

Blatt 1

T1

$$\begin{aligned}\Pr[ABC] &= 1/3 \\ \Pr[ACB] &= 0 \\ \Pr[BAC] &= 0 \\ \Pr[BCA] &= 1/3 \\ \Pr[CAB] &= 1/3 \\ \Pr[CBA] &= 0\end{aligned}$$

T2

$$\begin{aligned}\Pr[\text{Agathe gewinnt}] &= \Pr[\text{Zahl kommt bei ungeradem Wurf}] = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} * (1-p) \\ &= (1-p) * \sum_{i=0}^{\infty} p^i \\ &= (1-p) * \frac{p}{1-p} \\ &= p\end{aligned}$$

Anwendung der Konvergenz der geometrischen Reihe gegen $\frac{p}{1-p}$ für $|p| < 1$.

$$\Pr[\text{Balthasar gewinnt}] = 1 - \Pr[\text{Agathe gewinnt}] = 1 - p$$

Das Spiel ist genau dann fair, wenn $p = 1 - p \Leftrightarrow p = 0.5$.

T3

(a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der i -te Blaubeermuffin keine Blaubeere enthält, ist $(\frac{m-1}{m})^n$, also die Wahrscheinlichkeit, dass für jede Blaubeere ein Muffin gewählt wird, der nicht der i -te ist.

(b)

$$\begin{aligned}\Pr[\text{Alle echt}] &= 1 - \Pr[\text{Mindestens einer nicht echt}] \\ &= 1 - \Pr[\bigcup_{i=1}^m \text{i nicht echt}] \\ &= 1 - (m * (\frac{m-1}{m})^n - \text{m over } 2 * (\frac{m-2}{m})^n + \text{m over } 3 * (\frac{m-3}{m})^n - \dots \\ &= 1 - (\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} * \text{m over } i * (\frac{m-i}{m})^n)\end{aligned}$$

(c)

Using Klong.

```
.l(" nstat")
ame:: { [ n m];m::x;n::y;1-+/{((-1)^1+x)*kc(x;m)*((m-x)%m)^n}'1+!m}
{ame(6;x)<0.9}{x+1}:~0
```

23

H1

(a)

Using Klong.

```
#flr ({(0=x!4)|0=x!9};1+!150)
```

49

$$\frac{49}{150} \approx 32.67\%$$

(b)

Falls die Quersumme größer als 3 ist, kann keine der Ziffern größer als 3 sein. Damit kommen nur die Zahlen 1, 2, 3, 10, 11, 12, 20, 21, 30, 100, 101, 102, 110, 111 und 120 in Frage, insgesamt 16 Zahlen.

$$\frac{16}{150} \approx 10.67\%$$

H2

$$\Pr[E_n] = \begin{cases} \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Begründung: $\frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = 2 * \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n}$, und $\frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.
Da alle Ereignisse disjunkt sind, kann man einfach addieren und sieht:

$$\Pr[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$$

H3

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{keiner bekommt seine eigene Abgabe}] = \\ & 1 - \Pr[\text{irgendeiner bekommt seine eigene Abgabe}] = \\ & 1 - \bigcup_{n \in S} \Pr[n \text{ kriegt seine eigene Abgabe}] = \\ & 1 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \frac{1}{n} * \frac{1}{n-1} + \sum \dots \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - \left(n * \frac{1}{n} - n \text{ over } 2 * \frac{(n-2)!}{n!} + n \text{ over } 3 * \frac{(n-3)!}{n!} \dots \right) = \\
1 - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} n \text{ over } k \right) = \\
1 - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} * \frac{n!}{(n-k)! * k!} \right) = \\
1 - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) = \\
1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der unendlich vielen Studierenden sein eigenes Blatt zurückbekommt, ist also $1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$.

H4

(a)

Annahme: Wenn hier "in die n -te U-Bahn" geschrieben wird, ist damit gemeint, dass sie in alle vorher nicht einsteigen konnte, man berechnet also die Wahrscheinlichkeit, dass sie "genau in die n -te U-Bahn" einsteigt.

$$\Pr[\text{Agathe kann in die } n\text{-te U-Bahn einsteigen}] = \frac{1}{n * (n+1)}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{Agathe steigt spätestens in die } n\text{-te U-Bahn ein}] = \\
1 - \Pr[\text{Agathe steigt in die } n+1\text{-ste U-bahn ein}] = 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Blatt 2

T1

(a)

Da $6 \text{ over } 2 = 15$, gibt es 15 Möglichkeiten, die erste Gruppe zu bilden. Daraufhin kann man aus den übrigen 4 Personen noch $4 \text{ over } 2 = 6$ Gruppen bilden, und dann bleiben noch 2 Leute übrig, die die letzte Gruppe bilden. Da aber hier die Gruppen durchnummeriert wurden, das in der gegebenen Aufgabe aber nicht der Fall ist, wird durch $3!$, als die Anzahl der möglichen Anordnung der Gruppen, geteilt. Die Anzahl der Möglichkeiten, 6 Personen in Zweiergruppen einzuteilen, ist also $\frac{6 \text{ over } 2 * 4 \text{ over } 2}{3!} = \frac{15 * 6}{6} = 15$.

(b)

Für die erste Studentin gibt es 3 Möglichkeiten, einem Studenten zugeordnet zu werden. Für die zweite gibt es dann noch 2 Studenten, denen sie zugeordnet werden kann, und für die dritte ist es dann fix.

Damit gibt es $3 * 2 = 6$ Möglichkeiten, die Lerngruppen gemischt zu machen, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lerngruppe gemischt ist, ist $\frac{6}{15} = 0.4$.

(c)

$$\begin{aligned}\Pr[\text{alle gemischt} | A \& D] &= \\ 1 - \Pr[\text{keine gemischt} | A \& D] &= \\ 1 - \frac{1}{\frac{4 \text{ over } 2!}{2 * 2 \text{ over } 2}} &= \\ 1 - \frac{1}{3} &\approx \\ 0.667\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Pr[(A \& D \cup B \& C) \cap \text{alle gemischt}] &= \\ \Pr[A \& D \cap \text{alle gemischt}] &= \\ \Pr[A \& D] * \Pr[\text{alle gemischt} | A \& D] &= \\ \frac{\frac{4 \text{ over } 2!}{15} * \frac{2}{3}}{\frac{6}{15} * \frac{2}{3}} &= \\ \Pr[A \& D \cup B \& C] * \Pr[\text{alle gemischt}] &= \end{aligned}$$

T2

Blatt 6

T1

$$X = 99 * X_b$$

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1 + \delta}}\right)^\mu$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^\mu \leq \frac{1}{100} \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{1}{100} \\
\Leftrightarrow & \frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \leq \frac{1}{10^8} \\
\Leftrightarrow & e^\delta * 10^8 \leq (1+\delta)^{1+\delta}
\end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^\mu \leq \frac{1}{100} \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{100} \\
\Leftrightarrow & \frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \leq \frac{1}{10^8} \\
\Leftrightarrow & e^\delta * 10^8 \leq (1+\delta)^{1+\delta}
\end{aligned}$$