Blatt 1

T1

$\Pr[ABC] = 1/3$
$\Pr[ACB] = 0$
$\Pr[BAC] = 0$
$\Pr[BCA] = 1/3$
$\Pr[CAB] = 1/3$
$\Pr[CBA] = 0$

T2

$$\begin{aligned}\Pr[\text{Agathe gewinnt}] = \Pr[\text{Zahl kommt bei ungeradem Wurf}] &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} * (1-p) \\ &= (1-p) * \sum_{i=0}^{\infty} p^i \\ &= (1-p) * \frac{p}{1-p} \\ &= p\end{aligned}$$

Anwending der Konvergenz der geometrischen Reihe gegen $\frac{p}{1-p}$ für $|p| < 1$.

$$\Pr[\text{Balthasar gewinnt}] = 1 - \Pr[\text{Agathe gewinnt}] = 1 - p$$

Das Spiel ist genau dann fair, wenn $p = 1 - p \Leftrightarrow p = 0.5$.

T3

(a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Blaubeermuffin keine Blaubeere enthält, ist $(\frac{m-1}{m})^n$, also die Wahrscheinlichkeit, dass für jede Blaubeere ein Muffin gewählt wird, der nicht der i-te ist.

(b)

$\Pr[\text{Alle echt}]$
$= 1 - \Pr[\text{Mindestens einer nicht echt}]$
$= 1 - \Pr[\bigcup_{i=0}^{m} \text{i nicht echt}]$
$= 1 - (m * (\frac{m-1}{m})^n - \text{m over } 2 * (\frac{m-2}{m})^n + \text{m over } 3 * (\frac{m-3}{m})^n - \dots$
$= 1 - (\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} * \text{m over i} * (\frac{m-i}{m}))^n)$

(c)

Using Klong.

```
.l("nstat")
ame::{[n m];m::x;n::y;1-+/{((-1)^1+x)*kc(x;m)*((m-x)%m)^n}'1+!m}
{ame(6;x)<0.9}{x+1}:~0
```

23

H1

(a)

Using Klong.

```
#flr({(0=x!4)|0=x!9};1+!150)
```

49

$\frac{49}{150} \approx 32.67\%$

(b)

Falls die Quersumme größer als 3 ist, kann keine der Ziffern größer als 3 sein. Damit kommen nur die Zahlen 1, 2, 3, 10, 11, 12, 20, 21, 30, 100, 101, 102, 110, 111 und 120 in Frage, insgesamt 16 Zahlen.

$\frac{16}{150} \approx 10.67\%$

H2

$$\Pr[E_n] = \begin{cases} \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls n gerade} \\ \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Begründung: $\frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = 2 * \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n}$, und $\frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.
Da alle Ereignisse disjunkt sind, kann man einfach addieren und sieht:

$$\Pr[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$$

H3

$$\Pr[\text{keiner bekommt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - \Pr[\text{irgendeiner bekommt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - \bigcup_{n\in S} \Pr[\text{n kriegt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{1\leq i_1 \leq i_2 \leq n} \frac{1}{n} * \frac{1}{n-1} + \sum \ldots) =$$

$$1-(n*\frac{1}{n}-\text{n over }2*\frac{(n-2)!}{n!}+\text{n over }3*\frac{(n-3)!}{n!}\ldots)=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}\text{n over k})=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}*\frac{n!}{(n-k)!*k!})=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!})=$$

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Für $n\to\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der unendlich vielen Studierenden sein eigenes Blatt zurückbekommt, ist also $1-\frac{1}{e}\approx 0.632$.

H4

(a)

Annahme: Wenn hier "in die n-te U-Bahn" geschrieben wird, ist damit gemeint, dass sie in alle vorher nicht einsteigen konnte, man berechnet also die Wahrscheinlichkeit, dass sie "genau in die n-te U-Bahn" einsteigt.

Pr[Agathe kann in die n-te U-Bahn einsteigen] $=\frac{1}{n*(n+1)}$

(b)

Pr[Agathe steigt spätestens in die n-te U-Bahn ein] $=$
$1-$ Pr[Agathe steigt in die $n+1$-ste U-bahn ein] $=1-\frac{1}{n+1}$