บทที่ 4

ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of Functions)

นิยาม 4.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มี D เป็นโดเมน และ $x \in D$ แล้ว เราจะเรียก f(x) ว่า **ค่าของฟังก์ชัน** f ณ จุด x

เช่นให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า $f(x) = 2x - 3$ ค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด 2 คือ

$$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าสู่ a เราจะเขียนสัญลักษณ์แทนว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ หมายถึงแนวโน้มของค่าของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a แต่ไม่ถึง a

เช่นให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

จากนิยามของ f จะเห็นว่า $f(x) = x$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $f(1) = 2$ เมื่อ $x = 1$

หรือถ้า x เข้าใกล้ 1 แต่ไม่ถึง 1 ค่า f(x) เข้าใกล้ 1

นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ f เข้าสู่ 1 มีค่าเข้าสู่ 1

ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนว่า $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด 1 ไม่จำเป็นต้องเท่ากับค่าของลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าสู่ 1

นิยาม 4.2 ให้ a, $A \in R$ ลิมิติของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าสู่ a มีค่าเข้าสู่ A ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนว่า $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ กำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ ขึ้นมาไม่ว่าจะมีค่าน้อยเพียงใดก็ตามเราสามารถหาค่าจำนวนบวกอีกตัวหนึ่ง δ โดยที่ $|f(x) - A| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในโดเมนของ f ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $0 < |x - a| < \delta$

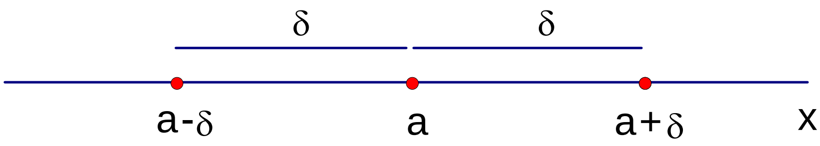
ผู้ให้นิยามของลิมิตแบบนี้คือ **Cauchy** นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ซึ่งเกิดในปี ค.ศ. 1787

ในนิยามที่เขียนว่า $0 < |x - a|$ หมายความว่า $x \neq a$

และ $|x - a| < \delta$ แสดงว่า

$$a - \delta < x < a + \delta \quad \text{หรือ} \quad x \in (a - \delta, x + \delta)$$

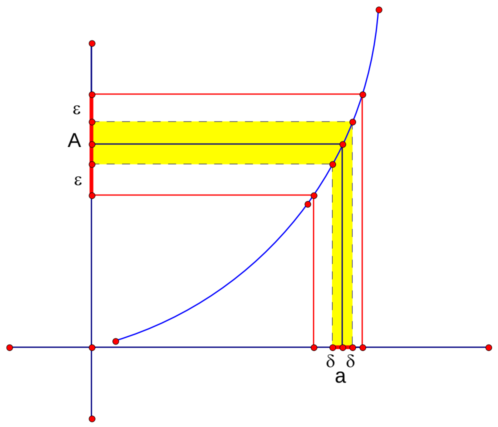
ที่เขียนว่า $0 < |x - a| < \delta$ หมายความว่า $x \in (a - \delta, x + \delta)$ และ $x \neq a$



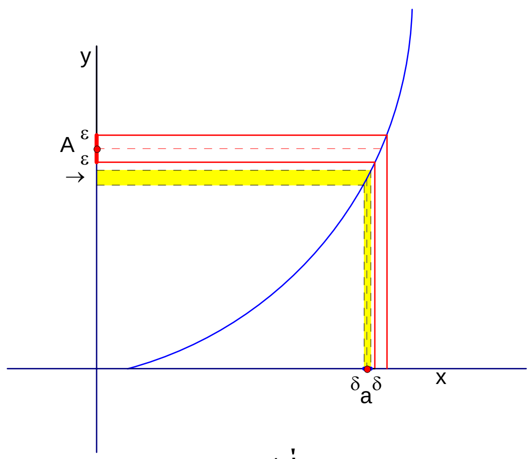
รูปที่ 4.1

x ซึ่งสอดคล้องกับ $0 < |x - a| < \delta$

และที่เขียนว่า $|f(x) - A| < \varepsilon$ นั่นหมายความว่า $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$



รูปที่ 4.2



รูปที่ 4.3

รูปที่ 4.2 A เป็นลิมิติของ f เมื่อ x เข้าสู่ a หรือ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อเรากำหนด $\varepsilon > 0$ แล้วเราสามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$
ทุก ๆ ค่า x ที่สอดคล้องกับ $0 < |x - a| < \delta$
หรือพูดใหม่ได้ว่า เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ แล้วสามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - A| < \varepsilon$
รูปที่ 4.3 A' ไม่เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าสู่ a ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อเรา กำหนด $\varepsilon > 0$ ขึ้น ดังรูป เราไม่สามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ คุณสมบัติที่ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - A'| < \varepsilon$ ได้

ฉะนั้น การที่เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
เราจะต้องแสดงให้เห็นจริงดังนี้ คือ

ถ้ากำหนดค่า $\varepsilon > 0$ แล้ว เราจะต้องหาค่า $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - A| < \varepsilon$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 4.1 จงแสดงให้เห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1}(2x+7) = 9$

วิธีคิด นั่นคือ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ เราจะต้องหาค่า $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-1| < \delta$ แล้ว $|(2x+7)-9| < \varepsilon$

พิจารณา $|(2x+7)-9|$ จะเห็นว่า $|(2x+7)-9| = |2x-2| = 2|x-1|$

ซึ่ง $2|x-1| < 2\delta$

นั่นคือ $|(2x+7)-9| < 2\delta$ แต่เราต้องการให้ $|(2x+7)-9| < \varepsilon$

นั่นคือ $2\delta = \varepsilon$ ซึ่งจะได้ว่า $\delta = \varepsilon/2$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

ถ้า $0 < |x-1| < \delta$ แล้ว $|(2x+7)-9| < \varepsilon$

ให้ $\delta = \varepsilon/2$

เพราะฉะนั้น $|(2x+7)-9| = |2x-2| = 2|x-1| < 2\delta = 2\varepsilon/2 = \varepsilon$

นั่นคือ $\delta = \varepsilon/2$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-1| < \varepsilon/2$ แล้ว $|(2x+7)-9| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to 1}(2x+7) = 9$$

หมายเหตุ วิธีคิด ไม่ต้องแสดงให้ดู

ตัวอย่าง 4.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$

แนวคิด $\dfrac{x^2-9}{x-3}-6 = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}-6 = x+3-6 = x-3$

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right| = |x-3| < \delta$$

จะต้องเลือก δ ที่ทำให้ $\delta \le \varepsilon$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี δ ซึ่ง $0 < \delta \le \varepsilon$ ที่ทำให้

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ที่ $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right| = |x-3| < \delta \le \varepsilon$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ตัวอย่าง 4.3 จงแสดงให้เห็นว่า $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2+x) = 15$

วิธีคิด ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว

$|2x^2+x-15| < \varepsilon$

พิจารณา $|2x^2+x-15| = |2x-5||x+3|$

เราทราบว่า $|x+3| < \delta$ แต่ยังไม่ทราบว่า $|2x-5| < ?$

ให้ $\delta = 1$ ดังนั้น $|x+3| < 1$ จะได้ว่า

$-1 < x+3 < 1 \quad \rightarrow \quad -2 < 2x+6 < 2$

$\rightarrow \quad -13 < 2x-5 < -9$

$\rightarrow \quad -13 < 2x-5 < 13$

$\rightarrow \quad |2x-5| < 13$

จะเห็นว่า $|2x-5||x+3| < 13\delta$

เพราะฉะนั้นควรเลือก $\delta = \varepsilon/13$ (ต้องการให้ $13\delta = \varepsilon$)

แต่เราเคยกำหนดให้ $\delta = 1$ ดังนั้น ควรเลือก $\delta = \min(1,\varepsilon/13)$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|2x^2 + x - 15| < \varepsilon$

ให้ $\delta = 1$ เพราะฉะนั้น

$|x+3| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < x+3 < 1$

$\rightarrow \quad -2 < 2x+6 < 2$

$\rightarrow \quad -13 < 2x-5 < -9$

$\rightarrow \quad -13 < 2x-5 < 13$

$\rightarrow \quad |2x-5| < 13$

เนื่องจาก $|2x^2+x-15| = |2x-5||x+3|$

เลือก $\delta = \min(1,\varepsilon/13)$

กรณีที่ 1 $1 \le \varepsilon/13$ เพราะฉะนั้น $\delta = 1$

$|2x^2+x-15| = |2x-5||x+3| < 13\,\delta = 13(1) \le 13(\varepsilon/13) = \varepsilon$

กรณีที่ 2 $\varepsilon/13 \le 1$ เพราะฉะนั้น $\delta = \varepsilon/13$

$|2x^2+x-15| = |2x-5||x+3| < 13\,\delta = 13(\varepsilon/13) = \varepsilon$

นั่นคือ $\delta = \min(1,\varepsilon/13)$ ทำให้

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|2x^2+x-15| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x\to-3}(2x^2+x) = 15$

ตัวอย่าง 4.4 จงแสดงให้เห็นว่า $\lim_{x\to1}\frac{3x-5}{2x-1} = -2$

วิธีคิด $\left|\frac{3x-5}{2x-1}-(-2)\right| = \left|\frac{3x-5+4x-2}{2x-1}\right| = \left|\frac{7x-7}{2x-1}\right| = \frac{7|x-1|}{|2x-1|}$

เพราะว่า $|x-1| < \delta$ ให้ $\delta = 1/4$ ซึ่งจะได้ว่า

$-1/4 < x-1 < 1/4 \quad \rightarrow \quad -1/2 < 2x-2 < 1/2$

$\rightarrow \quad 1/2 < 2x - 1 < 3/2$

$\rightarrow \quad |2x - 1| > 1/2$

$\rightarrow \quad \dfrac{1}{|2x-1|} < 2$

ทำให้ $\left|\dfrac{3x-5}{2x-1} - (-2)\right| = \dfrac{7|x-1|}{|2x-1|} < 7(2)\delta$

ซึ่งจะต้องให้ $14\delta = \varepsilon$

ควรเลือก $\delta = \min(1/4, \varepsilon/14)$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x - 1| < \delta$ แล้ว $\left|\dfrac{3x-5}{2x-1} - (-2)\right| < \varepsilon$

ให้ $\delta = 1/4$ ซึ่งจะได้ว่า

$-1/4 < x - 1 < 1/4 \quad \rightarrow \quad -1/2 < 2x - 2 < 1/2$

$\rightarrow \quad 1/2 < 2x - 1 < 3/2$

$\rightarrow \quad |2x - 1| > 1/2$

$\rightarrow \quad \dfrac{1}{|2x-1|} < 2$

เลือก $\delta = \min(1/4, \varepsilon/14)$

$$\left|\frac{3x-5}{2x-1} - (-2)\right| = \left|\frac{3x-5+4x-2}{2x-1}\right| = \left|\frac{7x-7}{2x-1}\right| = \frac{7|x-1|}{|2x-1|} < 7(2)\delta \le \varepsilon$$

นั่นแสดงให้เห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-5}{2x-1} = -2$

แบบฝึกหัด 4.1 จงแสดงให้เห็นว่า

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+5) = 9$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 5x + 9) = 5$
3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + x) = 6$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 3x + 4) = 2$
5. $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 - 3x) = 10$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)(x+3) = 6$
7. $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x} = 3$
8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x-1} = 1$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x-1} = 5/3$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x-2} = -4$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x+1} = 1$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{3x-5} = 4$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{x-3} = 6$

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{x-1} = 3/2$

ทฤษฎีบท 4.1 (Uniqueness of Limits)

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ แล้ว $A = B$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$|f(x) - A| < \varepsilon/2$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta_1$ และ

$|f(x) - B| < \varepsilon/2$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta_2$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า

$0 < |x - a| < \delta_1$ และ $0 < |x - a| < \delta_2$

ซึ่งมีผลทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon/2$ และ $|f(x) - B| < \varepsilon/2$

สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |A - B| &= |(A - f(x)) + (f(x) - B)| \\ &\le |A - f(x)| + |f(x) - B| \\ &= |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $|A - B| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ จำนวน ε นั่นแสดงว่า $|A - B| = 0$ หรือ $A = B$

ทฤษฎีบท 4.2 (Obvious Limit)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ นั่นคือ $f(x) = x$ ทุก ๆ x แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - a| < \varepsilon$

เลือก $\delta = \varepsilon$ จะได้ว่า $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$

ทฤษฎีบท 4.3 (Limit of a Constant)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงที่ นั่นคือ $f(x) = c$ ทุก ๆ x แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = c$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - c| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

เพราะว่า $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

จะเห็นว่า เลือก δ เป็นจำนวนบวกใด ๆ ก็ได้ $|f(x) - c| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x\to a} f(x) = c$

ทฤษฎีบท 4.4 (Limit of a Equal Functions)

สมมุติว่ามีจำนวน $h > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) = g(x)$ ทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < h$ และถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = k$ แล้ว $\lim_{x\to a} g(x) = k$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim_{x\to a} f(x) = k$ ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - k| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta_1$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, h)$

สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า $f(x) = g(x)$ และ $|f(x) - k| < \varepsilon$

ซึ่งทำให้ $|g(x) - k| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim_{x\to a} g(x) = k$

ทฤษฎีบท 4.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี

$\lim_{x\to a} f(x) = F$ แล้ว $\lim_{x\to a} g(x) = G$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = F \pm G$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) + g(x) - (F + G)| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} f(x) = F$ ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - F| < \varepsilon/2$

และเนื่องจาก $\lim_{x\to a} g(x) = G$ ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x) - G| < \varepsilon/2$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - F| < \varepsilon/2$ และ $|g(x) - G| < \varepsilon/2$

ซึ่งทำให้ $|f(x) + g(x) - (F + G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

แสดงว่า $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)=F+G$

และเพราะว่า $|f(x) - g(x) - (F - G)| \le |f(x) - F| + |G - g(x)|$

$= |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

แสดงว่า $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = F - G$

บทแทรก 4.6 ถ้า $f_1, f_2, \ldots f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มี

$\lim_{x\to a} f_1(x) = F_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = F_2$, …, $\lim_{x\to a} f_n(x) = F_n$

แล้ว $\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = F_1 \pm F_2 \pm \ldots \pm F_n$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 5}(x+4)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 5}(x+4) = \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$

$= 5 + 4 = 9$

ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี

$\lim_{x\to a} f(x) = F$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = G$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = FG$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)g(x) - FG| < \varepsilon$

$|f(x)| = |F + (f(x) - F)| \le |F| + |f(x) - F|$

เพราะว่า $\lim_{x\to a} f(x) = F$

เพราะฉะนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - F| < 1$

และจะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1}$

เพราะว่า $\lim_{x\to a} g(x) = G$

เพราะฉะนั้นจะมี $\delta_3 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_3$ แล้ว

$|g(x) - G| < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1}$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

เพราะฉะนั้น ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - F| < 1$,

$|f(x) - F| < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1}$ และ $|g(x) - G| < \dfrac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1}$

เพราะฉะนั้น $f(x)g(x) - FG = f(x)g(x) - Gf(x) + Gf(x) - FG$

$$= f(x)[g(x) - G] + G[f(x) - F]$$

$$|f(x)g(x) - FG| \le |f(x)||g(x) - G| + |G||f(x) - F|$$

$$< (|F| + 1)\frac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1} + G\frac{\varepsilon}{|F| + |G| + 1} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = FG$

บทแทรก 4.8 ถ้า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มี

$\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = F_1, \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = F_2, \ldots, \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = F_n$ แล้ว

$\lim\limits_{x \to a} f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x) = F_1F_2\ldots F_n$

บทแทรก 4.9 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มี $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ และ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แล้ว $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = cF$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 7} 2x^2$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 7} 2x^2 = 2 \lim\limits_{x \to 7} x^2$

$$= 2 \lim_{x \to 7} xx$$

$$= 2 \lim_{x \to 7} x \lim_{x \to 7} x$$

$$= 2(7)(7) = 98$$

บทแทรก 4.10 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

พิสูจน์ จากบทแทรก 4.8 และทฤษฎีบท 4.7

ถ้าให้ $f = f_1 = f_2 = \ldots = f_n$ จะได้ผลตามที่ต้องการ

ทฤษฎีบท 4.11 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$ โดยที่ $G \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$

พิสูจน์ ในตอนแรกจะพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{G}$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{G}\right| < \varepsilon$ ทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$ แล้ว $|g(x)-G| < \frac{|G|}{2}$

เพราะว่า $G = G - g(x) + g(x)$

เพราะฉะนั้น $|G| \leq |G - g(x)| + |g(x)| < \frac{|G|}{2} + |g(x)|$

หรือ $|g(x)| > \frac{|G|}{2}$ ซึ่งสรุปได้ว่า $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|G|}$

และจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x)-G| < \frac{G^2\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

ทุกๆ x ที่ $0 < |x-a| < \delta$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|G|} \text{ และ } |g(x)-G| < \frac{G^2\varepsilon}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G}\right| = \frac{|G-g(x)|}{|G||g(x)|} < \frac{G^2\varepsilon}{2}\frac{2}{|G|} = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{G}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}[f(x)\frac{1}{g(x)}] = F\frac{1}{G} = \frac{F}{G}$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+6}{2x-1}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+6}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 5x+6}{\lim\limits_{x\to 1} 2x-1} = \frac{5(1)+6}{2(1)-1} = 11$

ทฤษฎีบท 4.12 ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)-A| < \varepsilon$

ทุกๆค่า x ที่ $0 < |x-a| < \delta$ และ $||f(x)| - |A|| \leq |f(x)-A| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$

ทฤษฎีบท 4.13 ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ และมี $h > 0$ ที่ทำให้ $f(x) \leq 0$ ทุก ๆ x ที่ $0 < |x-a| < h$ แล้ว $A \leq 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$

ที่ทำให้ $|f(x)-A| < \varepsilon$ ทุกๆค่า x ที่ $0 < |x-a| < \delta_1$

และเนื่องจาก $f(x) \leq 0$ ทุก ๆ x ที่ $0 < |x-a| < h$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, h)$

ทุกๆ x ที่ $0 < |x-a| < \delta$ จะทำให้ $|f(x)-A| < \varepsilon$ และ $f(x) \leq 0$

จะได้ว่า $-\varepsilon < f(x) - A$ และ $f(x) - A \le -A$ เพราะว่า $-\varepsilon < -A$ หรือ $A < \varepsilon$ ซึ่งเป็นจริงทุก ๆ ค่า $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $A \le 0$

ทฤษฎีบท 4.14 ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ และมี $h > 0$ ที่ทำให้ $f(x) \le g(x)$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < h$ แล้ว $A \le B$

พิสูจน์ จาก $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)] = A - B$ และจากสิ่งที่กำหนดให้ $f(x) - g(x) \le 0$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < h$ ทำให้ $A - B \le 0$ นั่นคือ $A \le B$

ทฤษฎีบท 4.15 (Limits of Composite Function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน a , b เป็นจำนวนจริง และ g(b) หาค่าได้ และถ้า $\lim\limits_{x \to b} g(x) = g(b)$ และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = g(b)$

พิสูจน์ กำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องพิสูจน์ว่ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$$

ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to b} g(x) = g(b)$ ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$|g(x) - g(b)| < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta_1$ (รวมถึงจุด b ด้วย เพราะว่า g(b) หาค่าได้)

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - b| < \delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

ทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta_2$

เลือก $\delta = \delta_2$ เพราะฉะนั้นทุก ๆ ค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า

จาก (2) $|f(x) - b| < \delta_1$

และจะได้ว่า จาก (1) $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = g(b)$

ทฤษฎีบท 4.16 ให้ f เป็นฟังก์ชัน $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า V เป็นช่วงเปิดใด ๆ ที่ $A \in V$ แล้วจะต้องมีช่วงเปิด U ที่ $a \in U$ และ $f(x) \in V$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $x \in U$ และ $x \ne a$

ทฤษฎีบท 4.17 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a > 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

ทฤษฎีบท 4.18 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก $A > 0$ และ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ แล้ว

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+8x+15}{x+3}$

วิธีทำ ถ้าแทนค่า x ด้วย -3 โดยตรงไม่ได้ เพราะผลจะเท่ากับ $\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่นิยาม เนื่องจากลิมิตเมื่อ x เข้าสู่ -3 หมายถึง $x \neq -3$ ดังนั้น $x+3 \neq 0$ เราสามารถนำ $x+3$ ไปหารทั้งเศษ และส่วนได้ และหาค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\frac{x^2+8x+15}{x+3} = \frac{(x+3)(x+5)}{x+3} = x+5$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+8x+15}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x+5) = -3+5 = 2$$

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาค่าของ

1. $\lim_{x\to -2} 12$
2. $\lim_{x\to 5}(4x-10)$
3. $\lim_{x\to 4}(x^2+2x-5)$
4. $\lim_{h\to 0}(2x^2+3xh+h^2)$
5. $\lim_{x\to 2}(3(2x+1)(x-1))$
6. $\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1)$
7. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}$
8. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-24}{x^2-7x+12}$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$
10. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$

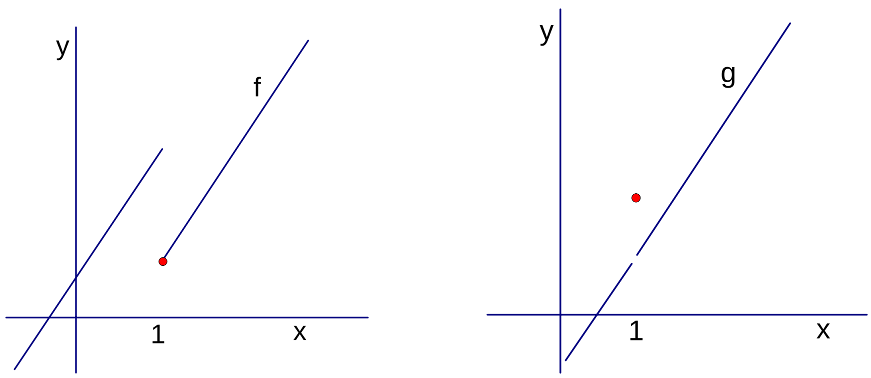
บทที่ 5
ความต่อเนื่อง (Continuity)

จากเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เราทราบมาแล้วว่า ค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด a กับลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าสู่ a ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน แต่ถ้าค่าสองค่านี้เท่ากัน ฟังก์ชัน จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ที่จุด a ตามนิยามต่อไปนี้

นิยาม 5.1 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

1. หาค่าของ f(a) ได้ และ
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่องที่จุดทุกจุดในช่วง I



รูปที่ 5.1

จากรูปที่ 5.1 จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด 1

นิยาม 5.2 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล (polynomial function) คือ ฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

โดยที่ $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 5.1 ฟังก์ชันโพลิโนเมียลจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซ็ตของจำนวนจริง

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่นิยามว่า

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

ถ้า a เป็นจนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$f(a) = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0$$

ซึ่งหาค่าได้ทุก ๆ จำนวนจริง a

จากทฤษฎีบท 4.2, 4.3 และบทแทรก 4.6, 4.8, 4.9 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = f(a)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

เพราะว่า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ เพราะฉะนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R

ทฤษฎีบท 5.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a แล้ว ฟังก์ชันต่อไปนี้จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ด้วย

1. $f \pm g$
2. fg
3. $\dfrac{f}{g}$ เมื่อ $g(a) \neq 0$
4. cf เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์ เพราะว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

$f(a)$ และ $g(a)$ หาค่าได้ และ

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

$(f \pm g)(a) = f(a) \pm g(a)$ จะหาค่าได้

จาก ทฤษฎีบทจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

นั่นคือ $f \pm g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

ทฤษฎีบท 5.3 ถ้า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด g(a) แล้ว $f \circ g$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

พิสูจน์ เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด g(a)

เพราะฉะนั้น $g(a)$ และ $f(g(a))$ หาค่าได้

$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ และ $\lim_{x\to g(a)} f(x) = f(g(a))$

ซึ่งทำให้ $f \circ g(a) = f(g(a))$ หาค่าได้

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = f(g(a)) = f \circ g(a)$$

นั้นคือ $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

แบบฝึกหัด 5.1

ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่ ถ้าไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จงบอกเหตุผลด้วยว่าไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเพราะอะไร พร้อมวาดกราฟของฟังก์ชันนั้น ๆ

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$
2. $f(x) = |x + 5|$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

ลิมิตข้างเดียว (One-Sided Limites)

นิยาม 5.3 ลิมิตทางขวา (Right-Hand Limit)

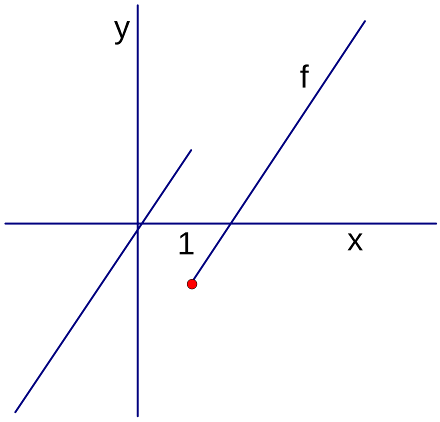
ให้ $a, A \in R$ ลิมิตของฟังก์ชน f เมื่อ x เข้าสู่ a **ทางขวา** มีค่าเข้าสู่ A ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนว่า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < x - a < \delta$
(หรือ $a < x < a + \delta$)

นิยาม 5.4 ลิมิตทางซ้าย (Left-Hand Limit)

ให้ $a, A \in R$ ลิมิตของฟังก์ชน f เมื่อ x เข้าสู่ a **ทางซ้าย** มีค่าเข้าสู่ A ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนว่า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < a - x < \delta$
(หรือ $a - \delta < x < a$)

ตัวอย่าง 5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x - 2 & x \geq 1 \end{cases}$$



รูปที่ 5.2

จากกราฟของ f จะเห็นว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา จะได้ค่า f(x) เข้าใกล้ -1 นั่นคือ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -1$$

และขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย จะได้ค่า f(x) เข้าใกล้ 1 นั่นคือ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ทฤษฎีบท 5.4 ให้ a, A เป็นจำนวนจริง $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

พิสูจน์ สมมุติให้ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ เพราะฉะนั้น ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$ นั่นคือ ถ้า x สอดคล้องกับอสมการ $a - \delta < x < a$ และ $a < x < a + \delta$ แล้ว $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ในทางกลับกัน สมมุติให้ $\lim_{x\to a^-} f(x) = A = \lim_{x\to a^+} f(x)$
เพราะฉะนั้น ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ x ที่ $a - \delta_1 < x < a$

และ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ x ที่ $a < x < a + \delta_2$

เลือก $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

เพราะฉะนั้น $a - \delta_1 \le a - \delta < a < a + \delta \le a + \delta_2$

สำหรับทุก ๆ x ที่ $a - \delta < x < a$ และ $a < x < a - \delta$ (หรือ $0 < |x - a| < \delta$)

จะได้ว่า $|f(x) - A| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

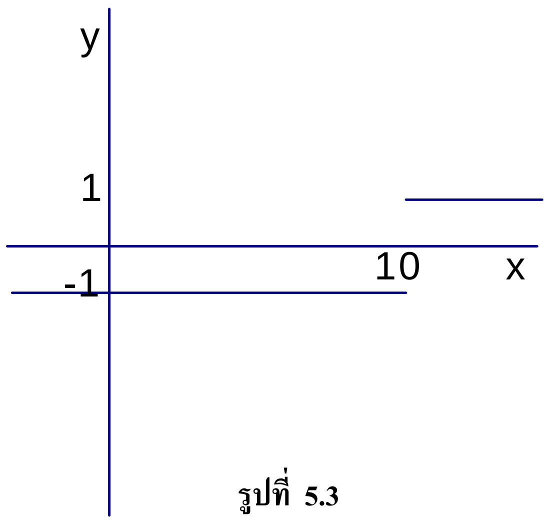
หมายเหตุ ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ แล้ว จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 5.2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 10^+} \dfrac{|x-10|}{x-10}$

วิธีทำ เมื่อ x เข้าสู่ 10^+ นั่นคือ พิจารณาในกรณีที่ x มากกว่า 10

เพราะฉะนั้น x -10 เป็นบวก และ $|x - 10| = x - 10$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 10^+} \dfrac{|x-10|}{x-10} = \lim\limits_{x \to 10^+} \dfrac{x-10}{x-10} = 1$



รูปที่ 5.3

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{|x-10|}{x-10}$

วิธีทำ เมื่อ x เข้าสู่ 10^- นั่นคือ พิจารณาในกรณีที่ x น้อยกว่า 10

เพราะฉะนั้น x -10 เป็นลบ และ $|x - 10| = -(x - 10)$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{|x-10|}{x-10} = \lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{-(x-10)}{x-10} = -1$

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาค่าของ

1. $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{x-4}$
2. $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x-4}$

3. $\lim\limits_{x\to 6^-} \frac{(x-6)}{5}$
4. $\lim\limits_{x\to 6^+} \frac{(x-6)}{5}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}$
9. $\lim\limits_{x\to -6^-} \frac{|x+6|}{x+6}$
10. $\lim\limits_{x\to -6^+} \frac{|x+6|}{x+6}$

กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ -2x+1 & x < 0 \end{cases}$

หาค่าในข้อ 11. ถึง 14. ต่อไปนี้

11. f(0)
12. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
13. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
14. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ลิมิตที่เกี่ยวกับค่าอนันต์ (Limits Involving Infinity)

ในตอนที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึง

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ เมื่อ a และ A เป็นจำนวนจริง

สำหรับในตอนนี้จะพูดถึงลิมิตในกรณีที่ และ เป็นค่าอนันต์ เนื่องจากค่าอนันต์ไม่ใช่จำนวนจริง เพราะฉะนั้นเราจะใช้เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ในนิยามของลิมิตที่เกี่ยวกับค่าอนันต์ไม่ได้ ขอให้นักศึกษาโปรดสังเกตนิยามต่อไปนี้ จะเห็นว่าคล้ายคลึงกับนิยามของลิมิตในตอนที่ผ่านมาแล้วมาก ผิดกันเพียงเล็กน้อย เฉพาะส่วนที่เกี่ยวกับค่าอนันต์

นิยาม 5.5 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนบวก N ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $x > N$

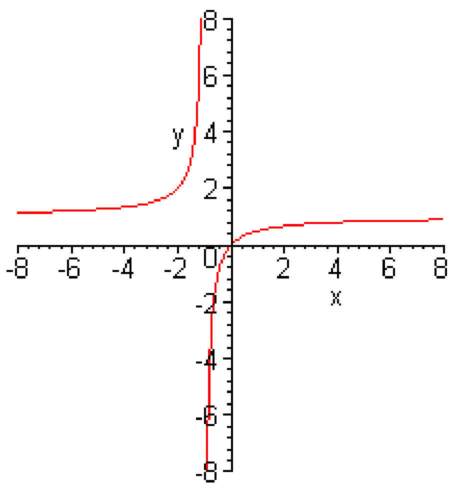
นิยาม 5.6 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนบวก N ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $-x > N$

นิยาม 5.7 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนบวก N ที่ทำให้ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า x ที่ $|x| > N$

ทฤษฎีบท 5.5 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ และ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$

ตัวอย่าง 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า $f(x) = \frac{x}{x+1}$ เมื่อ $x \neq -1$

วิธีทำ



รูปที่ 5.4

พิจารณา $x > -1$

$f(-\frac{1}{2}) = 1,\ f(0) = 0,\ f(10) = \frac{10}{11},\ f(100) = \frac{100}{101},\ f(1000) = \frac{1000}{1001}, \ldots$

จะเห็นว่า ถ้าค่า x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่า f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 1

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณา $x < -1$ จะได้ว่า

ถ้า x มีค่าลดลงเรื่อย ๆ ค่า f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 1

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

ดังนั้น ตามทฤษฎีบท 5.5 จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

ทฤษฎีบท 5.6 ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $N = \frac{1}{\varepsilon}$

ดังนั้น เมื่อ $|x| > N$ จะได้ว่า $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{N} = \varepsilon$

หรือ $\frac{1}{|x|} = \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ข้อ 2. และ 3. จะเป็นจริงตามทฤษฎีบท 5.5

ทฤษฎีบท 5.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงที่ นั่นคือ $f(x) = c$ ทุก ๆ ค่า x แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$

ทฤษฎีบท 5.8 ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = F$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = G$ โดยที่ F และ G เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to\infty} cf(x) = cF$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) \pm g(x)] = F \pm G$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x).g(x) = F.G$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ เมื่อ $G \neq 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์ ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ ลิมิต เมื่อ $x \to a$

จากทฤษฎีบท 5.5 จะเห็นว่าผลของ ทฤษฎีบท 5.8 และ 5.8 ใช้ได้กับลิมิตที่ $x \to +\infty$ และ $x \to -\infty$ ได้ด้วย

ตัวอย่าง 5.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+4}{2x+3}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$ เมื่อ $x \neq -\frac{3}{2}$

ถ้า $x \neq 0$ เอา x หารทั้งเศษและส่วนจะได้ ดังนี้

$$f(x) = \frac{3+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0 \text{ และ } x \neq -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(3+\tfrac{4}{x}) = \lim_{x\to\infty}3 + \lim_{x\to\infty}\tfrac{4}{x}$$
$$= 3 + 4\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x}$$
$$= 3 + 4(0) = 3$$

ในทำนองเดียวกัน $\lim_{x\to\infty}(2+\tfrac{3}{x}) = 2$

ดังนั้น $$\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(3+\frac{4}{x})}{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x})} = \frac{3}{2}$$

นั่นคือ $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x+3} = \frac{3}{2}$$

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาค่าของ

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{25x-30}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-1}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x+3}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{3x+1}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{3x-1}$
7. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{x^2-2x-3}$
8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}$
9. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
10. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
11. $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$
12. $\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$

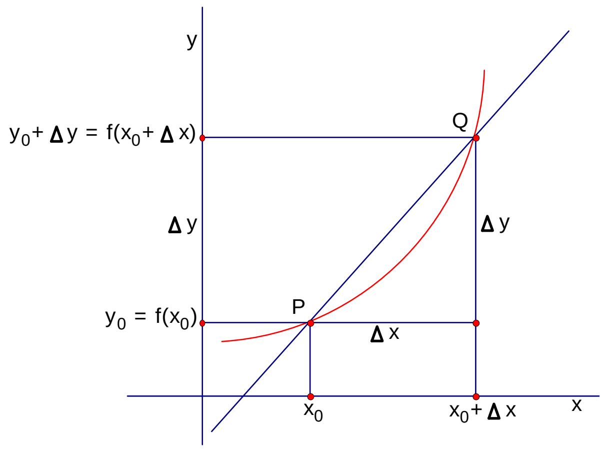
บทที่ 6

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Differentiation of Algebraic Functions)

ในวิชาแคลคูลัสมีเนื้อหาที่สำคัญอยู่สองเนื้อหา คือ อนุพันธ์ และ อินทิเกรต อนุพันธ์เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลง และอินทิเกรตเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการบวก ซึ่งทั้งสองเรื่องนี้ใช้ทฤษฎีของลิมิตมาอธิบาย

อนุพันธ์ (Derivatives)

ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง I ซึ่งกำหนดให้ $y = f(x)$ ให้ P, Q เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่อยู่บนกราฟของฟังก์ชัน f นี้ ถ้า P มีพิกัด (x_0,y_0) และให้พิกัดที่ 1 ของ Q มีค่าเพิ่มจาก x_0 เท่ากับ Δx พิกัดที่ 2 ของ Q มีค่าเพิ่มจาก y_0 เท่ากับ Δy แล้ว Q จะมีพิกัดเป็น $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ (เราเรียก Δx ว่า **ค่าเพิ่ม** (increment) ทางแกน x และ แกน y ตามลำดับ ซึ่งอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้)



รูปที่ 6.1

P, Q เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f

$$Y_0 = f(x_0) \quad \ldots\ldots(1)$$

และ
$$y_0 + \Delta y = f(x_0+\Delta x) \quad \ldots\ldots(2)$$

(2) – (1)
$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

ถ้า $\Delta x \neq 0$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

นิยาม 6.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $x_0 \in I$

ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ หาค่าได้ (exists) และเป็นจำนวนจริง เราเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ x_0 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า $f'(x_0)$

เราจะเรียก $\{(x,f'(x)) | x \in D_f$ และ $f'(x)$ หาค่าได้ $\}$ ว่าอนุพันธ์ของ f และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า f'

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้แล้วเราจะเรียก f ว่า ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x_0

ถ้า f' หาค่าได้แล้ว เราจะเรียก f ว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (differentiable function)

ถ้าให้ $y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ นอกจากเราจะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ x แล้ว เราอาจจะเรียกว่า **อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x** และนอกจากจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า $f'(x)$ แล้ว เราอาจจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = D_x y = D_x f(x)$$

พิจารณาสัญลักษณ์ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

ถ้าให้ $x_0 + \Delta x = x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

นั่นคือ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

จากรูปที่ 6.1 ความชันของเส้นรงที่ลากผ่านจุด $P(x_0,y_0)$ และจุด $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ คือ

$$m = \frac{(y_0+\Delta y)-y_0}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ถ้า $\Delta x \to 0$ จะเห็นว่าจุด Q จะเข้าใกล้จุด P และเส้นตรง PQ จะเป็นเส้นสัมผัสกราฟ f ที่จุด P

$\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ จะเป็นความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด P

ตัวอย่าง 6.1 จงหาอนุพันธ์ของ $y = 5x^2 + 3$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = 5x^2 + 3$

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)^2 + 3 \\ &= 5(x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2) + 3 \\ &= 5x^2 + 10x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 \\ \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = 10x\,\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

ถ้า $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 10x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x$$

ตัวอย่าง 6.2 ถ้า f นิยามว่า $f(x) = \frac{2x+7}{x}$ จงหา $f'(3)$

วิธีทำ $f(x) = \frac{2x+7}{x}$

$$f(x+\Delta x) = \frac{2(x+\Delta x)+7}{x+\Delta x} = \frac{2x+2\Delta x+7}{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2x+2\Delta x+7}{x+\Delta x} - \frac{2x+7}{x}$$

$$= \frac{2x^2+2x\Delta x+7x-2x^2-2x\Delta x-7x-7\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-7\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

ถ้า $\Delta x \neq 0$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{-7\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{-7}{x^2}$$

$$f'(3) = \frac{-7}{9}$$

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x + 2$
2. $f(x) = x^2 + 3$
3. $f(x) = 2x^2 + 1$
4. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
5. $f(x) = 2x - x^2$
6. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
7. $f(x) = \frac{x+4}{x}$
8. $f(x) = \frac{2}{x+2}$
9. $f(x) = (2 - x)^2$
10. $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต หมายถึงฟังก์ชันที่นิยามในรูปของ การบวก ลบ คูณ หาร ของตัวแปรและตัวคงที่ อันได้แก่ ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function) ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) และฟังก์ชันโพลิโนเมียล (polynomial function) เป็นต้น

ทฤษฎีบท 6.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a

พิสูจน์ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \text{หาค่าได้}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(a)] = \lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) - f(a)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right] \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$= f'(a)\,(0) = 0$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a

ทฤษฎีบท 6.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่ (constant function) มีค่าเท่ากับ 0

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคงที่ นั่นคือ $f(x) = c \;,\quad \forall x \in R$

$$f(x) = c$$

$$f(x + \Delta x) = c$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

นั่นคือ $\frac{dc}{dx} = 0$

ทฤษฎีบท 6.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกลักษณ์ (indentity function) มีค่าเท่ากับ 1

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ นั่นคือ $f(x) = x\ ,\quad \forall\, x \in R$

$$f(x) = x$$

$$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

นั่นคือ $\dfrac{dx}{dx} = 1$

ทฤษฎีบท 6.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงที่แล้ว cf จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(cf)'(x) = cf'(x)$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}(cf)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x} \\ &= c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

นั่นคือ ถ้าให้ $u = f(x)$ แล้ว $cu = cf(x)$

$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$ และ $\dfrac{d}{dx}(cu) = (cf)'(x)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\,\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 6.5 ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $f+g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

พิสูจน์

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$= f'(x)+g'(x)$ เพราะว่า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

นั่นคือ ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ แล้ว $u+v = (f+g)(x)$

$$\frac{du}{dx} = f'(x)\ ,\ \frac{dv}{dx} = g'(x) \quad \text{และ} \quad \frac{d}{dx}(u+v) = (f+g)'(x)$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$

บทแทรก 6.6 ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $f-g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$

พิสูจน์

$$(f-g)'(x) = (f+(-1g))'(x) = f'(x)+(-1g)'(x)$$

$$= f'(x)+(-1)g'(x)$$

$$= f'(x)-g'(x)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}(u-v) = \dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 6.7 ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว fg จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $fg(x+\Delta x) - fg(x) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$

$$= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)$$

$$= f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]$$

ดังนั้น $(fg)'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ เพราะว่า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

นั่นคือ ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ แล้ว $uv = fg(x)$

$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$, $\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ และ $\dfrac{d}{dx}(u\,v) = (fg)'(x)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 6.8 ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x) \neq 0$ แล้ว $\dfrac{f}{g}$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

พิสูจน์ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ดังนั้น g จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x และเนื่องจาก $g(x) \neq 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $g(x+\Delta x) \neq 0$ เมื่อ $|\Delta x| < \delta$

นั่นคือ $\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}$ จะมีความหมาย เมื่อ Δx มีค่าใกล้ ๆ 0

$$\frac{f}{g}(x+\Delta x) - \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f(x+\Delta x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+\Delta x)-\frac{f}{g}(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ (f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x)

นั่นคือ ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ แล้ว $\frac{u}{v} = \frac{f}{g}(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$, $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ และ $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = (\frac{f}{g})'(x)$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ทฤษฎีบท 6.9 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n \in I^+$ แล้ว

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

พิสูจน์ โดยวิธีการอุปมานทางคณิตศาสตร์ กับ n

ถ้า $n = 1$ ทฤษฎีบทนี้จะเป็นจริงตาม ทฤษฎีบทที่ 6.9

สมมุติว่า $n = k$ เป็นจริง นั่นคือ $\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $n = k+1$ เป็นจริง นั่นคือ ต้องแสดงให้เห็นว่า $\frac{dx^{k+1}}{dx} = (k+1)x^k$

เนื่องจาก $x^{k+1} = x^k x$

$$\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x^k x)$$

$$= x^k\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}x^k$$

$$= x^k + x\,k\,x^{k-1}$$

$$= x^k + k\,x^k$$

$$= (k+1)x^k$$

โดยวิธีการอุปมานทางคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \forall\ n \in I^+$$

ทฤษฎีบท 6.10 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามว่า $f(x) = x^n$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $n \in I^-$ แล้ว $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

พิสูจน์ ให้ $p = -n$ เพราะฉะนั้น $p \in I^+$ และ $x^n = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$

ดังนั้น $$\frac{dx^n}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^p} = \frac{x^p\frac{d1}{dx} - 1\frac{dx^p}{dx}}{(x^p)^2}$$

$$= \frac{x^p(0) - px^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{-px^{p-1}}{x^{2p}}$$

$$= -p\,x^{p-1-2p} = -p\,x^{-p-1} = n\,x^{n-1}$$

ตัวอย่าง 6.3 จงหา $f'(x)$ จาก $f(x) = 13x^3 - 5x^2 + 3$

วิธีทำ $$f'(x) = \frac{d}{dx}(13x^3 - 5x^2 + 3)$$

$$= \frac{d}{dx}13x^3 - \frac{d}{dx}5x^2 + \frac{d}{dx}3$$

$$= 39x^2 \frac{d}{dx} - 10x\frac{d}{dx}x + 0$$

$$= 39x^2 - 10x$$

ตัวอย่าง 6.4 จงหา f'(x) จาก $f(x) = (1 - x)(x^2 + 7x)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}(1 - x)(x^2 + 7x)$

$$= (1 - x)\frac{d}{dx}(x^2 + 7x) + (x^2 + 7x)\frac{d}{dx}(1 - x)$$

$$= (1 - x)(2x + 7) + (x^2 + 7x)(-1)$$

$$= 2x + 7 - 2x^2 - 7x - x^2 - 7x$$

$$= 7 - 12x - 3x^2$$

ตัวอย่าง 6.5 จงหา f'(x) จาก $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{x-1}$

$$= \frac{(x-1)\frac{dx^2}{dx} - x^2\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 12x^3 + 5x + 3$

2. $f(x) = 5x^4 + 11x$

3. $f(x) = 14x^2 - 6x + 8$

4. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 11x$

5. $f(x) = x^5 - 42x + 8$

6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 11$

7. $f(x) = 3x^2 - 15x + 36$

8. $f(x) = (2x + 3)(x^2 + 1)$

9. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x)$

10. $f(x) = (x^2 + 3x)(x^3 + 5x^2 - 6x + 1)$

11. $f(x) = (x + 2)(2x + 1)$

12. $f(x) = \frac{2-x}{2x+7}$

13. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3x+1}$

14. $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2-4}$

15. $f(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$

บทที่ 7

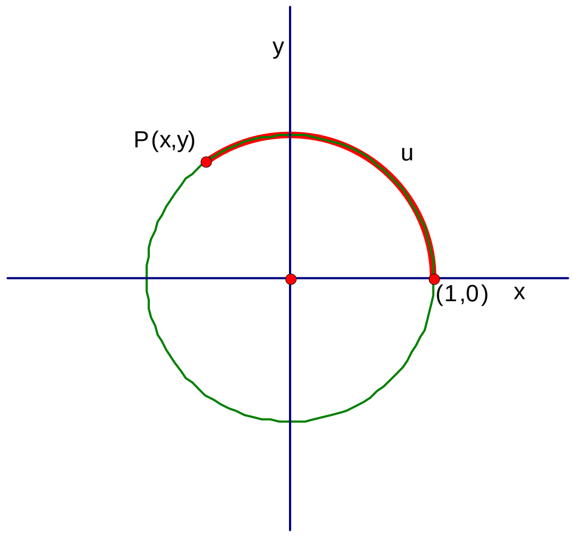
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Differentiation of Transcendental Functions)

ฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ฟังก์ชันตรีโกณ (Trigonometric Function) ฟังก์ชันอินเวอร์ตรีโกณ (Inverse Trigonometric Function) ฟังก์ชันเลขยกกำลัง (Exponential Function) และ ฟังก์ชันลอการิธมิค (Logarithmic Function) เป็นต้น

7.1 ฟังก์ชันตรีโกณ (Trigonometric Function)

ก่อนจะกล่าวถึงฟังก์ชัน ขอทบทวนนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ของตรีโกณที่จำเป็นต้องใช้ ดังนี้ คือ

วงกลมรัศมี 1 หน่วย (unit circle) จะหมายถึง วงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ของระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system)



รูปที่ 7.1.1

นิยาม 7.1.1 ให้ P(x,y) เป็นจุดอยู่บนกราฟของวงกลมรัศมี 1 หน่วย และให้ u เป็นความ

ยาวของส่วนโค้งของวงกลม ที่วัดจากจุด (1,0) ถึงจุด P ทวนเข็มนาฬิกา (ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกา ให้มีทิศทางเป็นลบ)

1. **sine function** จะเป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง [-1,1] ที่นิยามว่า $\sin u = y$

2. **cosine function** จะเป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง [-1,1] ที่นิยามว่า $\cos u = x$

3. **tangent, cosecant, secant** และ **cotangent function** จะนิยาม ดังนี้ คือ

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos u \neq 0$$

$$\csc u = \frac{1}{\sin u} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin u \neq 0$$

$$\sec u = \frac{1}{\cos u} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos u \neq 0$$

$$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin u \neq 0$$

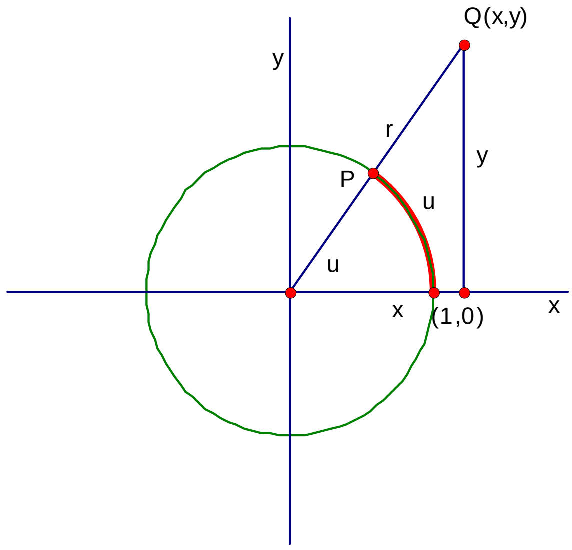
ถ้าให้ A เป็นมุมที่จุดกำเนิดโดยมีแกน x ทางด้านบวกเป็นแขนด้านหนึ่ง และเส้นตรงที่ลากจากจุดกำเนิดถึงจุด P ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 หน่วย เป็นแขนอีกข้างหนึ่ง ให้ u เป็นความยาวของส่วนโค้งของวงกลมจาก (1,0) ถึง P ถ้า u = 1 หน่วย จะเรียกว่า A มีขนาด 1 เรเดียน (radian) เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 หน่วย มีความยาวเท่ากับ 2π หน่วย ฉะนั้นมุมรอบจุดศูนย์กลางจะมีขนาดเท่ากับ 2π เรเดียน ซึ่งเท่ากับ 360 องศา

π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

$\frac{\pi}{2}$ เรเดียน เท่ากับ 90 องศา

จะเห็นว่า ในวงกลมรัศมี 1 หน่วย มุมที่รองรับส่วนโค้งของวงกลม (หน่วยเรเดียน) มีขนาดเท่ากับความยาวของส่วนโค้งของวงกลมนั้น (หน่วยเรเดียน) ฉะนั้น จากนิยาม $\sin u = y$, $\cos u = x$ จึงหมายรวมถึงมุมที่รองรับส่วนโค้งนั้น ๆ ด้วย

ให้ Q(x,y) เป็นจุดใด ๆ ในพิกัดฉาก ที่อยู่ห่างจุดกำเนิด O เท่ากับ r หน่วย ให้ OQ ทำมุมกับแกน x เท่ากับ u และตัดเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่จุด P เราสามารถหาพิกัดของจุด P ได้เท่ากับ $(\frac{x}{r},\frac{y}{r})$ ฉะนั้น $\sin u = \frac{y}{r}$ และ $\cos u = \frac{x}{r}$



รูปที่ 7.1.2

ทฤษฎีบท 7.1.1

1. $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

2. $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$

3. $1 + \cot^2 u = \mathrm{cec}^2 u$

4. $\cos(u\text{-}v)\ \ \cos u \cos v + \sin u \sin v$

5. $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

6. $\sin u = \cos(\frac{\pi}{2}\text{-}u)$

7. $\cos u = \sin(\frac{\pi}{2}\text{-}u)$

8. $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

9. $\sin 2u = 2\sin u \cos u$

10. $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

11. sin(u-v) - sin u cos v – cos u sin v

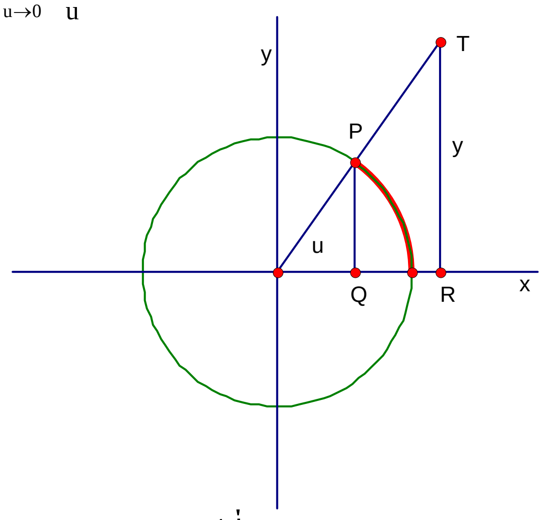
12. $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

13. $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

14. $\sin u - \sin v = 2\sin\dfrac{u-v}{2}\cos\dfrac{u+v}{2}$

15. $\sin u + \sin v = 2\sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2}$

ทฤษฎีบท 7.1.2 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$



รูปที่ 7.1.3

พิสูจน์ จากรูป ถ้า $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ สามเหลี่ยม OQP จะเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกับ ORT

$$\frac{|TR|}{|PQ|} = \frac{|OR|}{|OQ|}$$

และ $$\frac{|TR|}{\sin u} = \frac{1}{\cos u}$$

นั่นคือ $$|TR| = \frac{\sin u}{\cos u}$$

จะเห็นว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยม OQP < พื้นที่ของส่วนของวงกลม ORP

< พื้นที่ของสามเหลี่ยม ORT

และ เพราะว่า พื้นที่ของส่วนของวงกลม เท่ากับ $\frac{ur^2}{2}$ เมื่อ u เป็นมุมที่ศูนย์กลาง (หน่วยเรเดียน) และ r เป็นรัศมีของวงกลม

$$\frac{1}{2}|OQ|\,|QP| < \frac{u}{2} < \frac{1}{2}|OR|\,|TR|$$

แทนค่า $|OQ| = \cos u$, $|QP| = \sin u$, $|OR| = 1$, $|TR| = \frac{\sin u}{\cos u}$

จะได้ว่า $\frac{\sin u \cos u}{2} < \frac{u}{2} < \frac{\sin u}{2\cos u}$

เพราะว่าทุกอัตราส่วนเป็นจำนวนบวก เพราะฉะนั้น

$$\frac{2}{\sin u \cos u} > \frac{2}{u} > \frac{2\cos u}{\sin u}$$

$$\frac{1}{\cos u} > \frac{\sin u}{u} > \cos u$$

ถ้า u เข้าสู่ 0^+ แล้ว $\frac{1}{\cos u}$ และ $\cos u$ จะเข้าสู่ 1

เนื่องจาก $\frac{\sin u}{u}$ อยู่ระหว่าง $\frac{1}{\cos u}$ กับ $\cos u$ จึงทำให้ $\frac{\sin u}{u}$ จะเข้าสู่ 1 ด้วย

นั่นคือ $\lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$

ถ้า $-\frac{\pi}{2} < u < 0$

จะได้ว่า $\sin u = -\sin(-u)$ และ $0 < -u < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin u}{u} = \frac{\sin(-u)}{(-u)}$$

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{\sin u}{u} = \lim_{-u \to 0^+} \frac{\sin(-u)}{(-u)} = 1$$

นั่นคือ $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

ทฤษฎีบท 7.1.3 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v = g(x)$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \sin v$

$$y + \Delta y = \sin(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = \sin(v + \Delta v) - \sin v$$

$$= 2\cos(\frac{2v+\Delta v}{2})\sin\frac{\Delta v}{2}$$

เมื่อ $\Delta v \neq 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \dfrac{2\cos(\frac{2v+\Delta v}{2})\sin\frac{\Delta v}{2}}{\Delta v}$

$$= \cos(\frac{2v+\Delta v}{2})\frac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta v} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(\frac{2v+\Delta v}{2})\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}$$

$$\frac{dy}{dv} = \cos v$$

เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx}$

นั่นคือ $\dfrac{d}{dx}(\sin v) = \cos v\dfrac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.1.4 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v = g(x)$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \cos v$ ดังนั้น $y = \sin(\frac{\pi}{2} - v)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(\frac{\pi}{2} - v))$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - v)\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - v)$$

$$= -\sin v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v\,\frac{dv}{dx}$$

ทฤษฎีบท 7.1.5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ v = g(x) แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v\,\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \tan v$ ดังนั้น $y = \dfrac{\sin v}{\cos v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)$$

$$= \frac{\cos v\frac{d}{dx}(\sin v) - \sin v\frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos^2 v\frac{dv}{dx} + \sin^2 v\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{(\cos^2 v + \sin^2 v)\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 v}\frac{dv}{dx}$$

$$= \sec^2 v\,\frac{dv}{dx}$$

ทฤษฎีบท 7.1.6 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ v = g(x) แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v\,\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \cot v$ ดังนั้น $y = \dfrac{\cos v}{\sin v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos v}{\sin v}\right)$$

$$= \frac{\sin v\frac{d}{dx}(\cos v) - \cos v\frac{d}{dx}(\sin v)}{\sin^2 v}$$

$$= \frac{-\sin^2 v\frac{dv}{dx} - \cos^2 v\frac{dv}{dx}}{\sin^2 v}$$

$$= \frac{-(\sin^2 v + \cos^2 v)\frac{dv}{dx}}{\sin^2 v}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 v}\frac{dv}{dx} \quad = \ -\csc^2 v \ \frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v \ \frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.1.7 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v = g(x)$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \ \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \sec v$ ดังนั้น $y = \frac{1}{\cos v} = (\cos v)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos v)^{-1}$$

$$= -\cos^{-2} v \ \frac{d}{dx}\cos v$$

$$= \cos^{-2} v \sin v \ \frac{dv}{dx} \quad = \frac{\sin v}{\cos^2 v}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos v}\frac{\sin v}{\cos v}\frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \ \frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.1.8 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v = g(x)$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \ \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \csc v$ ดังนั้น $y = \frac{1}{\sin v} = (\sin v)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin v)^{-1}$$

$$= -\sin^{-2} v \ \frac{d}{dx}\sin v$$

$$= -\frac{\cos v}{\sin^2 v}\frac{dv}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\sin v}\frac{\cos v}{\sin v}\frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx}$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

1. $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \frac{dv}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v \frac{dv}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \frac{dv}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx}$

ตัวอย่าง 7.1.1 ให้ $y = \tan 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan 3x)$

$$= \sec^2 3x \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3 \sec^2 3x$$

ตัวอย่าง 7.1.2 ให้ $f(x) = \sin^2 x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$

$$= 2\sin x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 2\sin x\cos x$$

ตัวอย่าง 7.1.3 ให้ $y = x^4\sec^3 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4\sec^3 2x)$$

$$= x^4\frac{d}{dx}(\sec^3 2x) + \sec^3 2x\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= x^4\, 3\sec^2 2x\frac{d}{dx}(\sec 2x) + \sec^3 2x\,(4x^3)$$

$$= 3x^4\sec^2 2x\sec 2x\tan 2x\frac{d}{dx}(2x) + 4x^3\sec^3 2x$$

$$= 6x^4\sec^3 2x\tan 2x + 4x^3\sec^3 2x$$

$$= 2x^3\sec^3 2x(3x\tan 2x + 2)$$

ตัวอย่าง 7.1.4 ให้ $y = \sec^3(\frac{x}{2})\tan^2(\frac{x}{2})$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \sec^3(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}\tan^2(\frac{x}{2}) + \tan^2(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}\sec^3(\frac{x}{2})$$

$$= \sec^3(\frac{x}{2})\, 2\tan(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}\tan(\frac{x}{2}) + \tan^2(\frac{x}{2})\, 3\sec^2(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}\sec(\frac{x}{2})$$

$$= 2\sec^3(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2})\sec^2(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}(\frac{x}{2})$$

$$+ 3\tan^2(\frac{x}{2})\sec^2(\frac{x}{2})\sec(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2})\frac{d}{dx}(\frac{x}{2})$$

$$= \sec^5(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2}) + \frac{3}{2}\sec^3(\frac{x}{2})\tan^3(\frac{x}{2})$$

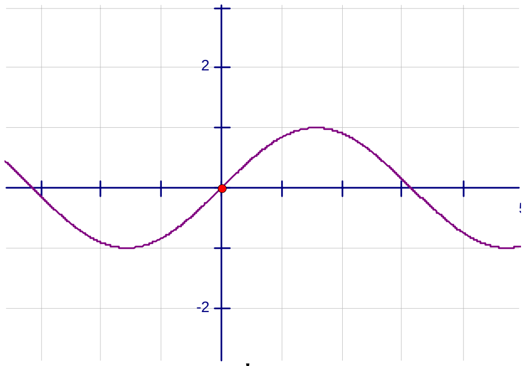
$$= \sec^5(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2})(\sec^2(\frac{x}{2}) + \frac{3}{2}\tan^2(\frac{x}{2}))$$

แบบฝึกหัด 7.1

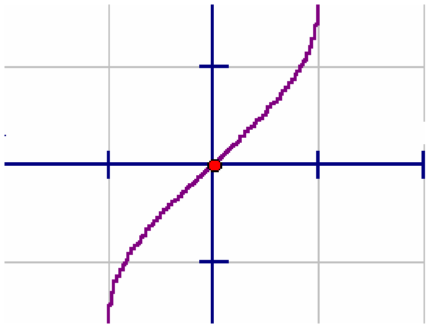
จงหา $\frac{dy}{dx}$ จากฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = \cot 2x$
2. $y = \sec x^2$
3. $y = 3 \sin x \cos x$
4. $y = \sin^3 2x$
5. $y = \tan^3(\frac{x}{3})$
6. $y = \csc 2x - \frac{\csc^3 2x}{3}$
7. $y = 2x + \tan 2x$
8. $y = x \sin x + \cos x$
9. $y = \sqrt{\cot 2x}$
10. $y = \sec^2 2x - \tan^2 2x$

7.2 ฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณ (The inverse trigonometric functions)



รูปที่ 7.2.1



รูปที่ 7.2.2

จากรูปที่ 7.2.1 จะเห็นว่าฟังก์ชัน sine ซึ่งนิยามว่า y = sin(x) เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง [-1,1]

จากรูปที่ 7.2.2 จะเห็นว่า อินเวอร์สของฟังก์ชัน sine เป็นเพียงความสัมพันธ์จาก [-1,1] ไปยัง R ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเราลด range ของอินเวอร์สของฟังก์ชัน sine ลงเหลือเพียง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ จะเห็นว่าอินเวอร์สของฟังก์ชัน sine จะเป็นฟังก์ชันด้วย เราจะเรียกอินเวอร์สของฟังก์ชัน sine ที่นิยามจาก [-1,1] ไปยัง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ว่าเป็นฟังก์ชัน arcsine ซึ่งนิยามว่า

$$y = \text{arcsine}(x)$$

และด้วยวิธีการลด range ของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ ทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถนิยามฟังก์ชัน arccosine, arctangent, arccotangent, arcsecant และ arccosecant ได้ดังนี้

นิยาม 7.2.1

1. **arcsine** คือฟังก์ชันจาก [-1,1] ไปยัง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ที่นิยามว่า $y = \arcsin(x)$ เมื่อ $x = \sin y$

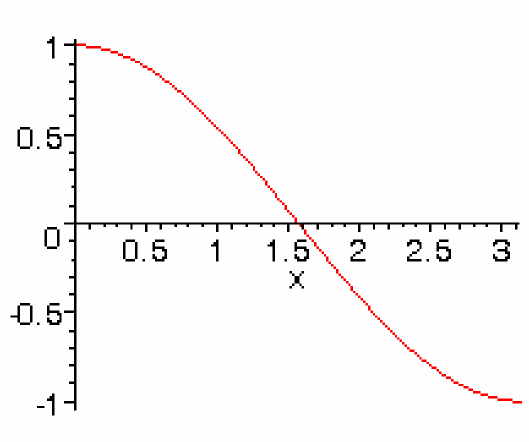
2. **arccosine** คือฟังก์ชันจาก [-1,1] ไปยัง $[0,\pi]$ ที่นิยามว่า $y = \arccos(x)$ เมื่อ $x = \cos y$

3. **arctangent** คือฟังก์ชันจาก [-1,1] ไปยัง $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ที่นิยามว่า $y = \arctan(x)$ เมื่อ $x = \tan y$

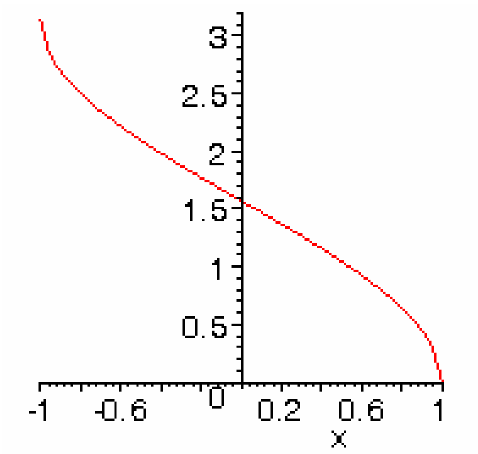
4. **arccotangent** คือฟังก์ชันจาก R ไปยัง $(0,\pi)$ ที่นิยามว่า $y = \text{arccot}(x)$ เมื่อ $x = \cot y$

5. **arcsecant** คือฟังก์ชันจาก $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ไปยัง $[-\pi,\frac{\pi}{2}) \cup [0,\frac{\pi}{2})$ ที่นิยามว่า y = arcsec(x) เมื่อ x = sec y

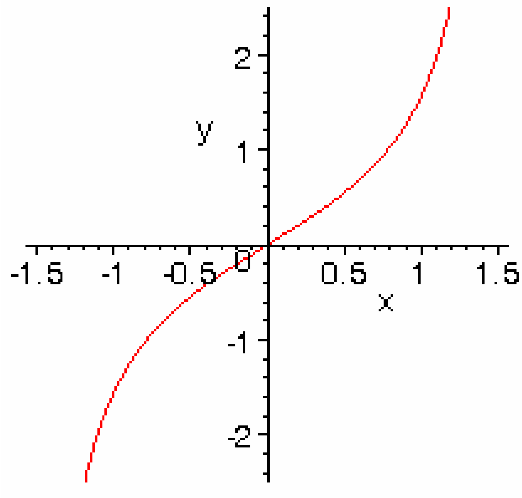
6. **arccosecant** คือฟังก์ชันจาก $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ไปยัง $[-\pi,\frac{\pi}{2}) \cup [0,\frac{\pi}{2})$ ที่นิยามว่า y = arccsc(x) เมื่อ x = csc y



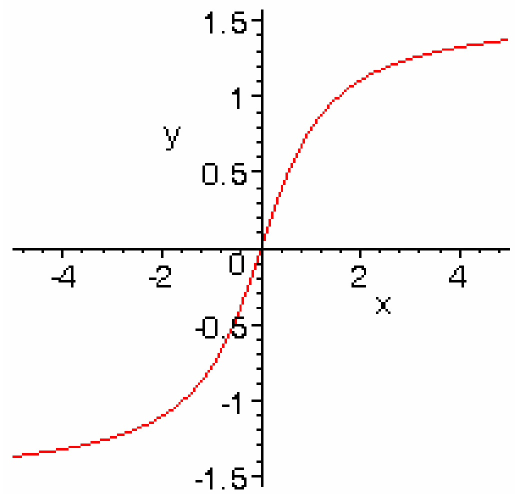
y = cos x



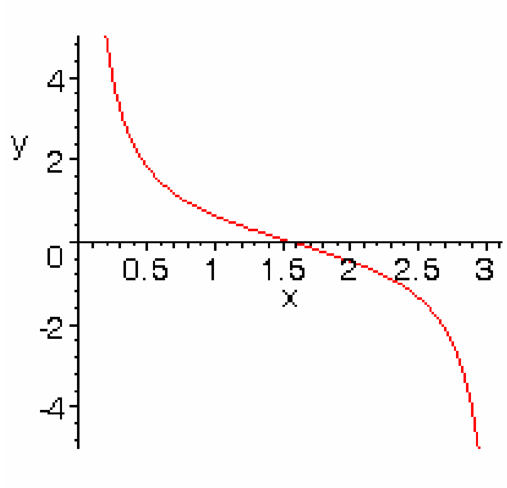
y = arccos x



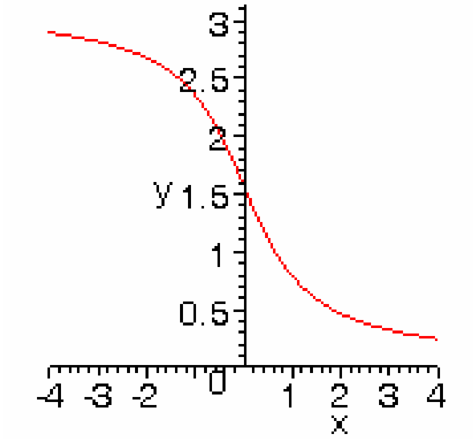
y = tan x



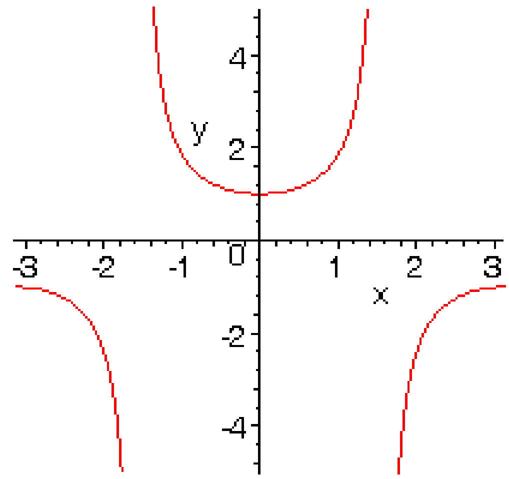
y = arctan x



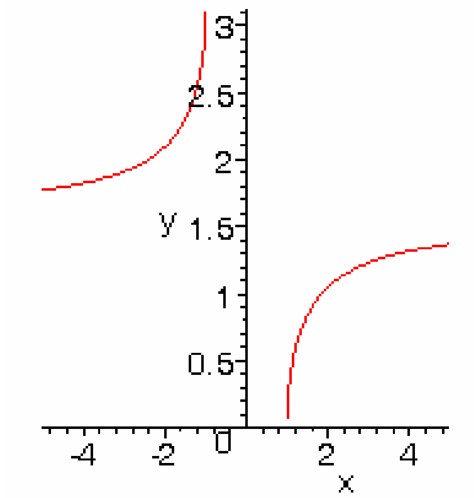
y = cot x



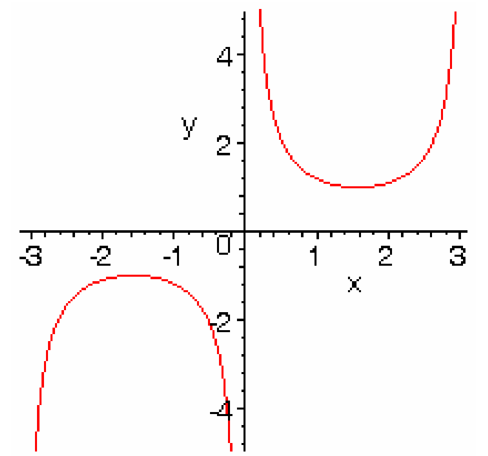
y = arccot x



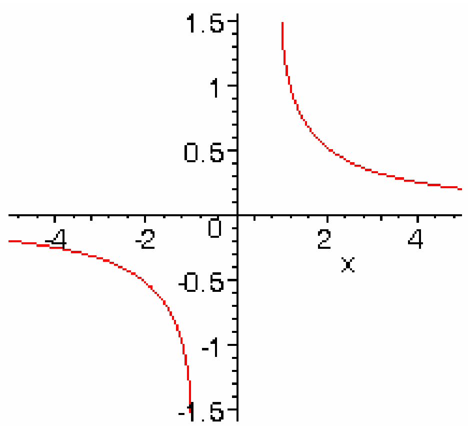
y = sec x



y = arcsec x



y = csc x



y = arccsc x

รูปที่ 7.2.3

ทฤษฎีบท 7.2.1 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , v = g(x) และ $-1 < v < 1$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \arcsin v$ ดังนั้น $v = \sin y$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y\frac{dy}{dx}$$

เนื่องจาก $-1 < v < 1$ เพราะฉะนั้น $-1 < \sin y < 1$ นั่นคือ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\cos y > 0$ ทำให้ $\cos y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\frac{dv}{dx}$$

เนื่องจาก $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ และ $\cos y > 0$

ดังนั้น $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-v^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.2.2 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , v = g(x) และ $-1 < v < 1$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\arccos v) = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \arccos v$ ดังนั้น $v = \cos y$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y\frac{dy}{dx}$$

เนื่องจาก $-1 < v < 1$ เพราะฉะนั้น $-1 < \cos y < 1$ นั่นคือ $0 < y < \pi$

$\sin y > 0$ ทำให้ $\sin y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}\frac{dv}{dx}$$

เนื่องจาก $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ และ $\sin y > 0$

ดังนั้น $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-v^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}(\arccos v) = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.2.3 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ v = g(x) แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \arctan v$ ดังนั้น $v = \tan y$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}\frac{dv}{dx} \qquad (\sec y \neq 0)$$

เนื่องจาก $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + v^2$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.2.4 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ v = g(x) แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\text{arccot } v) = \frac{-1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \text{arccot } v$ ดังนั้น $v = \cot y$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot y) = -\csc^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc^2 y}\frac{dv}{dx} \qquad (\csc y \neq 0)$$

เนื่องจาก $\csc^2 y = 1 + \cot^2 y = 1 + v^2$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(\text{arccot } v) = \frac{-1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.2.5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , v = g(x) และ $|v| > 1$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\text{arcsec } v) = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \text{arcsec } v$ ดังนั้น $v = \sec y$

$$\frac{dv}{dx} = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

เนื่องจาก $|v| > 1$ แสดงว่า $v < -1$ หรือ $v > 1$

ถ้า $v < -1$ แล้ว $\sec y < -1$ และ $-\pi < y < -\frac{\pi}{2}$

$\tan y > 0$

ถ้า $v > 1$ แล้ว $\sec y > 1$ และ $0 < y < \frac{\pi}{2}$

$\tan y > 0$

นั่นแสดงว่า $\sec y \tan y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}\frac{dv}{dx}$$

เนื่องจาก $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ และ $\tan y > 0$

$$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{v^2-1}$$

นั่นคือ $$\frac{d}{dx}(\text{arcsec } v) = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$$

ทฤษฎีบท 7.2.6 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , v = g(x) และ $|v| > 1$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\text{arccsc } v) = \frac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \text{arccsc } v$ ดังนั้น $v = \csc y$

$$\frac{dv}{dx} = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$$

เนื่องจาก $|v| > 1$ แสดงว่า $v < -1$ หรือ $v > 1$

ถ้า $v < -1$ แล้ว $\csc y < -1$ และ $-\pi < y < -\frac{\pi}{2}$

$\cot y > 0$

ถ้า $v > 1$ แล้ว $\csc y > 1$ และ $0 < y < \frac{\pi}{2}$

$\cot y > 0$

นั่นแสดงว่า $\csc y \cot y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc y \cot y}\frac{dv}{dx}$$

เนื่องจาก $\cot^2 y = \csc^2 y - 1$ และ $\cot y > 0$

$$\cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1} = \sqrt{v^2 - 1}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} v) = \frac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณ

1. $\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $-1 < v < 1$

2. $\frac{d}{dx}(\arccos v) = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $-1 < v < 1$

3. $\frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} v) = \frac{-1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} v) = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $|v| > 1$

6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} v) = \frac{-1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $|v| > 1$

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \operatorname{arcsec} 3x$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} 3x)$$
$$= \frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2 - 1}} \frac{d(3x)}{dx}$$
$$= \frac{1}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x \arctan x^2$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x \arctan x^2)$$
$$= x \frac{d}{dx}(\arctan x^2) + \arctan x^2 \frac{dx}{dx}$$
$$= x \frac{1}{1+x^4} \frac{dx^2}{dx} + \arctan x^2$$
$$= \frac{2x^2}{1+x^4} + \arctan x^2$$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \arcsin(\cos x)$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\arcsin(\cos x))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$
$$= \frac{-\sin x}{\sin x} = -1$$

แบบฝึกหัด 7.2.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\arccos (-\frac{1}{2})$
3. $\arctan (-1)$
4. $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$
5. $\operatorname{arcsec} 2$

6. $\operatorname{arccsc}(-\frac{2}{\sqrt{3}})$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7. $f(x) = \arcsin 3x$
8. $f(x) = \arccos x^3$
9. $f(x) = \arctan 5x$
10. $f(x) = \operatorname{arccot} x^2$
11. $f(x) = \operatorname{arcsec} \frac{1}{2x}$
12. $f(x) = \operatorname{arccsc} \sqrt{x}$
13. $f(x) = \arcsin(\sin x)$
14. $f(x) = \arctan(3 \tan x)$
15. $f(x) = x \operatorname{arcsec}(x + x^3)$

7.3 ฟังก์ชันเลขยกกำลังและฟังก์ชันลอการิธมิค (Exponential and Logarithemic Functions)

เลขยกกำลัง

ก่อนจะกล่าวถึง ฟังก์ชันเลขยกกำลังและฟังก์ชันลอการิธมิค ขอทบทวนนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ของเลขยกกำลัง ดังต่อไปนี้

นิยาม 7.3.1

1. ถ้า $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = a.a.a....a \quad (n \text{ ตัว})$$

เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง**

เรียก a ว่า **ฐาน**

และ เรียก n ว่า **เลขชี้กำลัง**

2. $a^0 = 1$ เมื่อ $a > 0$

3. ถ้า $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4. ถ้า $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ทฤษฎีบท 7.3.1 ถ้า $a, b > 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n.b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ a^{m-n} & m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

ลอการิธึม (Logarithm)

นิยาม 7.3.2 ให้ $x = a^y$ เมื่อ $x > 0, a > 0$ และ $a \neq 1$ จะเรียก y ว่า **ลอการิธึม** (logarithm) ของ x ฐาน a และเขียนสัญลักษณ์แทน y ว่า $y = \log_a x$

ถ้า $a = 10$ จะเขียน $\log x$ แทน $\log_{10} x$ และเรียกลอการิธึมที่มีฐานเป็น 10 ว่า common logarithms

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828\ldots$$

ถ้า $a = e$ จะเขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ และเรียกลอการิธึมที่มีฐานเป็น e ว่า natural logarithms

ทฤษฎีบท 7.3.2 ถ้า $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ แล้ว

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^P = P \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$ เมื่อ $x > 0$ และ $x \neq 1$

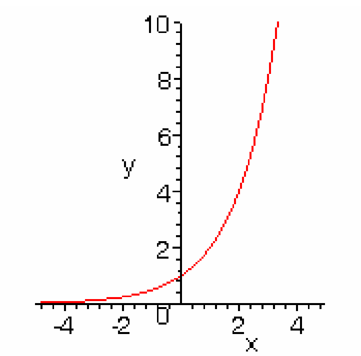
ฟังก์ชันเลขยกกำลัง (Exponential Function)

นิยาม 7.3.3 ฟังก์ชนเลขยกกำลัง คือ ฟังก์ชันจากเซ็ตของจำนวนจริงไปยังเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก ที่นิยามว่า $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

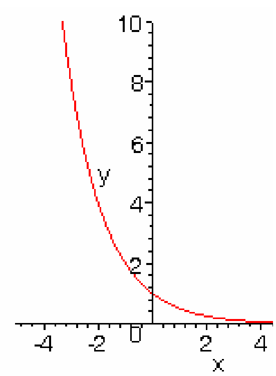
เช่น $f(x) = 2^x$

$f(x) = (\frac{1}{2})^x$

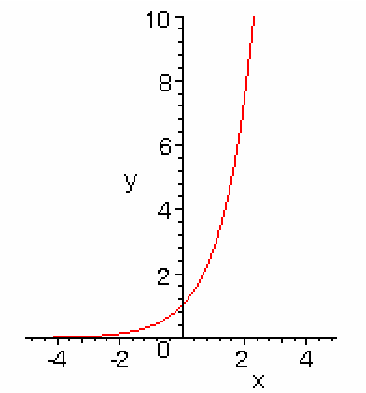
$f(x) = e^x$



รูปที่ 7.3.1



รูปที่ 7.3.2



รูปที่ 7.3.3

ข้อสังเกต

1. กราฟของฟังก์ชันเลขยกกำลัง ทุกฟังก์ชันจะผ่านจุด (0,1)

2. ค่าของฟังก์ชันเลขยกกำลังทุกฟังก์ชันจะมากกว่าศูนย์
3. ฟังก์ชันเลขยกกำลัง f ที่นิยามว่า $f(x) = a^x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $a > 1$ และจะเป็นฟังก์ชันลด ถ้า $0 < a < 1$
4. ฟังก์ชันเลขยกกำลังเป็นฟังก์ชัน 1-1 จากเซ็ตของจำนวนจริงไปบนเซ็ตของจำนวนจริงบวก

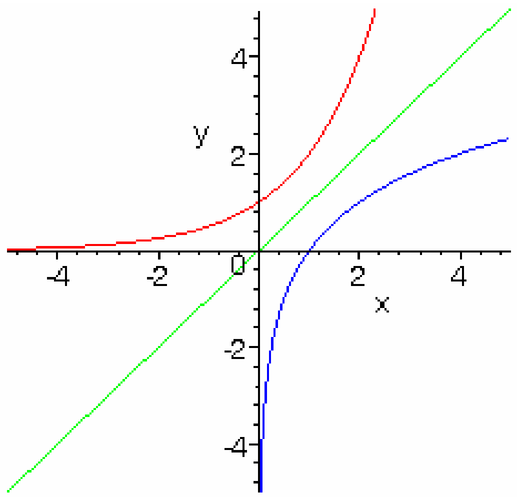
ฟังก์ชันลอการิธมิค (Logarithmic Functions)

เนื่องจากฟังก์ชันเลขยกกำลังที่นิยามว่า $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R ไปยัง R^+ ดังนั้น อินเวอร์สของฟังก์ชันเลขยกกำลังนี้จึงเป็นฟังก์ชันด้วย และเป็นฟังก์ชันจาก R^+ ไปยัง R

อินเวอร์สของฟังก์ชันเลขยกกำลังที่นิยามว่า $y = a^x$ คือ ฟังก์ชันที่ นิยามว่า $x = a^y$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปลอการิธึมได้เป็น $y = \log_a x$

นิยาม 7.3.4 ฟังก์ชันลอการิธึม คือ ฟังก์ชันจากเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวกไปยังเซ็ตของเลขจำนวนจริง ที่นิยามว่า $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $a > 0,\ a \neq 1$

ตัวอย่าง เช่น $y = \log_2 x$, $y = \ln x$



รูปที่ 7.3.4

ข้อสังเกต

1. ฟังก์ชันลอการิธมิค $y = \log_a x$ เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเลขยกกำลัง $y = a^x$

2. ฟังก์ชันลอการิธมิค เป็นฟังก์ชัน 1-1 จากเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวกไปบนเซ็ตของเลขจำนวนจริง ดังนั้น

ถ้า $\log_a x = \log_a y$ แล้ว $x = y$

ทฤษฎีบท 7.3.3 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , $v = g(x)$ และ $v \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\ln|v|) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ ถ้า $v > 0$ จะได้ว่า $|v| = v$

ให้ $y = \ln|v| = \ln v$

$$y - \Delta y = \ln(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = \ln(v + \Delta v) - \ln v$$

$$= \ln(\frac{v+\Delta v}{v})$$

$$= \ln(1 + \frac{\Delta v}{v})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta v}\ln(1 + \frac{\Delta v}{v})$$

$$= \frac{1}{v}\frac{v}{\Delta v}\ln(1 + \frac{\Delta v}{v})$$

$$= \frac{1}{v}\ln(1 + \frac{\Delta v}{v})^{\frac{v}{\Delta v}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{v}\ln(1 + \frac{\Delta v}{v})^{\frac{v}{\Delta v}}$$

$$= \frac{1}{v}\ln\lim_{\Delta x \to 0}(1 + \frac{\Delta v}{v})^{\frac{v}{\Delta v}}$$

$$= \frac{1}{v}\ln e = \frac{1}{v}$$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

ถ้า $v < 0$ จะได้ว่า $|v| = -v > 0$

ดังนั้น $y = \ln|v| = \ln(-v)$

จากกรณีที่พิสูจน์ไปแล้ว จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-v}\frac{d(-v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(\ln|v|) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.3.4 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , $v = g(x)$ และ $v \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\log|v|) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\ln|v| = \frac{\log|v|}{\log e}$

ดังนั้น $\log|v| = \log e \ \ln|v|$

$$\frac{d}{dx}\log|v| = \log e\frac{d}{dx}(\ln|v|)$$

$$= \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}$$

ทฤษฎีบท 7.3.5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , v = g(x) , a > 0 และ $a \neq 1$ แล้ว $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

พิสูจน์ ให้ $y = a^v$ จะได้ว่า $\ln y = \ln a^v = v \ln a$

$$v = \frac{\ln y}{\ln a} \qquad (a \neq 1)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dv} = y \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = y \ln a \frac{dv}{dx}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

บทแทรก 7.3.6 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ v = g(x) แล้ว

$$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \ln e \frac{dv}{dx} = e^v \frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบท 7.3.7 ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x , u = f(x), v = g(x) และ u > 0 แล้ว $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

พิสูจน์ ให้ $y = u^v$ จะได้ว่า $\ln y = \ln u^v = v \ln u$

นั่นคือ $y = e^{v \ln u}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{v \ln u})$$

$$= e^{v \ln u}\frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$= u^v [v \frac{d}{dx}\ln u + \ln u \frac{dv}{dx}]$$

$$= u^v [\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}]$$

$$= v u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขยกกำลัง และฟังก์ชันลอการิธมิค

1. $\frac{d}{dx}(\ln|v|) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $v \neq 1$
2. $\frac{d}{dx}(\log|v|) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}$ เมื่อ $v \neq 1$
3. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$
4. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$ เมื่อ $u > 0$

ตัวอย่าง 7.3.1 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \ln(3x^2 - 4)$ เมื่อ $3x^2 - 4 > 0$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(3x^2-4))$$
$$= \frac{1}{3x^2-4}\frac{d}{dx}(3x^2-4)$$
$$= \frac{6x}{3x^2-4}$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{x^2})$$
$$= e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 2x\, e^{x^2}$$

ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = a^{3x^2}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(a^{3x^2})$$
$$= a^{3x^2}\ln a \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x\, a^{3x^2}\ln a$$

แบบฝึกหัด 7.3.1

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \ln|3x|$ เมื่อ $x \neq 0$
2. $f(x) = \ln|x^2 + 2x|$ เมื่อ $x^2 + 2x \neq 0$
3. $f(x) = e^{2x}$
4. $f(x) = e^{x^3}$
5. $f(x) = e^{\sin x}$
6. $f(x) = \ln|x + e^x|$ เมื่อ $x + e^x \neq 0$
7. $f(x) = x \ln|x|$ เมื่อ $x \neq 0$
8. $f(x) = x^2 e^{1/x}$
9. $f(x) = 3^x$
10. $f(x) = 10^{x^2}$
11. $f(x) = \ln^3 x$
12. $f(x) = e^x \ln|x|$
13. $f(x) = 3^x - x^3$
14. $f(x) = x^{\sin x}$
15. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

บทที่ 8
การประยุกต์อนุพันธ์

การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

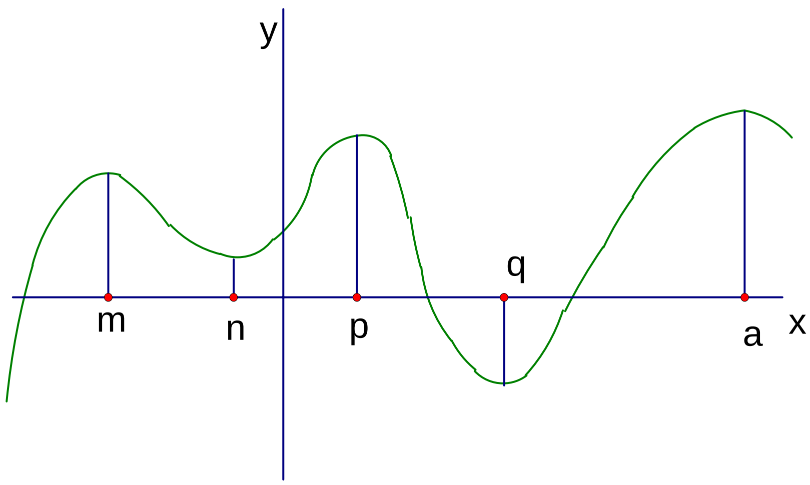
นิยาม 8.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง I และ $t \in I$

1. เราจะเรียก $f(t)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ของ f ที่จุด t ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนบวก h ที่ทำให้ $f(x) \le f(t)$ ทุก ๆ $x \in (t-h,t+h)$ และเรียกจุด $(t,f(t))$ ว่า **จุดสูงสุดสัมพัทธ์**ของ f

2. เราจะเรียก $f(t)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ของ f ที่จุด t ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนบวก h ที่ทำให้ $f(x) \ge f(t)$ ทุก ๆ $x \in (t-h,t+h)$ และเรียกจุด $(t,f(t))$ ว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์**ของ f

3. เราจะเรียก $f(t)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ของ f บน I ก็ต่อเมื่อ $f(x) \le f(t)$ ทุก ๆ $x \in I$ และเรียกจุด $(t,f(t))$ ว่า**จุดสูงสุดสัมบูรณ์**ของ f

4. เราจะเรียก $f(t)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) ของ f บน I ก็ต่อเมื่อ $f(x) \ge f(t)$ ทุก ๆ $x \in I$ และเรียกจุด $(t,f(t))$ ว่า**จุดต่ำสุดสัมบูรณ์**ของ f



รูปที่ 8.1

f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $(-\infty,a]$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(m)$, $f(p)$, $f(a)$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(n)$, $f(q)$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(a)$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ไม่มี

การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดวิธีที่ 1 (โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 1)

ทฤษฎีบท 8.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ t และ $f'(t) = 0$ หรือ $f'(t)$ หาค่าไม่ได้ ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $t \in (a,b)$ และทำให้ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (a,t)$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (t,b)$ แล้ว f(t) จะเป็น**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**ของ f ที่จุด t

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ t เพราะฉะนั้น f นิยามที่จุด t เพราะว่ามีช่วง (a,t) ที่ทำให้ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (a,t)$

จะได้ว่า f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน [a,t] และ $f(t) > f(x) \quad \forall\, x \in [a,t)$

มีช่วง (t,b) ที่ทำให้ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (t,b)$

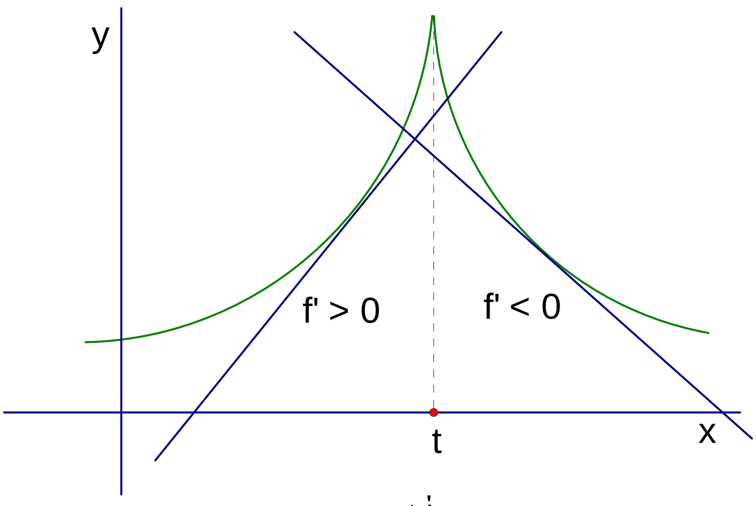
จะได้ว่า f จะเป็นฟังก์ชันลดบน [t,b] และ $f(t) > f(x) \quad \forall\, x \in (t,b]$

ดังนั้น $f(t) > f(x) \quad \forall\, x \neq t$ และ $x \in [a,b]$

นั่นคือ f(t) จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด t

ทฤษฎีบท 8.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ t และ $f'(t) = 0$ หรือ $f'(t)$ หาค่าไม่ได้ ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $t \in (a,b)$ ทำให้ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (a,t)$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (t,b)$ แล้ว f(t) จะเป็น**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**ของ f ที่จุด t

ถึงแม้ว่า $f'(t)$ จะหาค่าไม่ได้ f(t) ก็เป็นค่าสูงสุด (หรือต่ำสุด) ได้เช่น ฟังก์ชัน f ในรูป $f'(t)$ มีค่าเข้าใกล้ ∞ นั่นคือ $f'(t)$ หาค่าไม่ได้ แต่ f(t) เป็นค่าสูงสุด



รูปที่ 8.2

ค่า f(t) ที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เราจะเรียกว่า **ค่าที่สุด** (extreme value) หรือ extremum ของ f

ค่า f ที่ทำให้ $f'(t) = 0$ หรือ $f'(t)$ หาค่าไม่ได้ จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต (**critical value**)**

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์วิธีที่ 1 (โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 1)

1. หาค่า $f'(t)$
2. หาค่าวิกฤต t โดย

   2.1 ให้ $f'(t) = 0$ ในกรณีที่ $f'(t)$ หาค่าได้

   2.2 ให้ $\frac{1}{f'(t)} = 0$ ในกรณีที่ $f'(t)$ หาค่าไม่ได้
3. ทำการทดสอบค่าวิกฤต t

   3.1 ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < t$ และ

   $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > t$

   แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด a

   3.2 ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < t$ และ

   $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > t$

   แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด t

(ค่า x ที่ $x < t$ หรือ $x > t$ จะต้องเป็นค่าที่น้อยกว่าหรือมากกว่า t เพียงเล็กน้อยเท่านั้น หรือเป็นค่าที่อยู่ใกล้ ๆ t นั่นเอง)

ตัวอย่าง 8.1 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = 6x^2 + 8x - 8$

ให้ $f'(t) = 0$

เพราะฉะนั้น $6t^2 - 8t - 8 = 0$

$$(3t - 2)(t + 2) = 0$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ หรือ } -2$$

เพราะว่า $f'(\frac{2}{3}) = 0,\quad f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (0, \frac{2}{3})$

และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (\frac{2}{3}, 1)$

เพราะฉะนั้น $f(\frac{2}{3})$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด $\frac{2}{3}$

เพราะว่า $f'(-2) = 0,\quad f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-3,-2)$

และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (-2,-1)$

เพราะฉะนั้น $f(-2)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด -2

ตัวอย่าง 8.2 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$$= \frac{5}{3}x^{\frac{-1}{3}}(x+2) = \frac{5(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

ให้ $f'(t) = 0$ จะได้ว่า $t = -2$

จะเห็นว่า เมื่อ $t = 0$, $f'(t)$ จะหาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น ค่าวิกฤตจะมีสองค่า คือ -2, 0

เพราะว่า $f'(-2) = 0$, $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-3,-2)$

และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (-2,0)$

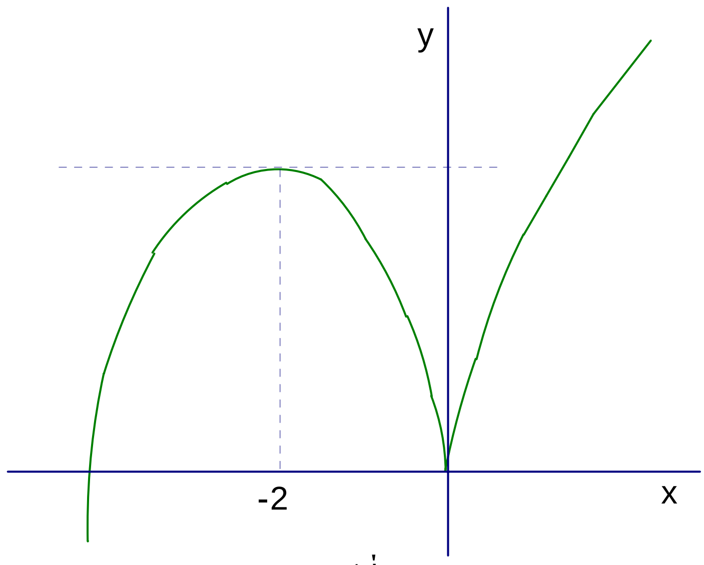
เพราะฉะนั้น $f(-2)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด -2

เพราะว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x \in (-2,0)$

และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (0,1)$

เพราะฉะนั้น $f(0)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด 0

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ (0,0)



รูปที่ 8.3

แบบฝึกหัด 8.1

จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่นิยามดังต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
2. $f(x) = 10 - 12x - 3x^2 + 2x^3$

3. $f(x) = 2x^2 - x^4$
4. $f(x) = x^4 - 4x$
5. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$
7. $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดวิธีที่ 2 (โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2)

ทฤษฎีบท 8.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง I ให้ $t \in I$ ซึ่ง $f'(t) = 0$ และ $f(t)$ หาค่าได้

1. ถ้า $f'(t) > 0$ แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่ t
2. ถ้า $f'(t) < 0$ แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่ t

พิสูจน์ ข้อ 1. จากนิยามของ f'

$$f'(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(t+\Delta x) - f'(t)}{\Delta x} = \lim_{x \to t} \frac{f'(x) - f'(t)}{x - t}$$

เพราะว่า $f'(t) > 0$ จะมีช่วงเปิด J ที่ $t \in J$ และ

$$\frac{f'(x) - f'(t)}{x - t} > 0$$

ทุก ๆ $x \neq t$ ใน J

นั่นคือ $f'(x) - f'(t) < 0$ เมื่อ $x - t < 0$

และ $f'(x) - f'(t) > 0$ เมื่อ $x - t > 0$

แต่ $f'(t) = 0$

$f'(x) < 0$ เมื่อ $x < t$

และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > t$

$f(t)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่ t

ข้อ 2. พิสูจน์ในลักษณะเดียวกัน

ข้อสังเกต เนื่องจากทฤษฎีบทไม่ได้กล่าวถึง กรณีที่ $f'(t) = 0$ ดังนั้น ถ้า $f'(t) = 0$ จึงสรุปอะไรไม่ได้ นั่นหมายถึงใช้วิธีนี้ทดสอบไม่ได้ ให้กลับไปใช้วิธีทดสอบวิธีที่ 1

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์วิธีที่ 2 (โดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2)

1. หาค่า $f'(x)$, $f'(x)$
2. หาค่าวิกฤต t โดย

    2.1 ให้ $f'(t) = 0$ เมื่อหาค่า $f'(t)$ ได้

2.2 ให้ $\frac{1}{f'(t)} = 0$ เมื่อหาค่า $f'(t)$ ไม่ได้

3. ทดสอบค่าวิกฤต t

3.1 ถ้า $f'(t) < 0$ แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด t

3.2 ถ้า $f'(t) > 0$ แล้ว $f(t)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด t

3.3 ถ้า $f'(t) = 0$ แล้ว จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์โดยวิธีนี้ไม่ได้ให้กลับไปใช้ วิธีที่ 1

ตัวอย่าง 8.3 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า $f(x) = x^4$

วิธีทำ $f'(x) = 4x^3$

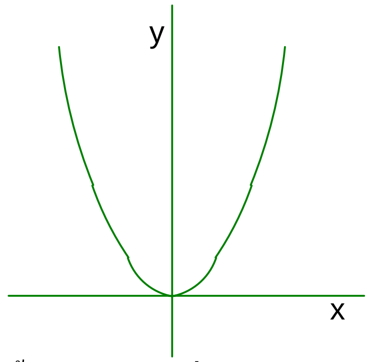
ให้ $f'(t) = 0$

$4t^3 = 0$

$t = 0$

$f'(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$



รูปที่ 8.4

นั่นคือใช้วิธีที่ 2 ทดสอบไม่ได้ ต้องใช้วิธีที่ 1 ทดสอบ ดังนี้

เนื่องจาก $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ เมื่อ $(-1,0)$

และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $(0,1)$

เพราะฉะนั้น $f(0)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด 0

ตัวอย่าง 8.4 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 18x + \frac{3}{2}$$

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 15x - 18$

$f'(x) = 6x - 15$

ให้ $f'(t) = 0$

$3t^2 - 15t - 18 = 0$

$(3t + 3)(t - 6) = 0$

$t = -1,\ 6$

เพราะว่า $f'(-1) = 0$ และ $f'(-1) = -21 < 0$

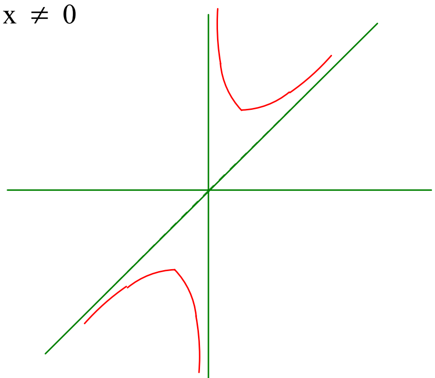
เพราะฉะนั้น $f(-1) = 11$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด -1 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-1,11)$

เพราะว่า $f'(6) = 0$ และ $f'(6) = 21 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(6) = -\frac{321}{2}$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด 0 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(6, -\frac{321}{2})$

ตัวอย่าง 8.5 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq 0$$



รูปที่ 8.5

วิธีทำ $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$

$f''(x) = \frac{8}{x^3}$

ให้ $f'(t) = 0$

$t^2 - 4 = 0$

$t = 2, -2$

เพราะว่า $f'(2) = 0$ และ $f''(2) = 1 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 4$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด 2

เพราะว่า $f'(-2) = 0$ และ $f''(-2) = -1 < 0$

เพราะฉะนั้น $f(-2) = -4$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด -2

(จะเห็นว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ไม่จำเป็นต้องมีค่ามากกว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์)

แบบฝึกหัด 8.2

จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^4-2x^2$
2. $f(x) = 4x^3-9x^2-12x+3$
3. $f(x) = 4x^3-3x^2-18x+5$
4. $f(x) = 3x^3-9x+1$
5. $f(x) = 3x^3-9x+12$
6. $f(x) = 18x+15x^2-4x^3$
7. $f(x) = 2x^3+6x^2-18x-1$
8. $f(x) = x^4+4x^3+4x^2-15$
9. $f(x) = 4x^3-15x^2+12x+7$
10. $f(x) = 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - \frac{7}{2}$

การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์

ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง [a,b] เราสามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง [a,b] สมมุติว่าได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ เป็น $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$
2. หาค่าของ f(a) และ f(b)
3. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ หาได้ดังนี้
   3.1 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $= \max(f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$
   3.2 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $= \min(f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$

ตัวอย่าง 8.6 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

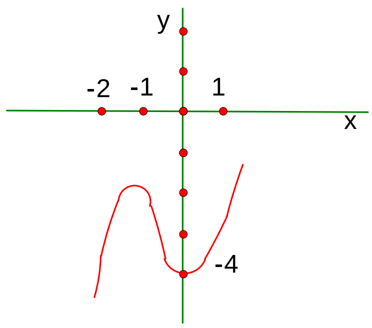
วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 6x + 4$

ให้ $f'(t) = 0$ ดังนั้น $3t^2 + 4t = 0$

$t(3t+4) = 0$

$t = 0, \ -\frac{4}{3}$



รูปที่ 8.6

เพราะว่า $f'(0) = 0$ และ $f''(0) = 4$

เพราะฉะนั้น $f(0) = -4$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด 0

เพราะว่า $f'(-\frac{4}{3}) = 0$ และ $f''(-\frac{4}{3}) = -4$

เพราะฉะนั้น $f(-\frac{4}{3}) = -2\frac{22}{27}$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด $-\frac{4}{3}$

$f(-2) = -4, \quad f(1) = -2$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $= \max(-4, -2, -4, -2\frac{22}{27}) = -2$

เพราะฉะนั้นจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,1] คือ (1,-2)

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $= \min(-4, -2, -4, -2\frac{22}{27}) = -4$

เพราะฉะนั้นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,1] คือ (-2,-4) และ (0,-4)

แบบฝึกหัด 8.3

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน บนช่วงที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

1. $f(x) = 2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$ บนช่วง $[-2,3]$
2. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ บนช่วง $[-2,3]$
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$ บนช่วง $[-3,4]$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ บนช่วง $[-2,2]$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ บนช่วง $[0,3]$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ บนช่วง $[-3,3]$

การนำค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดไปใช้

ก่อนที่จะกล่าวถึงการนำไปใช้ ขอทบทวนสูตรเบื้องต้นเกี่ยวกับการหาพื้นที่ และปริมาตรที่จำเป็นต้องใช้ ดังนี้

1. วงกลม 1.1 เส้นรอบวง $= 2\pi r$

   1.2 พื้นที่ $= \pi r^2$

   1.3 พื้นที่ส่วนของวงกลม $= \frac{1}{2}r^2\alpha$ เมื่อ α คือมุมที่จุดศูนย์กลางวัดเป็นเรเดียน
2. พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ สูง $\times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน
3. ทรงกระบอก 3.1 ปริมาตร $= \pi r^2 h$

   3.2 พื้นที่ผิวด้านข้าง $= 2\pi rh$
4. กรวยกลม 4.1 ปริมาตร $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

   4.2 พื้นที่ผิวด้านข้าง πrl เมื่อ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$
5. ทรงกลม 5.1 ปริมาตร $= \frac{4}{3}\pi r^3$

   5.2 พื้นที่ผิว $= 4\pi r^2$

ข้อแนะนำในการแก้ปัญหา

1. หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้แล้วสร้างเป็นสมการ (ถ้าวาดรูปได้ ควรวาดรูปประกอบจะทำให้มองความสัมพันธ์ง่ายขึ้น)
2. ถ้ามีหลายสมการพยายามรวมให้เหลือเพียงสมการเดียว และให้เป็นสมการของความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการให้มีค่าสูง(หรือต่ำ) สุด (ให้เป็น f(x)) กับสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (ให้เป็นค่า x)
3. หาค่าสูงสุด (หรือต่ำสุด) ของ f

ตัวอย่าง 8.7 จงหาเลขสองจำนวน ซึ่งรวมกันเท่ากับ 12 และทำให้ผลคูณของกำลังสองของจำนวนที่หนึ่งกับจำนวนที่สองมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้จำนวนที่หนึ่ง $= x$

จำนวนที่สอง $= 12 - x$

ให้ $f(x) = x^2(12-x)$ เมื่อ $0 < x < 12$

$$f'(x) = x^2\frac{d}{dx}(12-x) + (12-x)\frac{d}{dx}x^2$$

$$= -x2 + 2x(12-x)$$

$$= -x^2 + 24x - 2x^2 = 24x - 3x^2 = x(24-3x)$$

$$f''(x) = 24 - 6x$$

ให้ $f'(x) = 0$

$x(24-3x) = 0$

$x = 0$ หรือ 8

จะเห็นว่า $x = 0$ ไม่อยู่ในโดเมนของ f ดังนั้นพิจารณาเฉพาะ $x = 8$ เท่านั้น ดังนี้

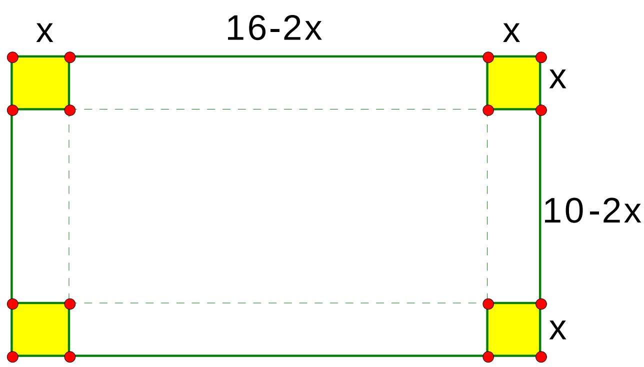
$f'(8) = 0$ และ $f''(8) = -24$

$f(x)$ จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $x = 8$

เพราะฉะนั้น เลขจำนวนที่หนึ่งต้องเท่ากับ 8 และจำนวนที่ 2 เท่ากับ 4

ตัวอย่าง 8.8 จงหาขนาดของกล่องสี่เหลี่ยมด้านบนเปิด ที่มีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งสร้างจากแผ่นกระดาษสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 10 นิ้ว x 16 นิ้ว โดยการตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่า ๆ กัน แล้วพับขึ้นเป็นด้านข้างของกล่อง

วิธีทำ ให้ขนาดของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกมีด้านยาว x นิ้ว



รูปที่ 8.7

จากรูปที่ 8.7 จะเห็นว่าขนาดของกล่องจะเป็น $x,\ 10-2x,\ 16-2x$

ให้ $V(x)$ เป็นปริมาตรของกล่อง

$V(x) = x(10 – 2x)(16 – 2x) = 4(40x – 13x2+ x3), \quad 0 < x < 5$ หาค่าสูงสุดของ V

$V'(x) = 4(40 – 26x + 3x^2) = 4(x – 2)(3x - 20)$

ให้ $V'(x) = 0$

$4(x – 2)(3x - 20) = 0$

$x = 2$ หรือ $6\frac{2}{3}$

จะเห็นว่าค่า x จะเท่ากับ $6\frac{2}{3}$ ไม่ได้เพราะว่า ด้านกว้างของกระดาษมีเพียง 10 นิ้ว เท่านั้น

จึงพิจารณาเฉพาะค่า $x = 2$ ดังนี้

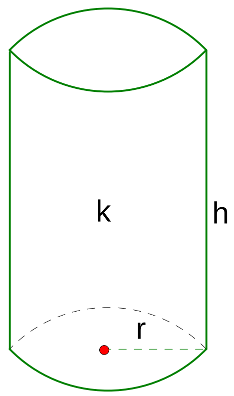
$V'(2) = 0$ และ $V''(2) = - 56$

เพราะฉะนั้น $V(2) = 144$ จะเป็นปริมาตรของกล่องที่มีค่ามากที่สุด

ขนาดของกล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด คือ สูง 2 นิ้ว ยาว 6 นิ้ว และ กว้าง 12 นิ้ว

ตัวอย่าง 8.9 โรงงานแห่งหนึ่งต้องการทำถ้วยทรงกระบอกกลมด้านบนเปิดให้มีปริมาตรตามที่กำหนด ถ้าวัสดุทำก้นถ้วยแพงกว่างวัสดุทำด้านข้าง 50 % จงหาขนาดของถ้วยที่ทำให้ราคาวัสดุที่ใช้ถูกที่สุด

วิธีทำ



รูปที่ 8.8

ให้ถ้วยมีปริมาตร $= k$ ล.บ.หน่วย

สมมุติให้รัศมีของก้นถ้วย $= r$ หน่วย

และถ้วยสูง $= h$ หน่วย

เพราะฉะนั้น พื้นที่ด้านข้าง $= 2\pi rh$ ตารางหน่วย

พื้นที่ก้น $= \pi r^2$ ตารางหน่วย

ราคาวัสดุทำก้นถ้วยแพงกล่าววัสดุทำด้านข้าง 50 %

เพราะฉะนั้น ถ้าราคาวัสดุทำด้านข้าง ตารางหน่วยละ n บาท

ราคาวัสดุที่ทำก้นจะราคา ตารางหน่วยละ $\frac{3n}{2}$ บาท

ถ้าให้ $f(r)$ เป็นราคาวัสดุในการทำถ้วย

$$f(r) = 2n\pi rh + \frac{3}{2}n\pi r^2 \quad \text{……………………………………………..(1)}$$

แต่ปริมาตรของทรงกระบอกกลม $= \pi r^2 h$

$$\pi r^2 h = k$$

$$h = \frac{k}{\pi r^2} \quad \text{………………………………….. (2)}$$

แทนค่า h ใน (1)

$$f(r) = \frac{2kn}{r} + \frac{3}{2}n\pi r^2$$

$$f'(r) = -\frac{2kn}{r^2} + 3n\pi r$$

ให้ $f'(r) = 0$

$$\frac{3n\pi r^3 - 2kn}{r^2} = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$$

และ $f'(r)$ หาค่าไม่ได้ที่ $r = 0$

พิจารณาเฉพาะ $r = \sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$

ถ้า $r < \sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$ แล้ว $f'(r) = \frac{n(3\pi r^3 - 2k)}{r^2} : \frac{(+)(-)}{(+)} < 0$

ถ้า $r > \sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$ แล้ว $f'(r) : \frac{(+)(+)}{(+)} > 0$

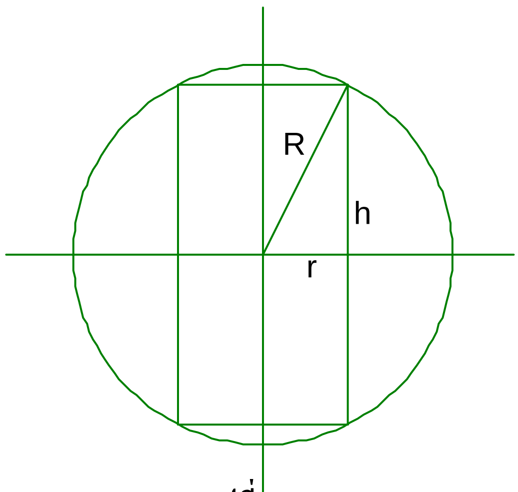
เพราะฉะนั้น $r = \sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$ จะทำให้ราคาวัสดุในการทำถ้วยถูกที่สุด

แทนค่า r ใน (2) เพราะฉะนั้น $h = \sqrt[3]{\frac{9k}{4\pi}}$

นั่นคือ ถ้วยจะต้องมีขนาดสูง $\sqrt[3]{\frac{9k}{4\pi}}$ หน่วย และรัศมีของก้นถ้วย $\sqrt[3]{\frac{2k}{3\pi}}$ หน่วย เมื่อ k เป็นปริมาตรของถ้วยที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 8.10 จงหาขนาดของทรงกระบอกกลมที่มีปริมาตรมากที่สุดซึ่งบรรจุอยู่ภายในทรงกลมรัศมี R หน่วย

วิธีทำ



รูปที่ 8.9

ให้รัศมีของฐานทรงกระบอกกลม = r หน่วย และสูง = h หน่วย

ให้ V(r) เป็นปริมาตรของทรงกระบอก

$$V(r) = \pi r^2 h$$

แต่จากรูปภาพตัดตามขวาง จะเห็นว่า

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

เพราะฉะนั้น $V(r) = 2\pi r^2(R^2 - r^2)^{½}$ เมื่อ $0 < r < R$

$$V'(r) = 2\pi r^2 \frac{1}{2}(R^2 - r^2)^{-½}(-2r) + 4\pi r(R^2 - r^2)^{½}$$

$$= 2\pi r(R^2 - r^2)^{-½}(2R^2 - 3r^2)$$

ให้ $V'(r) = 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$

$$r = 0, \quad R\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

และ $V'(r)$ หาค่าไม่ได้ที่ $r = R$

จะเห็นว่าค่า $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่อยู่ในโดเมนของ V

ถ้า $r < R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V'(r) = \dfrac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} : \dfrac{(+)(+)}{(+)} > 0$

ถ้า $r < R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V'(r) : \dfrac{(+)(-)}{(+)} < 0$

เพราะฉะนั้น $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ จะให้ค่า V สูงที่สุด

ขนาดของทรงกระบอกกลมจะมีรัศมีของฐานเท่ากับ $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ หน่วย และสูงเท่ากับ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ หน่วย

แบบฝึกหัด 8.4

1. จงแบ่ง 120 ออกเป็น 2 ส่วน โดยให้
   - 1.1 ผลคูณของส่วนทั้งสองมีค่ามากที่สุด
   - 1.2 ผลบวกของกำลังสองของแต่ละส่วนมีค่าน้อยที่สุด
   - 1.3 ผลคูณของกำลังสองของส่วนที่หนึ่งกับกำลังสามของอีกส่วนหนึ่งมีค่ามากที่สุด
2. ให้เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก n หน่วย จงหาความกว้างและความยาวที่ทำให้สี่เหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่มากที่สุด
3. จงหาขนาดของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มี พื้นที่มากที่สุด และบรรจุอยู่ภายในวงกลม รัศมี 6 หน่วย
4. มีกระดาษแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 นิ้ว ต้องการทำกล่องด้านบนเปิด โดยการตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษแผ่นนี้ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมุมละเท่า ๆ กัน แล้วพับขึ้นเป็นด้านข้างของ

กล่อง อยากทราบว่าด้านของจัตุรัสที่ตัดออกยาวด้านละเท่าไรจึงจะทำให้ ปริมาตรของกล่องนี้มีค่ามากที่สุด

5. มีแผ่นกระดาษสี่เหลี่ยมมุมฉาก ขนาด 10 นิ้ว x 20 นิ้ว ต้องการนำมาทำกล่องฝาเปิดโดยตัดมุมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วพับขึ้นเป็นด้านข้างของกล่อง จงหาขนาดและปริมาตรของกล่องที่มากที่สุด
6. สี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 5 นิ้ว ด้านที่สี่จะต้องยาวเท่าไร จึงจะทำให้สี่เหลี่ยมคางหมูรูปนี้มีพื้นที่มากที่สุด
7. ลวดเส้นหนึ่งยาว 100 นิ้ว ต้องการตัดออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งนำมาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกส่วนหนึ่งนำมาขดเป็นรูปวงกลม อยากทราบว่า

   7.1 จะตัดลวดเส้นนี้ อย่างไรจึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่ทั้งสองมีค่าน้อยที่สุด

   7.2 จะตัดลวดเส้นนี้อย่างไรจึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่ทั้งสองมีค่ามากที่สุด
8. จงหาขนาดของกล่องฝาเปิดที่มีปริมาตรมากที่สุด เมื่อมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีพื้นที่ผิวทั้งหมดเท่ากับ a ตารางหน่วย
9. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของทรงกระบอกกลมซึ่งบรรจุอยู่ภายในกรวยกลมรัศมี 12 นิ้ว และสูง 15 นิ้ว
10. ต้องการทำกระป๋องสังกะสี รูปทรงกระบอกกลมให้มีปริมาตร 58 ล.บ.นิ้ว และ ใช้สังกะสีน้อยที่สุด อยากทราบว่ากระป๋องใบนี้ จะมีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่าใด ถ้า

    10.1 ไม่ทำฝาด้านบน

    10.2 ทำฝาด้านบนด้วย

บรรณานุกรม

Elliott Mendelson. (1988). **Calculas**. Singapore: McGraw-Hill.

Forry, Marvin J. (1978). **Calculas with Analytic Geometry**. New York : Macmillan.

Gordon Fuller, Daltion Tarwater. (1992). **Analytic Geometry**. New York: Addison-Wesley.

Salas S.L., Hille Einar. (1990). **Calculas**. Singapore: John Wiley and Sons.

Stein, S.K. & Barcellos, A. (1992). **Calculas and Analytic Geometry**. (5th ed.). New York: McGraw-Hill.

แบบฝึกหัด 1.1

1. ก. (4,0), (-3,0), (2,0), (-3,0), (0,0), (1,0)

   ข. (0,2), (0,5), (0,-4), (0,-1), (0,2), (0,0)

2. 2.1 11.31, 2.2 8, 2.3 5.39, 2.4 3.16, 2.5 10.77, 2.6 3.61

3. 3

4. 4.1 27.5, 4.2 7.5, 4.3 120, 4.4 6

7. (3,-2), (3,14)

9. 5

10. (4,0)

แบบฝึกหัด 1.2

1. P = (-4,-10) Q = (3.5,-1)
2. P = (-7,6) Q = (-1.5,0.5)
3. P = (10,7) Q = (-2,3)
4. P = (3,3 Q = (2,3.5)
5. P = (2,1.67) Q = (2.5,0.5)
6. (16,-12)
7. (3.5,0.5), (0,-1), (1.5,1.5)

แบบฝึกหัด 1.3

1. 0.67, 33.69
2. 1, 45
3. 0, 0
4. /3, 60

แบบฝึกหัด 1.4

1. ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
2. อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
3. อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
4. ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
5. ขนานกัน

6. ขนานกัน
7. ตั้งฉากกัน
8. ขนานกัน
13. -3.73, 3.73
14. -7, 0.14
15. -0.4

แบบฝึกหัด 1.5

1. $y = -4$
2. $y = -3$
3. $x = 3$
4. $x = -2$
5. $y = -1.5x$
6. $y = 3x - 10$
7. $y = -2.5x + 8$
8. $y = 0.54x + 1.77$
9. $y = -0.4x - 3$
10. $y = x/3 + 2$
11. $2x - 3y = 6$
12. $x - 4y = 4$
13. $5x - 3y = 15$
14. $5x + y + 4 = 0$
15. $2x - 3y - 1 = 0$
16. $x + 2y + 3 = 0$
17. $2x - 3y + 5 = 0$
18. –3, 1/3, 1
19. –4/3, -1/4, -1/3
20. –1, 1/5, 1/5
21. ¾, 10/3, -5/2
22. 2, -3, 6
23. ½, 8, 4

24. –2/3, 11/2, 11/3

25. –4/11, -3/2, -6/11

26. 0, -, -1

27. -, 2, -

28. 53x + 10y – 53 = 0

29. y = 3.25x – 22.75

30.1 17/7 , 30.2 2 , 30.3 -3

แบบฝึกหัด 1.6

1.1 $\sqrt{3}\,x + y - 10 = 0$

1.2 $x - \sqrt{3}\,y + 12 = 0$

1.3 $x + \sqrt{3}\,y + 8 = 0$

1.4 $x - y - 5\sqrt{2} = 0$

2.1 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - \frac{9}{2} = 0$, $\frac{9}{2}$, 30

2.2 $\frac{3}{5}x - \frac{4}{2}y - \frac{6}{5} = 0$, $\frac{6}{5}$, arctan(-4/3)

2.3 $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$, $-4\sqrt{2}$, 45

2.4 $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y = 0$, 0, arctan(-5/12)

2.5 $y - \frac{7}{4} = 0$, $\frac{7}{4}$, 90

2.6 x + 5 = 0 , -5, 0

แบบฝึกหัด 1.7

1.1 2.88

1.2 5.7

1.3 1.6

1.4 5.08

2.1 3.1

2.2 0.58

2.3 11.08

2.4 2

3.1 $y = -8x + 10.75, \quad y = 0.12x - 0.86$

3.2 $y = 11.09x + 4.08, \quad y = -0.09x + 0.17$

3.3 $y = -x - 1.67$

4. $\left(\dfrac{3\sqrt{5}-2}{2}, 0\right), \ \left(-\dfrac{3\sqrt{5}+2}{2}, 0\right)$

5. $y = -0.5x + 2.74, \quad y = -0.5x - 1.74$

6. $y = 3.59x - 11.18, \quad y = -0.39x - 3.22$

แบบฝึกหัด 1.8

1. $y = mx + 3$
2. $y = mx + 3 - 2m$
3. $bx + 2y = 2b$
4. $y = 2x + c$
5. $y = 0.5x + c$
5. $y = 1.5x + c$
6. $x - y + 3 = 0$
7. $x - y + 3 = 0$
8. $y = 3x + 3.56$
9. $y = x + 1.71$
10. $y = 5x - 2$

แบบฝึกหัด 2.1

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 - 8x + 16y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 44 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 12 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
9. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$
13. (2,-1), 4
14. (4,-3), 5
15. (-1,2), 1
16. (2,-3), 2
17. (3,-2), 3
18. (-5,4), 5
19. (-5/4,-3/4), 3//8
20. (-3/4,5/4), /10/4
21. วงกลม
22. เซตว่าง
23. จุด
24. จุด
25. จุด
26. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
27. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
28. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 161 = 0$
29. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 95 = 0$
30. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 90 = 0$
31. $(x - 1.86)^2 + (y - 2.14)^2 = 0.51^2$

32. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$

33. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 47 = 0$

34. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

35. $x^2 + (y - 0.29)^2 = 3.85^2$

36. $(x - 14.2)^2 + (y - 9.8)^2 = 12.26^2$

37. $x^2 + y^2 - 4x - 14y - 47 = 0$

38. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$

แบบฝึกหัด 3.1

1. (3,0), (3,6), (3,-6), $x = -3$
2. (-1,0), (-1,2), (-1,-2), $x = 1$
3. (0,-4), (-8,-4), (8,-4), $y = 4$
4. (0,2.5), (-5,2.5), (5,2.5), $y = -2.5$
5. (-2,0), (-2,4), (-2,-4), $x = 2$
6. (0,3/4), (-3/2,3/4), (3/2,3/4), $y = -3/4$
7. $y^2 = 12x$
8. $x^2 = -16y$
9. $y^2 = 16x$
10. $x^2 = 24y$
11. $2y^2 - x = 0$
12. $3x^2 + 16y = 0$
13. $x^2 = -12y$
14. $x^2 = -12y$
15. $y^2 + x = 0$

แบบฝึกหัด 3.2

1. $(x-3)^2 = 16y$
2. $(y+2)^2 = 12(x+1)$
3. $(x-3)^2 = 16(y-2)$
4. $(x+2)^2 = -28(y-5)$
5. $(x-1)^2 = 16(y+3)$
6. $(x-3)^2 = -24(y-3)$
7. $(x+1)^2 = -12(y+2)$
8. $(y+1)^2 = 8(x-4)$
9. $(x-1)^2 = -12(y-2)$
10. $(y-3)^2 = 12(x+2)$
11. (2,0), (3,0), (3,-2), (3,2)
12. (0,1), (0,3), (-4,3), (4,3)
13. (-2,0), (2,0), (2,-8), (2,8)
14. (0,-4), (0,-7), (-6-7), (6,-7)

15. (-3,0), (-3,1), (-1,1), (-5,1)

16. (0,-2), (0,2), (-8,2), (8,2)

17. (0,-5), (-5,-5), (-5,5), (-5,-15)

18. (4,0), (4,-3/2), (1,-3/2), (7,-3/2)

19. (3,-1), (0,-1), (0,5), (0,-6)

20. (-2,4), (-2,2), (-6,2), (2,2)

21. (3,1), (3,-3/2), (-2,-3/2), (8,-3/2)

22. (4,4), (5/2,4), (5/2,1), (5/2,7)

23. (6,6), (2,0), (2,-8), (2,8)

24. $(x+1)^2 = 2(y+2)$

25. $(y+4)^2 = -(x-3)$

26. $(y-3/2)^2 = -(x-25/4)$

27. $(x-2)^2 = -(y-9)$

แบบฝึกหัด 3.3

1. 5, 3, 4/5, (±4,0), x = ±25/4, 18/5
2. 13, 5, 12/13, (±12,0), x = ±169/12, 50/13
3. 13, 12, 5/13, (0,±5), y = ±169/5, 288/13
4. 5, 4, 3/5, (±3,0), x = ±25/3, 32/5
5. 7, 5, $\sqrt{34}/7$, $(\pm\sqrt{34},0)$, $x = \pm 49/\sqrt{34}$, 50/7
6. 4, 3, $\sqrt{7}/4$, $(\pm\sqrt{7},0)$, $x = \pm 16/\sqrt{7}$, 9/2
7. 5, 2, $\sqrt{21}/5$, $(\pm\sqrt{21},0)$, $x = \pm 25/\sqrt{21}$, 8/5
8. 3, 3/2, $\sqrt{27}/6$, $(0,\pm\sqrt{27}/2)$, $y = \pm 18/\sqrt{27}$, 3/2
9. 2, 1, $\sqrt{3}/2$, $(\pm\sqrt{3},0)$, $x = \pm 4/\sqrt{3}$, 1
10. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$, (0,±1), y = ±3, $4/\sqrt{3}$
11. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$
12. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$
13. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{20} = 1$
14. $\dfrac{x^2}{117} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

15. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$

16. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$

17. $\dfrac{x^2}{39}+\dfrac{y^2}{64}=1$

18. $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{54}=1$

19. $\dfrac{9x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

20. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

แบบฝึกหัด 3.4

1. $\dfrac{(x-4)^2}{3}+\dfrac{(y+3)^2}{2}=1$

2. $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

3. $\dfrac{(x-5)^2}{(1/2)^2}+\dfrac{(y-2/5)^2}{(2/5)^2}=1$

4. $\dfrac{(x+3/2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{8}=1$

5. $\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$

6. $\dfrac{(x-3)^2}{20}+\dfrac{y^2}{36}=1$

7. $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

8. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

9. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

10. $13x^2 + 62y^2 - 38x - 19y - 43 = 0$

แบบฝึกหัด 3.5

	a	b	e	F	V	D
1.	3	2	$\sqrt{13}/3$	$(\pm\sqrt{13},0)$	$(\pm 3,0)$	$x=\pm 9/\sqrt{13}$
2.	3	5	$\sqrt{34}/3$	$(\pm\sqrt{34},0)$	$(\pm 3,0)$	$x=\pm 9/\sqrt{34}$

3.	4	3	5/4	(0,±5)	(0,±4)	Y=±16/5
4.	6	8	5/3	(0,±10)	(0,±6)	y=±18/5
5.	6	6	$\sqrt{72}$ /6	(± $\sqrt{72}$,0)	(±6,0)	x=±36/ $\sqrt{72}$
6.	7	7	$\sqrt{98}$ /7	(0,± $\sqrt{98}$)	(0,±7)	y=±49/ $\sqrt{98}$
7.	3	4	5/3	(±5,0)	(±3,0)	x=±9/5
8.	8	6	5/4	(±10,0)	(±8,0)	x=±32/5
9.	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}/\sqrt{2}$	(0,± $\sqrt{5}$)	(0,± $\sqrt{2}$)	y=±2/ $\sqrt{5}$
10.	2	$\sqrt{5}$	3/2	(0,±3)	(0,±2)	y=±4/3

11. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
12. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$
13. $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=1$
14. $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$
15. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$
16. $\frac{25y^2}{81}-\frac{x^2}{9}=1$
17. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$
18. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$
19. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$
20. $\frac{x^2}{21}-\frac{4y^2}{189}=1$

แบบฝึกหัด 3.6

1. $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{20}=1$
2. $\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$
3. $\frac{2(y-2)^2}{17}-\frac{3(x+3)^2}{34}=1$

4. $\frac{49(y+8/7)^2}{64}-\frac{7(x+4)^2}{48}=1$

5. $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$

6. $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$

7. $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{16}=1$

8. $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$

9. $\frac{(y+3)^2}{5}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$

10. $2y - x + 1 = 0,\ 2y + x - 1 = 0$

11. $3x + 2y + 3 = 0,\ 3x + 2y - 9 = 0$

12. $\frac{(y-8)^2}{22}-\frac{(x-6)^2}{22}=1$

แบบฝึกหัด 4.2

1. 12
2. 10
3. 7
4. $2x^2$
5. 15
6. 0
7. 0
8. 10
9. 3
10. 3/4

แบบฝึกหัด 5.1

1. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. ต่อเนื่อง
3. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$
4. ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

แบบฝึกหัด 5.2

1. หาค่าไม่ได้
2. 0
3. 0
4. 0
5. 1
6. -1
7. -1
8. 1
9. -1
10. 1
11. 3
12. 1
13. 1
14. 1

แบบฝึกหัด 5.3

1. 0
2. 2/25
3. 1/3
4. 3/2
5. 5/3
6. 2/3
7. 2
8. 0
9. 1

10. -1

11. ∞

12. 2

แบบฝึกหัด 6.1

1. 3
2. $2x$
3. $4x$
4. $2x + 3$
5. $2 - 2x$
6. $-1/(x+1)^2$
7. $-4/x^2$
8. $-2(x+2)^2$
9. $2x - 4$
10. $8x/(4-x)^2$

แบบฝึกหัด 6.2

1. $36x^2 + 5$
2. $20x + 11$
3. $28x - 6$
4. $x^2 + 11$
5. $5x^4 - 42$
6. $3x^2 - 12x + 7$
7. $6x - 15$
8. $6x^2 + 6x + 2$
9. $4x^3 + 18x^2 + 28x + 15$
10. $5x^4 + 32x^3 + 27x^2 - 34x + 3$
11. $4x + 5$
12. $\dfrac{-2x^2 - 5x - 4}{(2x+7)^2}$
13. $\dfrac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 3x + 1)^2}$
14. $\dfrac{x^4 - 12x^2 + 4x}{(x^2 + 4)^2}$
15. $\dfrac{-13}{(2x-1)^2}$

แบบฝึกหัด 7.1

1. $-2\csc^2 2x$
2. $2x\sec x^2 \tan x^2$
3. $3\cos^2 x - 3\sin^2 x$
4. $6\sin^2 2x\cos 2x$
5. $\tan^2(x/3)\sec^2(x/3)$
6. $2\csc^3 2x\cot 2x - 2\csc 2x\cot 2x$ หรือ $2\csc 2x\cot^3 2x$
7. $2 + 2\sec^2 2x$
8. $x\cos x$
9. $\csc^2 2x/\sqrt{\cot 2x}$
10. $8\sec^2 2x\tan 2x$

แบบฝึกหัด 7.2

1. $\pi/2$
2. $2\pi/3$
3. $3\pi/4$, $-\pi/4$
4. $\pi/3$
5. $\pi/3$
6. $4\pi/3$, $-\pi/3$
7. $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
8. $\dfrac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$
9. $\dfrac{5}{1+25x^2}$
10. $\dfrac{-2x}{1+x^4}$
11. $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$
12. $\dfrac{-1}{x\sqrt{x-1}}$
13. 1
14. $\dfrac{3\sec^2 x}{1+9\tan^2 x}$

15. $\dfrac{(1+3x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(x+x^3)^2+1}} + arc\sec(x+x^3)$

แบบฝึกหัด 7.3

1. 1/x
2. $\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$
3. $2\,e^{2x}$
4. $3x^2e^{x^3}$
5. $\cos x\, e^{\sin x}$
6. $\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$
7. $1 + \ln x$
8. $2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}$
9. $3^x \ln 3$
10. $2x10^{x^2} \ln 10$
11. $\dfrac{3}{x}\ln^2 x$
12. $\dfrac{e^x}{x} + e^x \ln|x|$
13. $3^x - \ln 3 - 3\,x^2$
14. $\sin x\, x^{(\sin x - 1)} + x^{\sin x} \ln x \cos x$
15. $\cos^2 x \sin^{\cos x-1} - \sin^{\cos x+1} \ln \sin x$

แบบฝึกหัด 8.1

1. max (3,0) , (1,4)
2. max (2,-10) , (-1,17)
3. min (0,0) , max (1,1), (-1,1)
4. min (1,-3)
5. min (-1,-5), (2,-32) , max (0,0)
6. min (2,2/3) , max (-3,43/2), (2,2/3), (3,43/2)
7. min (1,3) , max (-3,-5)

แบบฝึกหัด 8.2

1. min (-1,-1), (1,-1) , max (0,0)
2. min (2,-25) , max (-1/2,25/4)
3. min (3/2,-16/4) , max (-1,16)
4. min (1,-5) , max (-1,7)
5. min (1,6) , max (-1,18)
6. min (-1/2,-19/4) , max (3,81)
7. min (1,-11) , max (-3,53)
8. min (-2,-15), (0,-15) , max (-1,-14)
9. min (2 ,3) , max (1/2,39/4)
10. min (1/2,-39/8) , max (-5/3,193/27)

แบบฝึกหัด 8.3

1. min (-1,-5) , max (2,22)
2. min (-2,-30) , max (3,245)
3. min (3,-56) , max (-2,69)
4. min (1,0) , (-1,0) , max (-2,9) , (2,9)
5. min (0,-2) , (3,7)
6. min (-3,-49) , max (3,11)

แบบฝึกหัด 8.4

1.