

# Random Variables

อ.ปรัชญ์ ปิยะวงศิศาส

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปรัชญ์

## Topics

- Random Variables
- PMF
- Random Sampling
- Function of RV
- Types of RV
- CDF

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปรัชญ์

## Random Variables

- ตัวแปรสุ่ม คือ ผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มที่เป็นตัวเลข
- เช่น
  - เลขที่ออกจากการทอยลูกเต๋า 1 ครั้ง
  - จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดที่สี่แยกในค่าใน 1 วัน
  - จำนวน request ที่เข้ามายัง server ใน 1 ชั่วโมง
  - อุณหภูมิภายในโรงเพาะปลูก
  - ค่า IQ ของประชากรไทย
  - ฯลฯ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

## Random Variables

- Ex: พิจารณา การทดลองสุ่มโยนเหรียญ 2 ครั้ง
    - จะได้ว่า  $\Omega =$
  - กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นจำนวนของ H ที่ออก
  - $X$  มีค่าเป็นอะไรได้บ้าง?
- $S_X =$
- Formally:  $X$  เป็นฟังก์ชันที่ map จาก  $\Omega$  ไปยัง  $\mathbb{R}$

ภาพการ map ค่าจาก  $\Omega$  ไปยัง  $\mathbb{R}$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

## PMF

- พิจารณาการทดลองสุ่ม: โยนเหรียญ 2 ครั้ง
- กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นจำนวนของ H ที่ออก
- เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่  $X=0, X=1, X=2$  ได้ดังนี้
  - $P_X(0)$
  - $P_X(1)$
  - $P_X(2)$
- โดยสังเกตว่า  $P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) =$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

## PMF

- จากตัวอย่างในหน้าก่อน เราสามารถ plot กราฟของ PMF ได้ดังนี้

เราเรียกฟังก์ชัน  $P_X(x) = P(X = x)$  ว่า **Probability Mass Function (PMF)**  
 บางครั้งเราอาจเรียก PMF ว่าเป็น การแจกแจง (**probability distribution**) ของตัวแปรสุ่ม



สำคัญ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

[https://www.probabilitycourse.com/chapter3/3\\_1\\_3\\_pmf.php](https://www.probabilitycourse.com/chapter3/3_1_3_pmf.php)

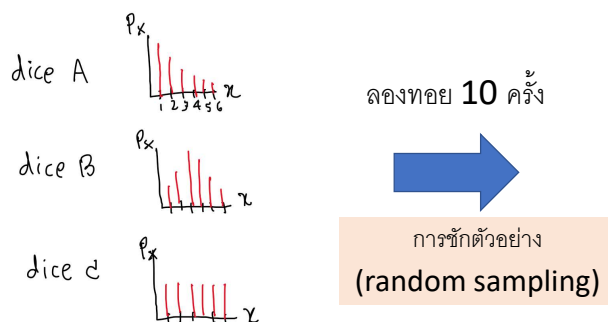
## Properties of PMF

- เนื่องจาก  $P_X(x)$  เป็นค่าความน่าจะเป็น จึงต้องมีคุณสมบัติเป็นไปตาม **axiom** ของความน่าจะเป็น
- คุณสมบัติของ PMF
  - $0 \leq P_X(x) \leq 1$ ; for all  $x$
  - $\sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$
  - for any set  $A \subset S_X$ ,  $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทมา

## PMF & Random Sampling

- PMF ช่วยให้เราเห็นว่าค่าของ  $X$  แต่ละค่ามีโอกาสมากน้อยอย่างไร  
เช่น ให้  $X$  เป็นเลขที่ออกในการทอยลูกเต๋า 1 ครั้ง  
โดยที่ลูกเต๋า A, B, C มี PMF ของ  $X$  ที่แตกต่างกันดังภาพ



Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทมา

## PMF Exercise

- โยนลูกเต๋ายี่สิบตรง 2 ครั้ง กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นผลรวมของเลขที่ออก  
จงวาดกราฟ PMF ของ  $X$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

## Function of RV

- กำหนดให้  $g(X)$  เป็นฟังก์ชันที่ map ค่าของตัวแปรสุ่ม  $X$  ไปยังค่าใหม่
- จะได้ว่า  $Y = g(X)$  ก็จะต้องเป็นตัวแปรสุ่มด้วย
- เช่น
  - $Y = g(X) = X + 1$
  - $Z = h(X) = 2X$

ตัวอย่างภาพการ map ค่าด้วยฟังก์ชัน  $Y$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

## Function of RV

- Ex: หากให้  $X$  เป็นจำนวนของ H ที่ออกจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง แล้ว จง plot PMF ของ  $X$ ,  $Y$  และ  $Z$

PMF ของ  $X$

PMF ของ  $Y = g(X) = X + 1$

PMF ของ  $Z = h(X) = 2X$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

## Types of RV

- ตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิด ได้แก่
  - ตัวแปรสุ่มวิฤต (Discrete RV) คือ ตัวแปรสุ่มที่  $S_X$  นับได้ เช่น จำนวนครั้ง, คะแนนสอบ
  - ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous RV) คือตัวแปรสุ่มที่  $S_X$  นับไม่ได้ เช่น อุณหภูมิ, เวลา

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญ์ ภาควิชาวิศวกรรมศาสตร์

## CDF

- เราสามารถใช้ CDF ในการอธิบาย probability distribution ของตัวแปรสุ่มแทน PMF ได้

- นิยาม: Cumulative Distribution Function (CDF) ของตัวแปรสุ่ม  $X$  คือ

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ for all } x \in \mathbb{R}$$

- คุณสมบัติสำคัญของ CDF:  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงศา

## CDF

- ตัวอย่าง: กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นจำนวนของ  $H$  ที่ออกจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง จงหา CDF ของ  $X$

- ทบทวน: PMF ของ  $X$  คือ

$$\begin{aligned} \bullet P_X(0) &= \frac{1}{4} \\ \bullet P_X(1) &= \frac{1}{2} \\ \bullet P_X(2) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



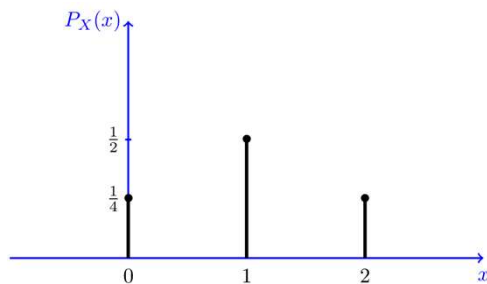
จะได้ว่า CDF ของ  $X$  แบ่งออกเป็น 4 ช่วงคือ

- if  $x < 0$ ;  
 $F_X(x) = P(X \leq x) =$
- if  $0 \leq x < 1$ ;  
 $F_X(x) =$
- if  $1 \leq x < 2$ ;  
 $F_X(x) =$
- if  $x \geq 2$ ;  
 $F_X(x) =$

Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงศา

## CDF plot

- ตัวอย่าง: กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นจำนวนของ  $H$  ที่ออกจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง  
จงหา CDF ของ  $X$



Advanced Pattern Recognition RMUTL อ.ปริญญาธิ์วงศาสดา

## CDF Exercise

- กำหนดให้ PMF ของ  $X$  เป็นดังตาราง

$x$	-2	-1	0	1	2
$P_X(x)$	0.2	0.4	0.1	0.2	0.1

- จงวาดกราฟ CDF ของ  $X$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญา



## CDF Exercise (ต่อ)

- จงหา  $P(X \leq 2)$

- จงหา  $P(-1 < X < 1)$