

Expectation & Variance

อ.ปริญญ์ ปิยะวงศศิบาล

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Topics

- **Expectation**

- Law of Large Numbers
- Properties of $E[X]$

- **Variance**

- 2 ways to compute $\text{Var}(X)$
- Properties of $\text{Var}(X)$
- Standard Deviation

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Random Variable Review

- Random Variables
- PMF
- Random Sampling
- Function of RV
- CDF

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Expectation

- $E[X]$ คือ ค่าคาดหวัง (**Expected Value/Expectation**) ของตัวแปรสุ่ม X
เป็นค่าของ X ที่ได้โดยเฉลี่ยจากการชักตัวอย่างซ้ำๆ หลายครั้ง
พูดง่ายๆ: $E[X]$ คือค่าเฉลี่ยของ X
- การคำนวณ: หาก X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต ที่มี PMF เป็น $P_X(x)$
จะได้ว่า

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \cdot P_X(x)$$



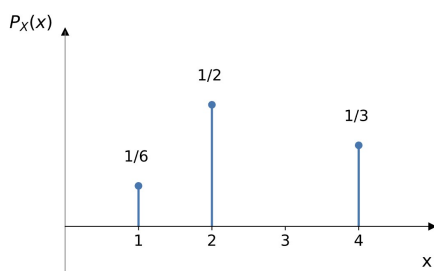
สำคัญมาก

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Expectation

- **Ex:** เล่นเกมที่มีโอกาสได้รางวัล 3 แบบคือ 1, 2, 4 บาทโดยสุ่ม โดยที่ X เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นเงินที่ได้จากการเล่น 1 ครั้ง หาก X มีการแจกแจงดัง PMF ต่อไปนี้

คำถาม: หากเล่นเกมไป 100,000 ครั้ง จะได้รางวัลโดยเฉลี่ยครั้งละกี่บาท



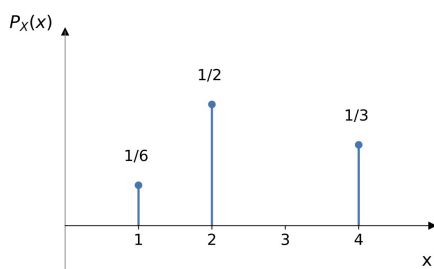
วิธีที่ 1:

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Expectation

- **Ex:** เล่นเกมที่มีโอกาสได้รางวัล 3 แบบคือ 1, 2, 4 บาทโดยสุ่ม โดยที่ X เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นเงินที่ได้จากการเล่น 1 ครั้ง หาก X มีการแจกแจงดัง PMF ต่อไปนี้

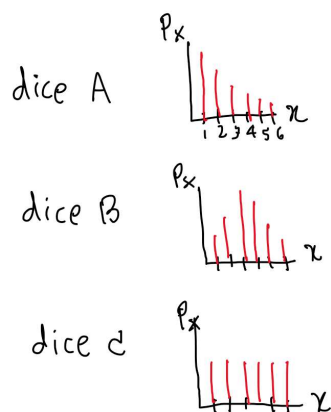
คำถาม: หากเล่นเกมไป 100,000 ครั้ง จะได้รางวัลโดยเฉลี่ยครั้งละกี่บาท



วิธีที่ 2:

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Exercise – วิธีหา $E[X]$ แบบคร่าวๆ โดยดูจากภาพกราฟ PMF



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Law of Large Numbers

ค่าเฉลี่ยของการชักตัวอย่างตัวแปรสุ่ม X จะต้องลู่เข้าสู่ $E[X]$
หากจำนวนครั้งที่ทำ $n \rightarrow \infty$



สำคัญ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Properties of $E[X]$ – Part 1

- $E[g(X)] =$

- ระวัง:

- $E[a] =$

- $E[aX] =$

- $E[aX + b] =$

Properties of $E[X]$ – Part 2

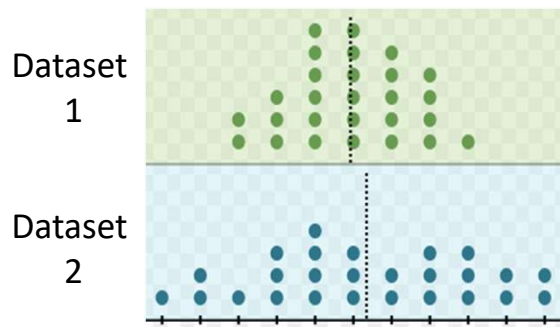
- $E[X + Y] =$

- $E[E[X]] =$

- $E[X - E[X]] =$

Variance

- $Var(X)$ คือ ค่าความแปรปรวน (**Variance**) ของตัวแปรสุ่ม X เป็นที่บ่งบอกถึงการกระจายตัวมาก/น้อยของข้อมูล



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

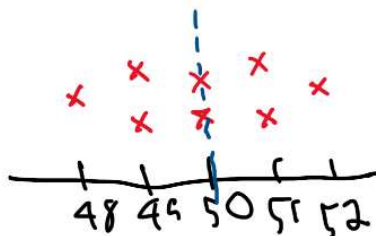
Variance

- นิยาม: $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$



สำคัญ

- ทำความเข้าใจสูตร



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Variance

- วิธีคำนวณ

$$(1) \text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$(2) \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$



สำคัญ

- พิสูจน์ (2):

Variance

- หาก X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต ที่มี PMF เป็น $P_X(x)$ จะได้ว่า

$$\text{Var}(X) =$$

=

Exercise

- กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มี PMF ดังตาราง จงคำนวณหา $\text{Var}(X)$

x	1	2	3	4
$P_X(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

- วิธีที่ 1

Exercise

- กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มี PMF ดังตาราง จงคำนวณหา $\text{Var}(X)$

x	1	2	3	4
$P_X(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

- วิธีที่ 2

Properties of $\text{Var}(X)$

- $\text{Var}(X) \geq 0$
- $\text{Var}(a) =$
- $\text{Var}(aX) =$
- $\text{Var}(aX + b) =$
- ระวัง: $\text{Var}(X + Y) =$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Standard Deviation

- ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation: S.D. หรือ σ_X)
สามารถบ่งบอกถึงการกระจายตัวมาก/น้อยของข้อมูลได้เช่นเดียวกับ variance
- ความสัมพันธ์ระหว่าง σ_X กับ $\text{Var}(X)$:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$



สำคัญ

- ค่า S.D. จะมีประโยชน์มากขึ้นเมื่อเราเรียนถึงเรื่อง Normal Distribution

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

More Expectation Exercise

- ขับรถจากเมือง A ไป B ซึ่งมีระยะทาง 400 km โดยเลือกความเร็วรถโดยสุ่มไม่ 1 km/hr ก็ 200 km/hr ด้วยความน่าจะเป็นเท่าๆ กัน เมื่อเลือกแล้วก็จะขับด้วยความเร็วคงที่ตลอดทาง ให้ V คือตัวแปรสุ่มที่เป็นความเร็วของรถ และ T เป็นเวลาที่ใช้ในการเดินทาง จงหา:

1. $E[V]$

2. $E[T]$

More Expectation Exercise

- ขับรถจากเมือง A ไป B ซึ่งมีระยะทาง 400 km โดยเลือกความเร็วรถโดยสุ่มไม่ 1 km/hr ก็ 200 km/hr ด้วยความน่าจะเป็นเท่าๆ กัน เมื่อเลือกแล้วก็จะขับด้วยความเร็วคงที่ตลอดทาง ให้ V คือตัวแปรสุ่มที่เป็นความเร็วของรถ และ T เป็นเวลาที่ใช้ในการเดินทาง จงหา:

3. $E[TV]$