

Πάλλης

Παναγιώτης

P3351816

Παρέε

Numerical optimization and large
scale linear algebra

Exercise 3

Link Farms

a) 0 transition matrix G επίσης προσθέσουμε
μία σελίδα :

$$G = \alpha P + \frac{1-\alpha}{n+1} I$$

$$\tilde{\pi} = \pi G$$

$$\tilde{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n+1})$$

$$\pi_{n+1} \begin{bmatrix} \alpha P_{11} & \dots & \alpha P_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha P_{n+1,1} & \dots & \alpha P_{n+1,n+1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{n+1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1-\alpha}{n+1} \end{bmatrix} =$$

(1)

$$= (\pi_1 \alpha P_{1,1} + \pi_2 \alpha P_{1,2} \dots \pi_{n+1} \alpha P_{n+1,1}, \pi_1 \alpha P_{2,1} + \dots + \pi_{n+1} \alpha P_{n+1,2}, \\ \dots \pi_1 \alpha P_{1,n+1} + \pi_2 \alpha P_{2,n+1} + \dots \pi_{n+1} \alpha P_{n+1,n+1}) + \\ \left(\pi_1 \left(\frac{1-\alpha}{n+1} \right), \pi_2 \left(\frac{1-\alpha}{n+1} \right) \dots, \pi_{n+1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1} \right) \right) =$$

$$\cancel{\pi_1 \alpha P_{1,1}} + \dots + \pi_{n+1} \alpha P_{n+1,n+1} \\ = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i P_{i,n+1} + \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i$$

Η σελίδα $P_{i,n+1}$ θα έχει παντού μηδενικά
εφόσον ο ντος κόμβος δεν έχει links
από και προς τη σελίδα. Η μόνη σελή
που θα διαφέρει του μηδενός θα είναι στη
θέση $n+1$ και θα ισούται με 1.

Επομένως στον τύπο

$$\tilde{\pi}_{n+1} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i p_{i,n+1} + \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i$$

στο ~~απ~~ διωμένο $\pi_i p_{i,n+1} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n+1}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \pi_{n+1}$

$$\text{Αρα } \underbrace{\tilde{\pi}_{n+1}}_X = \underbrace{\alpha \pi_{n+1}}_X + \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \Rightarrow$$

$$\pi_{n+1} - \alpha \pi_{n+1} = \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \Rightarrow \pi_{n+1}(1-\alpha) = \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \quad \Rightarrow X = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i$$

εφόσον $\sum_{i=1}^{n+1} \pi_i = 1$ (πιθανότητες)

$$X = \frac{1}{n+1} \quad \text{για πολύ μεγάλο } n, \text{ το } X \rightarrow 0$$

Αρα η νέα σελίδα που προστέθηκε δεν επηρεάζει τα ~~πραγματο~~ των υπολοίπων, κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς δεν συνδέεται με καμία από αυτές.

$$b) y = \tilde{\pi}_{n+q} = \alpha \sum_{i=1}^{n+q} \pi_i P_{i,n+q} + \frac{1-\alpha}{n+q} \sum_{i=1}^{n+q} \pi_i$$

Με κανένα in-link σελίδα y
 αλλά με out-links από την y στη x ,
 η σελίδα $P_{i,n+q}$ θα έχει μόνο μηδενικά.

$$\text{Αρα } y = \tilde{\pi}_{n+q} = \frac{1-\alpha}{n+q} \sum_{i=1}^{n+q} \pi_i = \frac{1-\alpha}{n+q}$$

Το pagerank της x θα μεταβληθεί καθώς
 πλέον η y δείχνει στην x

$$x = \tilde{\pi}_{n+1} = \cancel{\frac{1-\alpha}{n+1}} \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i P_{i,n+1} + \frac{1-\alpha}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i =$$

$$= \frac{1-\alpha}{n+1} + \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i P_{i,n+1} = \frac{1-\alpha}{n+1} + \alpha x + \alpha y$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_{n+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ομως ~~$y = \frac{1+\alpha}{n+2}$~~ $y = \frac{1-\alpha}{n+2}$

Αρα
$$X = \frac{1-\alpha}{n+2} + \cancel{12\alpha} \alpha X + \alpha \left(\frac{1-\alpha}{n+2} \right) \Rightarrow (1-\alpha)X = \frac{1-\alpha}{n+2} + \alpha \left(\frac{1-\alpha}{n+2} \right)$$

$$\Rightarrow X = \frac{1+\alpha}{n+2}$$

Πριν απο την δημιουργια της y το

$X = \frac{1}{n+1} < \frac{1+\alpha}{n+2}$ εστω επιπλεως το pagerank της X θελωθωθηκε.

α) Για να μεγιστοποιηθει το PageRank του X θα πρεπει να εχει in-links απο αλλες σελιδες και κανενα outlink.

Εστω σελιδες ~~y, z~~ που ~~δεν~~ εχουν outlink στην X οτε ~~$y = z = \frac{1-\alpha}{n+2}$~~ $y = z = \frac{1-\alpha}{n+2}$

$$X = \frac{1+\alpha}{n+2}$$

δ) Προσθέτοντας links στη σελίδα X, αυξάνουμε τα outlinks επομένως μειώνουμε το pagerank, καθώς ένα μέρος του θα μοιράζεται με τις σελίδες που δείχνει. Προσθέτοντας outlinks από τις y, z πάλι μειώνεται το pagerank της X γιατί ενώ στην X είχαν σημαντικές σελίδες (y, z) με αποκλειστικότητα, πλέον οι y και z δεν δείχνουν μόνο στην X κάνοντας την λιγότερο σημαντική.

ε) Για να αυξηθεί το pagerank της X θα πρέπει όπως είπαμε η X να μην έχει outlinks ώστε να μην μοιράζεται το rank της με κανέναν, και να δείχνουν στην X σελίδες με υψηλό pagerank, ~~δηλαδή να μην έχει outlinks~~