

Counting

อ.ปรัชญ์ ปิยะวงศิศาส

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปรัชญ์

Topics

- Counting
- Sum Rule & Product Rule
- Permutation
- Combination

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปรัชญ์

Counting

• กฎการนับ (Counting/Combinatorics)

คือหลักการที่ช่วยในการนับจำนวนรูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสิ่งที่เราสนใจ เช่น

- จำนวนวิธีจับคู่กางเกง 5 ตัวกับเสื้อ 4 ตัว
- จำนวนรูปแบบไพ่ 3 ใบที่มีดอกเดียวกันทุกใบ
- จำนวนรูปแบบไพ่ 5 ใบที่เป็น royal straight flush
- จำนวนวิธีเดินทางจากจุด A ไปจุด B บนกราฟ
- จำนวน IP address ที่รองรับโดย IPv6
- จำนวนวิธีมอบหมายงาน 3 งานให้คน 5 คน
- จำนวนวิธีการจัดตารางรถไฟ
- ฯลฯ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

Sum Rule & Product Rule

กฎการบวก (Sum Rule)

แยกกรณี/ทางเลือกขนาน/OR

- หากมีการแยกกรณี
 - r กรณี
 - แต่ละกรณีมีทางเลือก n_i แบบ
- จะได้ว่า จำนวนทางเลือกทั้งหมด มี

$$= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r \text{ แบบ}$$

กฎการคูณ (Product Rule)

ทำงานหลายๆ ขั้นตอนต่อกัน/AND

- หากมีงานที่ทำต่อกันหลายๆ ขั้นตอน
 - r ขั้นตอน
 - แต่ละกรณีมีทางเลือก n_i แบบ
- จะได้ว่า จำนวนทางเลือกทั้งหมด มี

$$= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r \text{ แบบ}$$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

Sum Rule & Product Rule

- **Exercise 1:**

วิธีเดินทางจากกรุงเทพ <-> เชียงใหม่ <-> จันทบุรี
จงหาจำนวนวิธีเดินทางจากกรุงเทพไปจันทบุรีที่เป็นไปได้ทั้งหมด

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทมา

Sum Rule & Product Rule

- **Exercise 2:**

ในตู้เสื้อผ้ามีเสื้อ 4 ตัว เน็คไท 3 ชิ้น กางเกง 2 ตัว
สามารถนำไปแต่งตัวโดยไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทมา

Sum Rule & Product Rule

- **Exercise 3:**

จงหาจำนวนป้ายทะเบียนรถที่เป็นไปได้ทั้งหมด

หากป้ายทะเบียนมี 2 พยัญชนะไทย ตามด้วยตัวเลข 3 หลัก

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Permutation

- **Permutation (การเรียงสับเปลี่ยน)**

คือการนำสิ่งของ n สิ่งมาจัดเรียง แล้วสลับที่กันให้ครบทุกรูปแบบ เช่น การสับไพ่ (Shuffling)

- การคำนวณ **Permutation** มี 3 กรณีหลักๆ ได้แก่

1. กรณีของไม่มีซ้ำ
2. กรณีมีซ้ำบางส่วน
3. กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

1) Permutation - กรณีของไม่มีซ้ำ

- นำสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ แบบ}$$



สูตรนี้สำคัญ

- Ex: นำเลข 1, 2, 3, 4, 5 มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ
 - เริ่มจากลองไล่ตัวอย่าง...

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

1) Permutation - กรณีของไม่มีซ้ำ

- Ex: นำเลข 1, 2, 3, 4, 5 มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ
- วิธีทำ มองเป็นการเลือกเลข 1-5 มาลงในช่อง 5 ช่อง โดยที่ห้ามเลือกเลขซ้ำ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

1) Permutation - กรณีของไม่มีซ้ำ

- Ex 2: การสับไพ่ (Card shuffling) ทำให้ลำดับไพ่ในสำรับเปลี่ยนไปได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ
 - ไพ่ 1 สำรับมี _____ ใบ
 - ในสำรับมีไพ่ซ้ำกันได้หรือไม่:
 - ดังนั้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด:

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

2) Permutation - กรณีมีของซ้ำบางส่วน

- นำสิ่งของ n สิ่ง มาเรียงสับเปลี่ยน โดยที่ในนั้นมีสิ่งซ้ำกันบางส่วน และในกลุ่มสิ่งซ้ำกันนั้น ซ้ำกันอยู่ r_1, r_2, \dots, r_k ครั้ง จะได้ว่าสามารถเรียงสับเปลี่ยนได้

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \quad \text{แบบ}$$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

2) Permutation - กรณีมีของซ้ำบางส่วน

- Ex: จงหาจำนวนรูปแบบการเรียงสับเปลี่ยน AAABBCCCC ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- Q: คำตอบควรจะ มากกว่า หรือ น้อยกว่า 9!

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

3) Permutation - กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

- เลือก ของ r สิ่งจาก n สิ่งที่แตกต่างกันมาเรียงสับเปลี่ยนได้

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ แบบ}$$



สูตรนี้มาได้อย่างไร ??

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

3) Permutation - กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

- **Ex:** สามารถเลือก 3 เลขจาก 1, 2, 3, 4, 5 มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ
- วิธีทำ
 - ลองไล่ตัวอย่าง

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

3) Permutation - กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

- **Ex:** สามารถเลือก 3 เลขจาก 1, 2, 3, 4, 5 มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ
- วิธีทำ
 - ลองไล่ตัวอย่าง
 - สามารถมองเป็นแผนภาพต้นไม้/การเติมของใส่ช่องได้

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

3) Permutation - กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

- สำหรับกรณีทั่วไป (เลือก r สิ่งจาก n สิ่งมาเรียงสับเปลี่ยน)

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

3) Permutation - กรณีเลือกของมาเรียงสับเปลี่ยน

- สรุป เลือกของ r สิ่งจาก n สิ่งที่แตกต่างกันมาเรียงสับเปลี่ยนได้

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ แบบ}$$

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Combination

- **Combination** (การจัดหมู่/การเลือกมาเฉยๆ/การเลือกโดยที่ลำดับไม่มีผล)
คือการเลือกของ r สิ่งจาก n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยไม่สนลำดับ

- **Ex**

- เลือกนักเรียน 2 คน จาก 5 คนมาเข้าเวรทำความสะอาด
- จั๋วไฟ 3 ใบจากสํารับ
- เลือก vertex 2 จุดจากกราฟโดยสุ่ม

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Combination

- **Ex:** สามารถเลือก 3 เลขจาก 1, 2, 3, 4, 5 ได้กี่แบบ
- วิธีทำ
 - ลองไล่ตัวอย่าง (คล้ายกับ $P_{5,3}$)

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

Combination

- Ex: สามารถเลือก 3 เลขจาก 1, 2, 3, 4, 5 ได้กี่แบบ
- วิธีทำ
 - Trick: มองเป็นการเรียงสับเปลี่ยนเลข 00111

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

Combination

- สรุป สามารถเลือกของ r สิ่งจาก n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยไม่สนลำดับการเลือกได้

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ แบบ}$$



สูตรนี้สำคัญมาก ๆ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปัทม์

แบบฝึกหัด 1

- ตัวอักษรภาษาญี่ปุ่นแบบ hiragana ในปัจจุบัน มีทั้งหมด 46 ตัวอักษร ตั้งแต่ あ จนถึง ん เราสามารถนำมาสร้างเป็นคำที่มีความยาว 3 ตัวอักษรได้ทั้งหมดกี่แบบ ในกรณีต่อไปนี้
 - กรณีใช้ตัวอักษรซ้ำได้
 - กรณีไม่ใช้ตัวอักษรซ้ำ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

แบบฝึกหัด 2.1

- จงหาจำนวนรูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการจั่วไพ่ 3 ใบจากสำรับ

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

แบบฝึกหัด 2.2

- จงหาจำนวนรูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการจั่ว 3 ใบแล้วไม่ได้ไพ่ Q เลย

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์

แบบฝึกหัด 2.3

- จงหาความน่าจะเป็นที่จั่วไพ่ 3 ใบโดยสุ่มแล้วไม่ได้ Q เลย

Probability and Statistics for Engineering @ RMUTL อ.ปริญญ์