

HW 6

(1)

J =

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$

$A - 3I \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)w_1 = w_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(A - 3I)w_2 = w_1 \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow (A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$C$        $J$        $C^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = \{2, 2, 0, 0\}$$

$$\lambda = 2 \rightarrow A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)w_2 = w_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0 \rightarrow A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 0I)w_4 = w_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_4 = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow w_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right]$$

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 1/2 & -1/4 & -1 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right]$$

⑤ a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{-1, 1, 2\}$$

$$\lambda = -1 \rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda=2 \rightarrow A-2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = S e^{Dt} S^{-1} X_0$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & -\sqrt{3} & 7/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^t & e^{2t} \\ 0 & 2e^t & 3e^{2t} \\ e^{-t} & e^t & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + 3e^t \\ 2e^t \\ 2e^{-t} + e^t \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2e^{-t} + 3e^t$$

$$x_2 = 2e^t$$

$$x_3 = 2e^{-t} + e^t$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{1, 2, 2\}$$

$$\lambda=2 \rightarrow A-2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)v_2 = v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -15/4 \\ -5/4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/2 & -13/2 & 5/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$C \qquad e^{jt} \qquad C^{-1} \qquad X_0$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -3e^{2t} & -3te^{2t} - 15e^{2t} & -4e^t \\ -e^{2t} & -te^{2t} - 5e^{2t} & -e^t \\ 2e^{2t} & 2te^{2t} + 8e^{2t} & 3e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -36e^{2t} + 9te^{2t} + 45e^{2t} - 4e^t \\ -12e^{2t} + 3te^{2t} + 15e^{2t} - e^t \\ 24e^{2t} - 6te^{2t} - 24e^{2t} + 3e^t \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x_1 = 9te^{2t} + 9e^{2t} - 4e^{-t}$$

$$x_2 = 3te^{2t} + 3e^{2t} - e^{-t}$$

$$x_3 = 26te^{2t} + 13e^{-t} + 3e^t$$