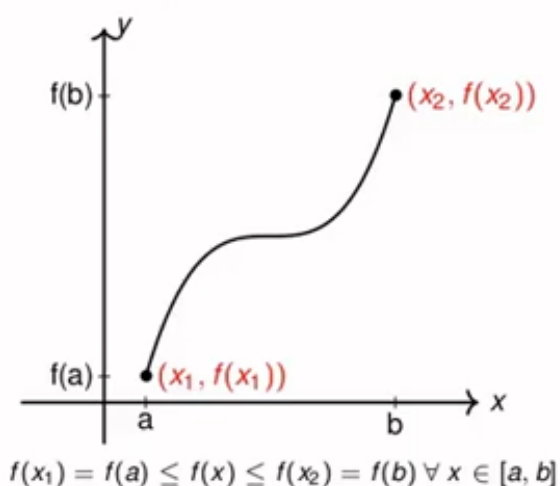
Teorema de Weierstrass

- Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 en el $[a, b]$, tales que:

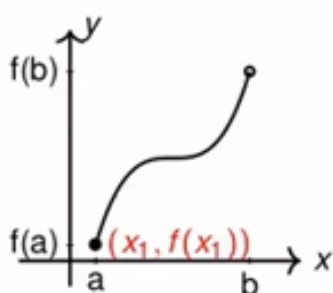
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

- En otras palabras, f alcanza su valor mínimo y máximo en $[a, b]$

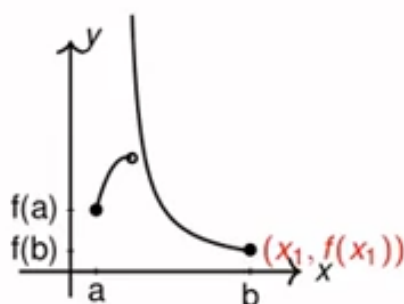
Ejemplo en gráfica



La importancia de la hipótesis



No tiene máximo! No aplica el teorema porque el intervalo NO es cerrado!



NO tiene máximo! No cumple con la continuidad en el intervalo, no se puede aplicar el teorema

2 Derivación:

Información acerca de $f(x)$

- 1 Dominio: $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x)\}$
- 2 Continuidad en \mathbb{I} : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \forall a \in \mathbb{I}$
- 3 Discontinuidades evitables y de salto
- 4 Discontinuidades esenciales:
 - Asíntota Vertical en $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$
- 5 Comportamiento en $|x|$ grandes:
 - Asíntotas Horizontales en:
 $y = L \text{ y/o } y = M$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \text{ y/o } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Introducción:

Sea m las pendientes secantes que pasan por el punto a :

$$m = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\text{Cociente incremental}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

y la pendiente en si de la recta tangente se define:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x = a+h \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición formal de la derivada

Sea a un número en el dominio de f , la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observación

Si $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ entonces decimos que f es *diferenciable* en a

Teorema

Si f es *diferenciable* en a entonces f es continua en a .

- Hay que tener en cuenta que no vale la recíproca del teorema

Derivadas laterales:

Derivada por Izquierda

- Si nos acercamos al punto a con valores negativos de h , es decir:

$$(a + h) < a,$$

Entonces:

$$f'^{-} = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Derivada por Derecha

- Si nos acercamos al punto a con valores positivos de h , es decir:

$$(a + h) > a,$$

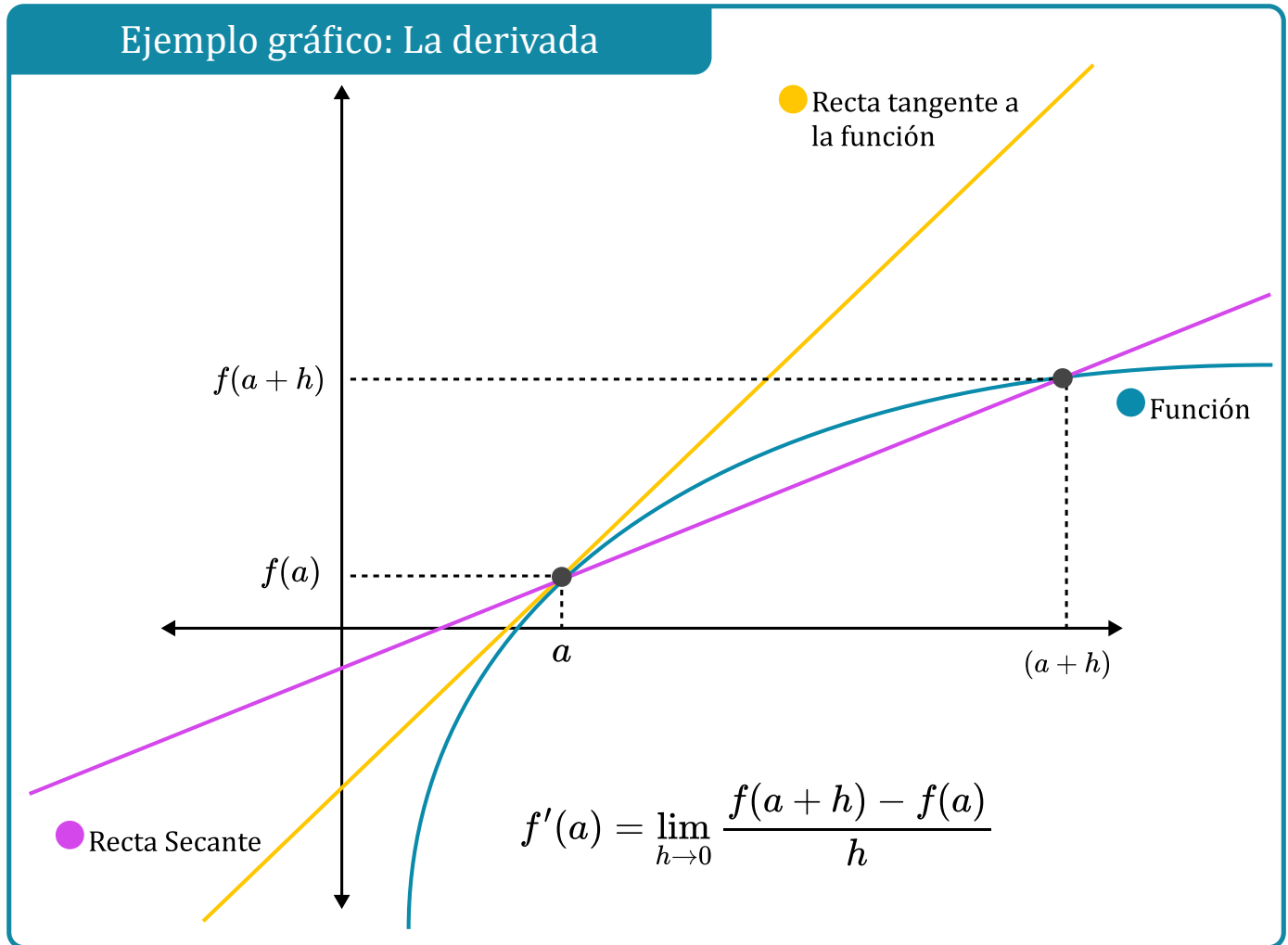
Entonces:

$$f'^{+} = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Observación

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow f'^{-}(x) = f'^{+}(x)$$

Ejemplo gráfico: La derivada



Propiedades y Reglas de Derivación:

- $(c)' = 0, \forall c \in \mathbb{R}$
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(ax + b)'(x) = a$
- $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \forall c \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \forall g(x) \neq 0$
- Si $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $\underbrace{\left(\sqrt{g(x)}\right)'(x)}_{\text{Regla de la cadena}} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

Derivadas trigonométricas, logarítmicas y exponenciales:

- $(e^{g(x)})'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$
- $(\ln g(x))'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- $(x^{g(x)})'(x) = (e^{g(x) \cdot \ln x})'$
- $(a^x)'(x) = \ln(a) \cdot a^x, a > 0$
- $(\ln x)'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a(x))'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}, a > 0 \wedge x > 0$
- $(\sin g(x))' = g'(x) \cdot \cos(g(x))$
- $(\cos g(x))' = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$

Derivada de la función inversa:

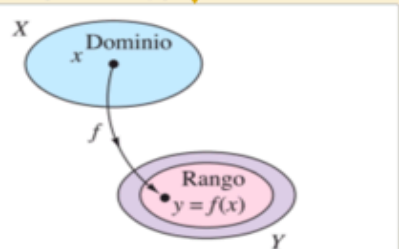
Antes de continuar con la derivada de la función inversa, primero quiero hacer un breve repaso de los conceptos básicos relevantes para entender este tema.

Definición

Definición de función real de una variable real

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número un número x en X exactamente en número de y de Y .

Domínio, Rango (imagen)



Una función real f de una variable real.

El **dominio** de f es el conjunto X . El número y es la **imagen** de x bajo f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se llama el **valor de f en x** . El **rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números en X (vea

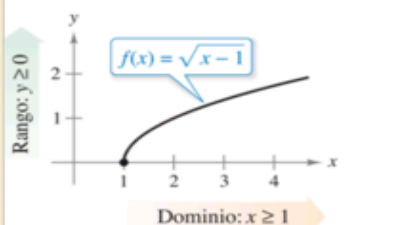
Ejemplo

EJEMPLO 2 Calcular el dominio y rango de una función

a. El dominio de la función

$f(x) = \sqrt{x-1}$

Es el conjunto de los valores de $x-1 \geq 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el rango, observe que $f(x) = \sqrt{x-1}$ nunca es negativa. Por tanto, el rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se muestra en la figura P.23(a).



a) El dominio de f es $[1, \infty)$, y el rango es $[0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determine el dominio y rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \geq 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \geq 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2(a). Para $x < 1$, todos los valores de $1-x$ son positivos. Por consiguiente, el rango de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Vea la figura P.24.)

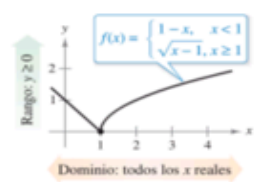


Figura P.24

Inyectividad, Suryectividad Y Biyectividad


Funciones inyectivas

Una función es **inyectiva** cuando no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen. Formalmente:

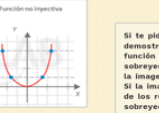
$\forall x, b \in \text{Dom}_f, \text{ si } f(x) = f(b) \Rightarrow x = b$

Es decir, para cualesquiera dos elementos a y b pertenecientes al dominio de la función Dom_f , si sus imágenes $f(a)$ y $f(b)$ son iguales, los elementos son necesariamente iguales.

✓ Función inyectiva



✗ Función no inyectiva



Ejemplo

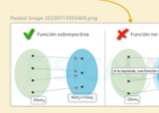
f inyectiva	f no inyectiva
$f(x) = x - 1$	$f(x) = x^2 - x + 1$
$f(x) = \sqrt{x+3}$	$f(x) = x^2 + x$
$f(x) = e^x$	

Una función es **sobreyectiva**, también llamada **suprayectiva** o **exhaustiva**, cuando el codominio y el recorrido coinciden. Formalmente:


$\forall y \in \text{Cod}_f \exists x \in \text{Dom}_f / f(x) = y$

Es decir, para cualquier elemento y del codominio existe otro elemento x del dominio tal que y es la imagen de x por f .

✓ Función sobreyectiva



✗ Función no sobreyectiva



Ejemplos

f sobreyectiva	f no sobreyectiva
$f(x) = 2 \cdot (x + 1)$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \tan(x)$	$f(x) = x^2 - 4x + 2$
$f(x) = \ln(x + 2)$	$f(x) = \cos(x)$


Funciones biyectivas

Una función es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. Formalmente:


$\forall y \in \text{Cod}_f \exists x \in \text{Dom}_f / f(x) = y$

Es decir, para cualquier elemento y del codominio existe un único elemento x del dominio tal que y es la imagen de x por f .

✓ Función biyectiva



✗ Función no biyectiva



Ejemplos

f biyectiva	f no biyectiva
$f(x) = \sqrt{x+3}$	$f(x) = \sqrt{x+1}$
$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$	$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$
$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = e^x$