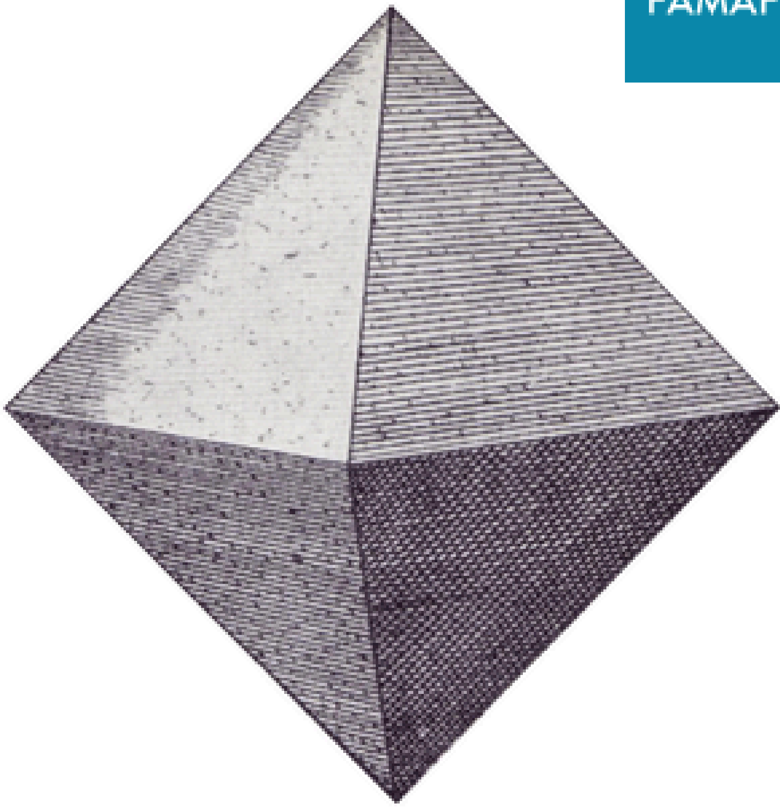
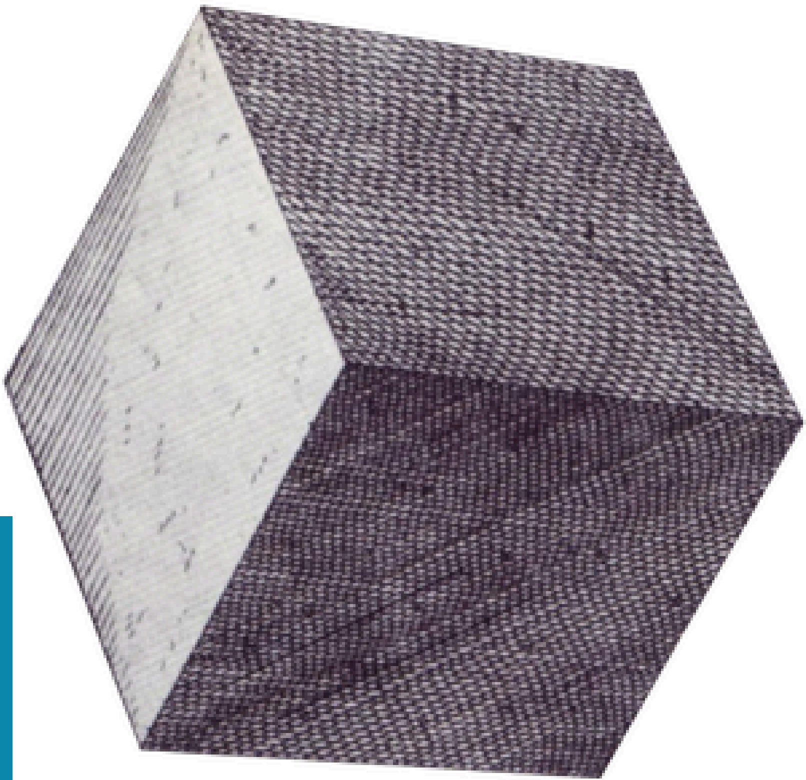
FAMAF

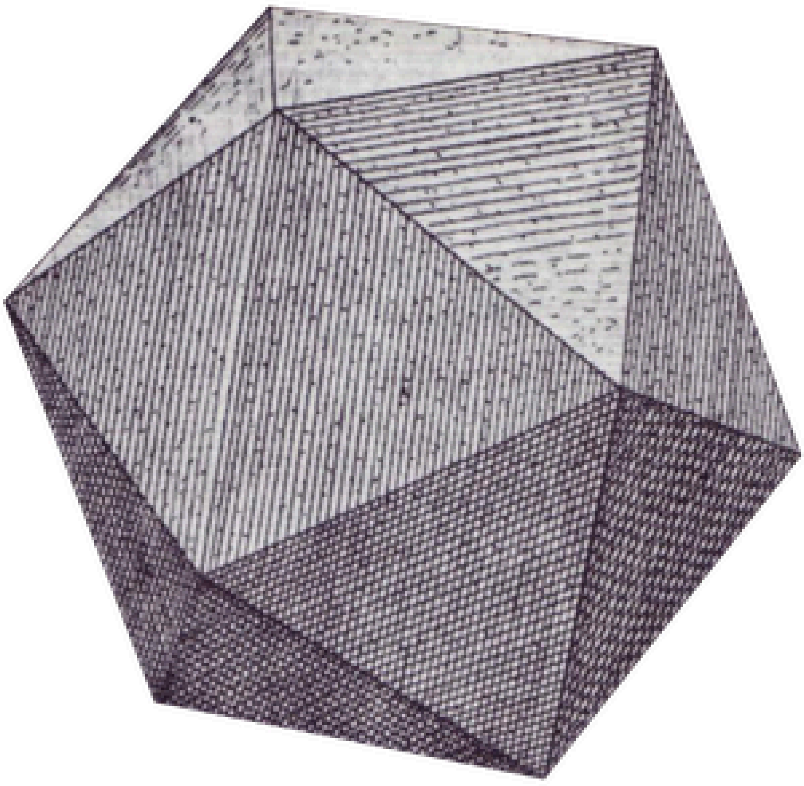
Notas de clase

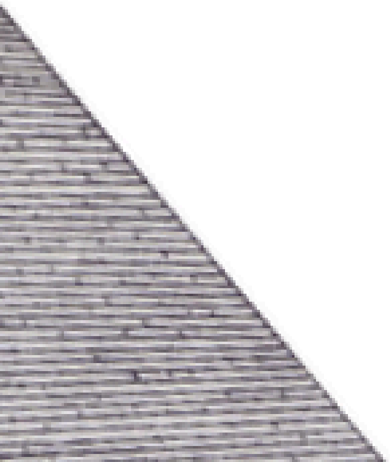




Álgebra Lineal

Santiago Emanuel Nieva





0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como $\mathbb{C}$ y está definido por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sea $z = a + b \cdot i$ un número complejo denotamos *parte real* de z a a y parte imaginaria de z a b de la siguiente manera

$$\Re(z) = a \quad \text{y} \quad \Im(z) = b$$

Los números reales están contenidos en $\mathbb{C}$, son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$$

Operaciones en los Complejos:

1 La suma de define de la siguiente manera:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2 El producto:

- Recordamos que $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo z tiene un opuesto $-z$
- Todo número complejo z distinto de *0* tiene un inverso z^{-1}

Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo $z = a + bi$, se define su conjugado como $\overline{z} = a - bi$

Si $z, w \in \mathbb{C}$,se cumple que:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad\qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Además notamos que si $z = a + bi$ entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \cdot \overline{z} \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y es igual a 0 $\Leftrightarrow z = 0$.

Definición 1.0:

Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

si $z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} \\ &= z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} \\ &= |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Definición 1.1:

Sea $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. El inverso de un número complejo $z = a + bi$ es:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Notación: Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

Ejemplo 1.1 :

Calculamos el inverso de los números complejos $2 - 3i$,$3i$ y $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$(2-3i)^{-1} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$$

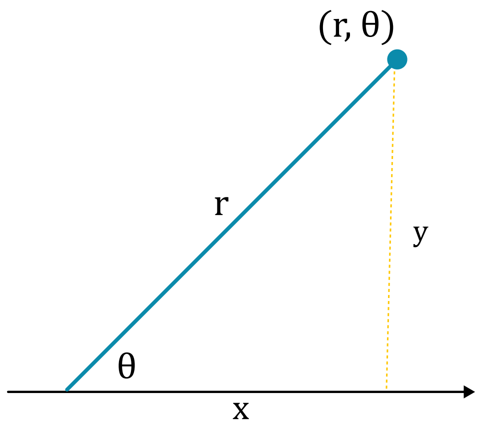
$$(3i)^{-1} = -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3} i$$

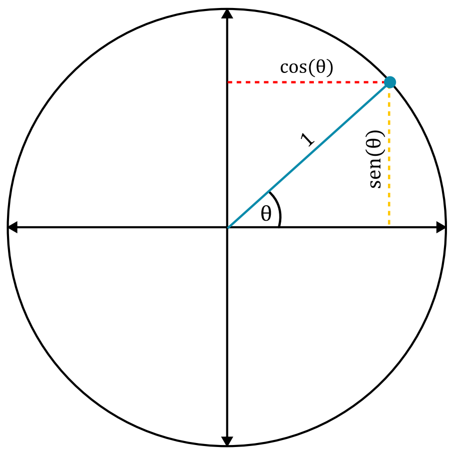
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en e plano por sus coordenadas con respecto a dos ejees perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Asi entonces el punto se describe por un par de números (r, θ) que constituyen sus coordenadas polares.





Si tenemos nuestros ejes usuales y x e y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \sin(\theta)$$

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Si trasladamos esto al mundo de los complejos, recordamos que si $z = a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ahora si consideramos $z = a + bi$ con $|z| = 1$, es decir:

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabemos por conceptos de trigonometría, especificamente las identidades pitagóricas, que:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Entonces existe un número $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta)$$

Luego $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$

Ahora si consideramos un número complejo $z = a + bi$ cualquiera,no nulo, se cumple que:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$$

Dado que el número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1, se sigue que es de la forma $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$

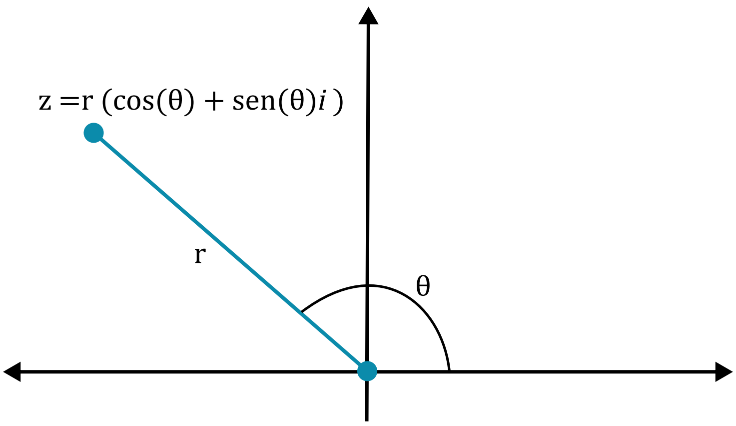
Luego podemos representar a z como:

$$z = |z| \cdot (\ \cos(\theta) + \sin(\theta)i\ )$$

Por lo tanto, todo número complejo no nulo puede escribirse en su *forma polar*

$$z = r \cdot (\ \cos(\theta) + \sin(\theta)i\ )$$

donde estas expresiones están relacionadas por $a = r \cdot \cos(\theta)$ y $b = r \cdot \sin(\theta)$; geométricamente hablando, $r = |z|$ representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y θ es la medida en redianes del ángulo entre el eje real ($\mathfrak{R}$) y la sei recta con origen en 0, que pasa por z, tomando el sentido antihorario.



Representación polar

Ejemplo:

- El número complejo $z = 1 - i$ tiene modulo $\sqrt{2}$, entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$1 - i = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)}_{r} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\sin(\theta)} i \right)$$

Luego el argumento de z es $\theta = \frac{7}{4}\pi$ y podemos escribir:

$$\begin{aligned} z &= 1 - i \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) i \right) \end{aligned}$$