

# 0 Números complejos:

Al conjunto de los números complejos se los denota como  $\mathbb C$  y está definido por

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

sea  $z=a+b\cdot i$  un número complejo denotamos  $parte\ real$  de z a a y parte imaginaria de z a b de la siguiente manera

$$\Re(z) = a$$
 y  $\Im(z) = b$ 

Los números reales están contenidos en C, son aquellos cuya parte imaginaria es nula, es decir

$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0 \}$$

# Operaciones en los Complejos:

1 La suma de define de la siguiente manera:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

- 2 El producto:
  - Recordamos que  $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} (a+bi)\cdot(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad+bc)i \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

# Cumple con los axiomas de cuerpo:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos.
- El producto es distributivo con respecto a la suma
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto
- Todo número complejo z tiene un opuesto -z
- Todo número complejo z distinto de  $\theta$  tiene un inverso  $z^{-1}$

### Inverso de un número complejo:

Dado un número complejo z=a+bi, se define su conjugado como  $\overline{z}=a-bi$ 

Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , se cumple que:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Además notamos que si z = a + bi entonces:

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2 + b^2$$

Por lo tanto  $z \cdot \overline{z} \ge 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \ \ \text{y es igual a } 0 \Leftrightarrow z = 0.$ 

#### Definición 1.0:

Si  $z \in \mathbb{C}$ , el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

si 
$$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces:

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)}$$
$$= z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$$
$$= |z|^2 \cdot |w|^2$$

por lo tanto  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ 

#### Definición 1.1:

Sea  $z=a+bi\,\,,a,b\in\mathbb{C},z\neq0.$  El inverso de un número complejo z=a+bi es:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Notación: Si  $z,w\in\mathbb{C}\;$  y  $w\neq 0$ ,  $\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$ 

### Ejemplo 1.1:

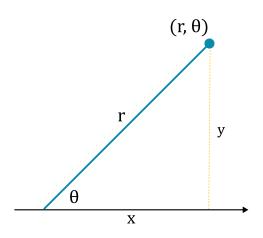
Calculamos el inverso de los números complejos 2-3i ,3i y  $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 

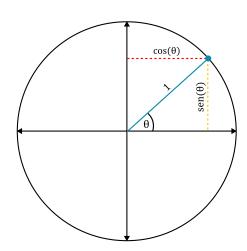
$$(2-3i)^{-1} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$
$$(3i)^{-1} = -\frac{3i}{9} = -\frac{1}{3}i$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

# Coordenadas polares:

En lugar de describir un punto en e plano por sus coordenadas con respecto a dos ejees perpendiculares, podemos describirlo como sigue. Trazamos una recta entre el punto y un origen dado. El ángulo con el que esta recta corta la horizontal y la distancia entre el punto y el origen determinan nuestro punto.

Asi entonces el punto se describe por un par de números  $(r,\theta)$  que constituyen sus coordenadas polares.





Si tenemos nuestros ejes usuales y  $x \in y$  son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, entonces vemos que:

$$\frac{x}{r} = \cos(\theta)$$
 y  $\frac{y}{r} = \sin(\theta)$ 

de donde

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$
 y  $y = r \cdot \sin(\theta)$ 

Esto nos permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Si trasladamos esto al mundo de los complejos, recordamos que si  $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$  entonces  $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ , ahora si consideramos z=a+bi con |z|=1, es decir:

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabemos por conceptos de trigonometría, especificamente las identidades pitagóricas, que:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Entonces existe un número  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que:

$$a = \cos(\theta), \ b = \sin(\theta)$$

Luego  $z = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$ 

Ahora si consideramos un número complejo z = a + bi cualquiera, no nulo, se cumple que:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$$

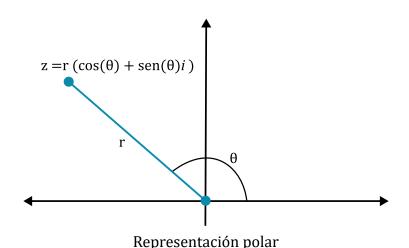
Dado que el número complejo  $\frac{z}{|z|}$  tiene módulo 1, se sigue que es de la forma  $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$  Luego podemos representar a z como:

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

Por lo tanto, todo número complejo no nulo puede escribirse en su forma polar

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

donde estas expresiones están relacionadas por  $a=r\cdot\cos(\theta)$  y  $b=r\cdot\sin(\theta)$ ; geométricamente hablando, r=|z| representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y  $\theta$  es la medida <u>en redianes</u> del ángulo entre el eje real  $(\mathfrak{R})$  y la semi recta con origen en 0, que pasa por z, tomando el sentido antihorario.



Ejemplo:

• El número complejo z=1-i tiene modulo  $\sqrt{2}$ , entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$1 - i = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)}_{r} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\sin(\theta)}i\right)$$

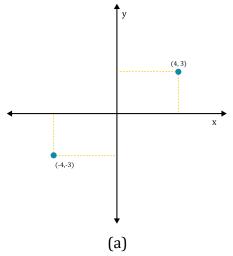
Luego el argumento de z es  $\theta=\frac{7}{4}\pi$  y podemos escribir:

$$z = 1 - i$$

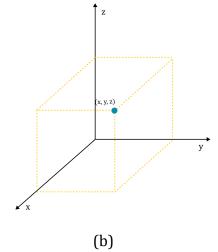
$$= \sqrt{2} \cdot \left( \cos \left( \frac{7\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{7\pi}{4} \right) i \right)$$

# 1 Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ :

Se puede utilizar una túpla (x,y) para representar un punto en el <u>plano</u>, asi también una tripla (x,y,z) para representar un punto en el espacio, tambíen suele usarse la notación  $(x_1,x_2,x_3)$ 



Representación de puntos en el plano



Representación de puntos en el espacio

### Definición:

Sea  $\mathbb R$  el cuerpo de los números reales,entonces

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, x_2, ..., x_n): x_i \in \mathbb{R} \land 1 \leq i \leq n\}$$

Todo v en  $\mathbb{R}^n$  será llamado *punto* (vector en el origen o simplemente vector). La mayoría de nuestros ejemplos tendrán lugar cuanto n=2 o n=3; para ello usaremos el *sistemas de coordenadas cartesianas* para representar los elementos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

## Suma en $\mathbb{R}^n$ :

Si  $(x_1,...,x_n)$ ,  $(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}$ , se define:

$$(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)\coloneqq (x_1+y_1,...,x_n+y_n)$$

En otras palabras, la suma es coordenada a coordenada

### Propiedades:

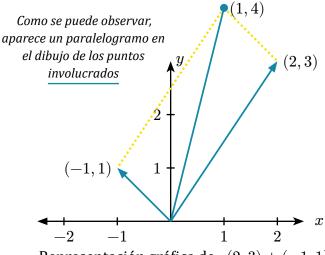
La suma de vectores en  $\mathbb{R}^n$  satisface que:

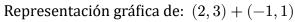
- 1 Es asociativa
  - $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$
- 2 Es conmutativa
  - $v+w=w+v, \forall v,w\in\mathbb{R}^n$

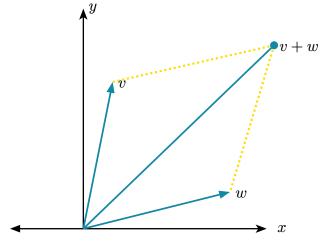
- 3 El vector 0 := (0, ..., 0), es el *elemento neutro* 
  - $v+0=0+v=v, \forall v \in \mathbb{R}^n$
- 4 El vector  $-v = (-x_1, \dots x_n)$  es el opuesto de
  - $v = (x_1, ...x_n)$
  - v + (-v) = (-v) + v = 0

# Ley del paralelogramo

Sea v = (2,3) y w = (-1,1), entonces v + w = (1,4)



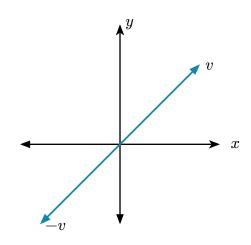




Representación general de: v + w

# El opuesto de un vector

El opuesto de un vector v en el <u>plano</u> es -v y geometricamente es el vector reflejado respecto al centro.

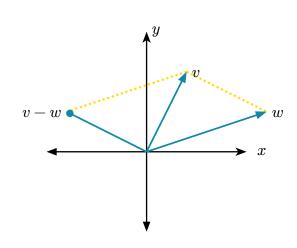


### Resta de vectores

Dados dos vectores v, w en el plano, podemos representar la resta como la suma de v más el opuesto de w, es decir:

$$v-w\coloneqq v+(-w)$$

Como (v-w)+w=v, la ley del paralelogramo también es útil para representar geométricamente la resta



# Producto de un vector por un escalar

Sea  $v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$  y  $\lambda\in\mathbb{R}$ , entonces:

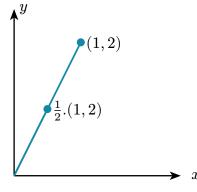
$$\lambda . v = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

También denotamos a esta multiplicación por  $\lambda v$ 

### Ejemplo:

Si v=(1,2) y  $\lambda=\frac{1}{2}$ , entonces:

$$\lambda v = \left(\frac{1}{2} \cdot 1, \frac{1}{2} \cdot 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$



Representación de  $\lambda.v$ 

# **Propiedades**

La multiplicación por escalares satisface que:

1 Es asociativa:

 $(\lambda \mu)v = \lambda(\mu v), \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 

3 Existencia del opuesto:

 $(-1)v = -v, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$ 

2 Es distributiva:

 $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w, \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 

A continuación se introducirá un concepto <u>fundamental</u> para los temas sub-siguientes:

## Combinación Lineal

Sean  $v_1,...,v_k$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ 

Una  $\emph{combinaci\'on lineal}$  de  $v_1,...,v_k$  es un  $\underline{\text{vector}}$  de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

donde  $\lambda_1,...,\lambda_k$  son números reales.

#### Ejemplo:

Sean  $v_1=(1,2,3), v_2=(-1,3,0), v_3=(-1,0,1)$  y  $v_4=(-2,-1,-3)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ 

**Entonces:** 

$$\begin{split} v &= 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - 5v_4 \\ &= 2(1,2,3) - 3(-1,3,0) + 4(-1,0,1) - 5(-2,-1,-3) \\ &= (2,4,6) + (3,-9,0) + (-4,0,4) + (10,5,15) \\ &= (11,0,25) \end{split}$$

Es una combinación lineal de  $v_1,v_2,v_3,v_4$ .

### Base canónica

Dado  $i \in \{1,...,n\}$ , se denota  $e_i \in \mathbb{R}^n$  al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada i-ésima que es 1.

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

El conjunto  $\{e_1,...,e_n\}$  se llama base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

### Ejemplo:

En  $\mathbb{R}^3$  los vectores son  $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ , estos vectores son fundamentales para la materia.

# Propiedad

Todo vector de  $\mathbb{R}^n$  se escribe como *combinación lineal* de la base canónica.

$$(x_1,...,x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

### Ejemplo:

$$\begin{split} (1,2,3) &= (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3) \\ &= 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) \\ &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{split}$$