

Conditional Probability

อ.ปรัชญ์ ปิยะวงศิศาส

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปรัชญ์

Topics

- Conditional Probability
- Product Rule
- Independent Events
- Law of Total Probability
- Bayes' Theorem

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปรัชญ์ ปิยะวงศิศาส

Conditional Probability

- $P(A|B)$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิด A ขึ้นบนเงื่อนไขที่เหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว

- นิยาม:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$$



Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงศา

Conditional Probability

เข้าใจแนวคิดของ $P(A|B)$

เราสามารถตีความ $P(A|B)$ ว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงของ ความเชื่อ เกี่ยวกับ A หลังจากที่ได้รับข้อมูลเกี่ยวกับ B เพิ่มขึ้นมา



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญา

Conditional Probability

- Ex:

- ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ทอยลูกเต๋ได้แล้วได้เลข ≥ 2
- ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ทอยลูกเต๋ได้แล้วได้เลข ≥ 4
- จงหา
 - $P(A)$, $P(B)$
 - $P(A|B)$
 - $P(B|A)$
 - $P(A \cap B)$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Conditional Probability

- Ex2:

- A เป็นเหตุการณ์ที่ทอยลูกเต๋ได้แล้วได้เลขคี่
- B เป็นเหตุการณ์ที่ทอยลูกเต๋ได้แล้วได้เลข ≥ 4
- ความเชื่อเก่า: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- ความเชื่อใหม่: $P(A|B) = \frac{n(\{5\})}{n(\{4,5,6\})} = \frac{1}{3}$ (B เป็นเหมือน sample space ใหม่)

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Product Rule, Chain Rule

- กฎการคูณ: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$
 $= P(B|A) P(A)$
 เป็นจริงเสมอ



สำคัญ

- อธิบายสูตรด้วยแผนภาพต้นไม้

พิสูจน์ที่มา

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงษ์ศิริ

Product Rule, Chain Rule

- หากมี 3 เหตุการณ์ จะได้ว่า

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B|A) P(C|A \cap B)$$

- โดยทั่วไป:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงษ์ศิริ

Example: Birthday Paradox

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Independent Events (เหตุการณ์ที่อิสระจากกัน)

- เหตุการณ์ **A** และ **B** จะเป็นอิสระจากกัน ($A \perp B$) ก็ต่อเมื่อ การที่เราทราบว่า **B** ได้เกิดขึ้นแล้ว ไม่ส่งผลต่อความน่าจะเป็นที่จะเกิด **A** ขึ้น นั่นคือ

$$P(A|B) = P(A)$$

- และด้วยกฎการคูณจะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



สำคัญ

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญ์ วิศวกรรมศาสตร์

Independent Events

- Ex: ในการโยนเหรียญ 3 ครั้ง ให้
 A เป็นเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 1 ออก H
 B เป็นเหตุการณ์ที่ครั้งที่ 2 ออก H
 จงแสดงว่า A, B เป็นอิสระจากกันหรือไม่

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงษ์ศิริดา

Gambler's Fallacy

- Fallacy = ความเข้าใจผิดๆ ที่เชื่อต่อๆ กันมา
- Gambler's Fallacy
 - หากเราโยนเหรียญเที่ยงตรง 5 ครั้งแล้วออก TTTTT
 โอกาสที่ครั้งต่อไปเหรียญจะออก H จะต้องมากกว่า 50%

Doctor: Don't worry, this surgery has a one in a thousand chance in failure, and my last 999 patients were fine.

Civilians:



Mathematicians:



Doctor: "Sir, the surgery has a 50% survival rate, but don't worry, my last 20 patients have all survived"

Normal people



Mathematician



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงษ์ศิริดา

https://twitter.com/kareem_carr/status/155136152713082061

Independent Events

- Ex2: ในการทอยลูกเต๋าทิ้งตรง 1 ครั้ง ให้
 A เป็นเหตุการณ์ที่ทอยแล้วได้เลขคู่
 B เป็นเหตุการณ์ที่ทอยแล้วได้เลขคี่
 จงแสดงว่า A, B เป็นอิสระจากกันหรือไม่

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศา

Independent Events

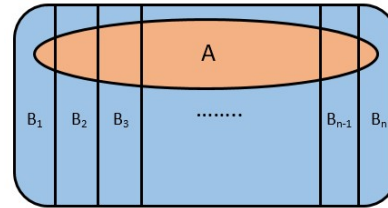
- Ex2: ในการทอยลูกเต๋าทิ้งตรง 1 ครั้ง ให้
 A เป็นเหตุการณ์ที่ทอยแล้วได้เลขคู่
 B เป็นเหตุการณ์ที่ทอยแล้วได้เลขคี่
 จงแสดงว่า A, B เป็นอิสระจากกันหรือไม่

ระวัง ! การที่ $A \cap B = \emptyset$ ไม่ได้หมายความว่า $A \perp B$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศา

Law of Total Probability

- ถ้า B_1, B_2, \dots, B_n เป็น partition ของ Ω



- แล้วจะได้ว่า

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

- นั่นคือ

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศาวัฒนา

<https://qualityengineer.weebly.com/probability/total-probability-law>

Bayes' Theorem

- ทฤษฎีบทของเบส์ สนใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง “สมมติฐาน” (Hypothesis) และ “หลักฐาน” (Evidence)
- เช่น

Hypothesis (H)	Evidence (E)
นาย A เป็นโรคมะเร็งหรือไม่	ผลตรวจเลือดเป็น +
กระเป๋าใบนี้มีวัตถุระเบิดหรือไม่	เซ็นเซอร์ตรวจจะเปิดดัง
อีเมลนี้เป็น spam หรือไม่	ใน subject มีคำว่า “ผู้โชคดี”

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศาวัฒนา

Bayes' Theorem

- ความเชื่อเก่า (Prior): $P(H)$
 - เช่น $P(\text{มะเร็ง}) = \frac{1}{100,000}$
- ความเชื่อใหม่เมื่อมีหลักฐาน (Posterior): $P(H|E)$
 - เช่น $P(\text{มะเร็ง}|\text{ผลเลือดเป็น } +) = \frac{1}{5}$
- ทฤษฎีบทของเบส์

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศาวิชา

Bayes' Theorem

- ตัวอย่าง: การตรวจโรค COVID ด้วย ATK ของบริษัทหนึ่งให้ผลการตรวจที่ถูกต้อง (+) 100% ถ้านำไปตรวจกับคนที่ป่วยจริง แต่ถ้านำไปตรวจกับคนปกติพบว่าให้ผลตรวจผิดพลาดเป็นบวก (+) 0.5% ถ้าในประชากรมีเพียง 0.2% ที่ป่วยโรค COVID จงหาความน่าจะเป็นที่นาย A ติด COVID จริงหากผล ATK เป็น +

$$P(C|+) = \frac{P(+|C)P(C)}{P(+)} = \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C) + P(+|C^c)P(C^c)}$$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญา ธิระวงศาวิชา