Blatt 1

T1

$\Pr[ABC] = 1/3$
$\Pr[ACB] = 0$
$\Pr[BAC] = 0$
$\Pr[BCA] = 1/3$
$\Pr[CAB] = 1/3$
$\Pr[CBA] = 0$

T2

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{Agathe gewinnt}] = \Pr[\text{Zahl kommt bei ungeradem Wurf}] &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} * (1-p) \\
&= (1-p) * \sum_{i=0}^{\infty} p^i \\
&= (1-p) * \frac{p}{1-p} \\
&= p
\end{aligned}$$

Anwending der Konvergenz der geometrischen Reihe gegen $\frac{p}{1-p}$ für $|p| < 1$.

$$\Pr[\text{Balthasar gewinnt}] = 1 - \Pr[\text{Agathe gewinnt}] = 1 - p$$

Das Spiel ist genau dann fair, wenn $p = 1 - p \Leftrightarrow p = 0.5$.

T3

(a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Blaubeermuffin keine Blaubeere enthält, ist $(\frac{m-1}{m})^n$, also die Wahrscheinlichkeit, dass für jede Blaubeere ein Muffin gewählt wird, der nicht der i-te ist.

(b)

$\Pr[\text{Alle echt}]$
$= 1 - \Pr[\text{Mindestens einer nicht echt}]$
$= 1 - \Pr[\bigcup_{i=0}^{m} \text{i nicht echt}]$
$= 1 - (m * (\frac{m-1}{m})^n - \binom{m}{2} * (\frac{m-2}{m})^n + \binom{m}{3} * (\frac{m-3}{m})^n - \dots$
$= 1 - (\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} * \binom{m}{i} * (\frac{m-i}{m}))^n)$

(c)

Using Klong.

```
.l("nstat")
ame::{[n m];m::x;n::y;1-+/{((-1)^1+x)*kc(x;m)*((m-x)%m)^n}'1+!m}
{ame(6;x)<0.9}{x+1}:~0
```

23

H1

(a)

Using Klong.

```
#flr({(0=x!4)|0=x!9};1+!150)
```

49

$\frac{49}{150} \approx 32.67\%$

(b)

Falls die Quersumme größer als 3 ist, kann keine der Ziffern größer als 3 sein. Damit kommen nur die Zahlen 1, 2, 3, 10, 11, 12, 20, 21, 30, 100, 101, 102, 110, 111 und 120 in Frage, insgesamt 16 Zahlen.

$\frac{16}{150} \approx 10.67\%$

H2

$$\Pr[E_n] = \begin{cases} \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls n gerade} \\ \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Begründung: $\frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = 2 * \frac{1}{3} * \frac{1}{2^n}$, und $\frac{1}{3} * \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.
Da alle Ereignisse disjunkt sind, kann man einfach addieren und sieht:

$$\Pr[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$$

H3

$$\Pr[\text{keiner bekommt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - \Pr[\text{irgendeiner bekommt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - \bigcup_{n \in S} \Pr[\text{n kriegt seine eigene Abgabe}] =$$

$$1 - (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \frac{1}{n} * \frac{1}{n-1} + \sum \ldots) =$$

$$1-(n*\frac{1}{n}-\binom{n}{2}*\frac{(n-2)!}{n!}+\binom{n}{3}*\frac{(n-3)!}{n!}\dots)=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}\binom{n}{k})=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}*\frac{n!}{(n-k)!*k!})=$$

$$1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!})=$$

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Für $n \to \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der unendlich vielen Studierenden sein eigenes Blatt zurückbekommt, ist also $1-\frac{1}{e}\approx 0.632$.

H4

(a)

Annahme: Wenn hier "in die n-te U-Bahn" geschrieben wird, ist damit gemeint, dass sie in alle vorher nicht einsteigen konnte, man berechnet also die Wahrscheinlichkeit, dass sie "genau in die n-te U-Bahn" einsteigt.

Pr[Agathe kann in die n-te U-Bahn einsteigen] $=\frac{1}{n*(n+1)}$

(b)

Pr[Agathe steigt spätestens in die n-te U-Bahn ein] =
$1-$ Pr[Agathe steigt in die $n+1$-ste U-bahn ein] $=1-\frac{1}{n+1}$

Blatt 2

T1

(a)

Da $\binom{6}{2}=15$, gibt es 15 Möglichkeiten, die erste Gruppe zu bilden. Daraufhin kann man aus den übrigen 4 Personen noch $\binom{4}{2}=6$ Gruppen bilden, und dann bleiben noch 2 Leute übrig, die die letzte Gruppe bilden. Da aber hier die Gruppen durchnummeriert wurden, das in der gegebenen Aufgabe aber nicht der Fall ist, wird durch 3!, als die Anzahl der möglichen Anordnung der Gruppen, geteilt. Die Anzahl der Möglichkeiten, 6 Personen in Zweiergruppen einzuteilen, ist also $\frac{\binom{6}{2}*\binom{4}{2}}{3!}=\frac{15*6}{6}=15$.

(b)

Für die erste Studentin gibt es 3 Möglichkeiten, einem Studenten zugeordnet zu werden. Für die zweite gibt es dann noch 2 Studenten, denen sie zugeordnet werden kann, und für die dritte ist es dann fix.

Damit gibt es $3*2 = 6$ Möglichkeiten, die Lerngruppen gemischt zu machen, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lerngruppe gemischt ist, ist $\frac{6}{15} = 0.4$.

(c)

$$\begin{gathered}
\text{Pr[alle gemischt}|\text{A\&D}] = \\
1 - \text{Pr[keine gemischt}|\text{A\&D}] = \\
1 - \frac{1}{\frac{\binom{4}{2}*\binom{2}{2}}{2!}} = \\
1 - \frac{1}{3} \approx \\
0.667
\end{gathered}$$

(d)

$$\begin{gathered}
\Pr[(A\&D \cup B\&C) \cap \text{alle gemischt}] = \\
\Pr[A\&D \cap \text{alle gemischt}] = \\
\Pr[A\&D] * \Pr[\text{alle gemischt}|A\&D] = \\
\frac{\frac{\binom{4}{2}}{2!}}{15} * \frac{2}{3} = \frac{12}{45} = \\
\frac{6}{15} * \frac{2}{3} = \\
\Pr[A\&D \cup B\&C] * \Pr[\text{alle gemischt}]
\end{gathered}$$

T2

Blatt 6

T1

$X = 99 * X_b$

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
& (\tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^\mu \le \tfrac{1}{100} \\
\Leftrightarrow\ & (\tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^{\frac{1}{4}} \le \tfrac{1}{100} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \le \tfrac{1}{10^8} \\
\Leftrightarrow\ & e^\delta * 10^8 \le (1+\delta)^{1+\delta}
\end{aligned}
$$

Und:

$$
\begin{aligned}
& (\tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^\mu \le \tfrac{1}{100} \\
\Leftrightarrow\ & (\tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^{\frac{3}{4}} \le \tfrac{1}{100} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \le \tfrac{1}{10^8} \\
\Leftrightarrow\ & e^\delta * 10^8 \le (1+\delta)^{1+\delta}
\end{aligned}
$$