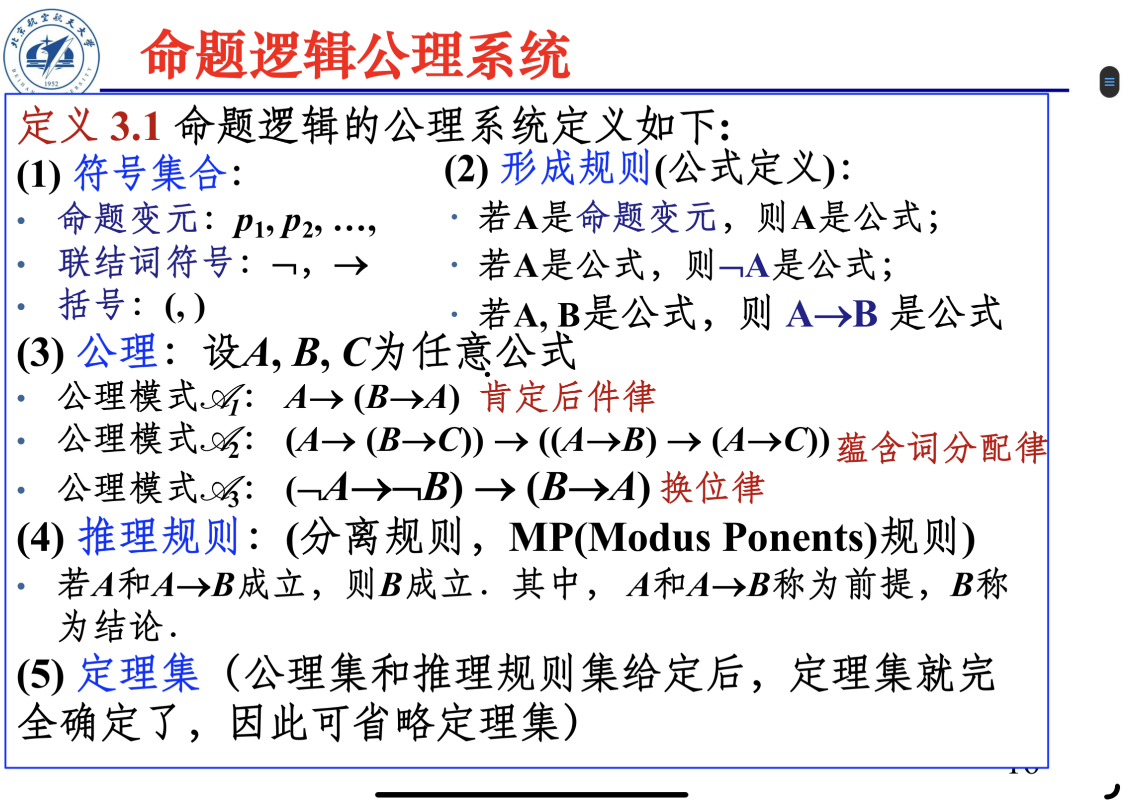
离散数学

命题逻辑的公理模型

命题逻辑的公理模型是指命题逻辑体系的一组基本假设或公理，它们构成了逻辑体系的基础，并用于推导出其他命题的真值。这些公理是不可证明的，而是被接受为起点，用于构建逻辑体系。

在经典的命题逻辑中，通常会采用一些公理作为基础，如排中律（任何命题要么为真，要么为假）、矛盾律（任何命题的否定与其本身的否定相矛盾）、恒真律（一些命题总是真）等。这些公理形成了逻辑推理的基础，允许我们进行严格的推导。



命题逻辑的三段论

命题逻辑的三段论是一种基本的逻辑推理形式，它由三个命题组成：一个前提命题，一个中间命题以及一个结论命题。三段论的推理形式如下：

1. **主前提**（Major Premise）：一个一般性的命题，它是已知的前提条件。
2. **次前提**（Minor Premise）：另一个命题，它是与主前提相关的具体情况或情节。
3. **结论**（Conclusion）：从主前提和次前提中推导出的命题。

三段论的推理模式可以用如下的形式表示：

- 如果主前提为A，则次前提为B。
- 主前提为A。
- 因此，结论为B。

例如，一个常见的三段论形式是：

- 所有人类都会死亡（主前提）。
- 小明是人类（次前提）。
- 因此，小明会死亡（结论）。

三段论

例：如果“苏格拉底是人”和“如果苏格拉底是人，则他会死”同时成立，可以推出苏格拉底会死

- 如果苏格拉底是人，则苏格拉底会死　$q \rightarrow r$
- 苏格拉底是人　q
- 苏格拉底会死　r

$$q, q \rightarrow r \vDash r$$

公理系统的完备性、独立性

1. **完备性（Completeness）**：

   完备性指的是一个公理系统能够推导出该系统中的所有真命题，或者说系统中的每一个真命题都可以在该系统中得到证明。如果一个公理系统是完备的，那么它能够覆盖该逻辑体系内的所有可能情况。

2. **独立性（Independence）**：

   独立性指的是公理系统中的每一个公理都是必需的，没有一个公理是可以从其他公理推导出来的。如果一个公理系统是独立的，那么移除任何一个公理都会导致系统的不完备性。

可靠性和完备性

- 可靠性
  - 在推理的过程中，要保持推理的公式序列中每一个公式的正确性，要求两点：
    - 前提的永真性（公式集Γ、公理和由MP规则推出的公式）
    - 规则的永真性（MP规则）

有了上述永真性的保证，就可以确保在推理过程中，只要有了给定的公式集和公理，则推理得到的所有结论一定是永真的.

  - 可靠性是公理系统的最基础的要求
- 完备性
  - 具有完备性的公理系统可以推出所有的永真式

87

关系的定义

关系

定义 设X，Y是集合，若$R \subseteq X \times Y$，则称 R 为从X到Y的关系，简称为关系R。

将$<x, y> \in R$ 表示为 xRy，读作 “x 和y 有关系 R ”。将 $<x, y> \notin R$表示为x$\underline{R}$y，读作 “x 和y没有关系R ”。

什么是集合的划分

定义：设X是非空集合，若存在X的一个子集族E满足：

(1).$\varnothing \notin E$

(2).任意S_i, $S_j \in E$，若$S_i \neq S_j$，则$S_i \cap S_j = \varnothing$。

(3).$\cup\ S_k = X$

则称E为X的一个划分，E的元素称为分块。

若E是一个划分，则由E可以构造一个等价关系

自反、对称、传递、闭包的概念

定义设 R 是集合 X 上的关系，若对于每个 $x\in X$ 都有 $\langle x,x\rangle\in R$，则称 R 为自反的。即

$\forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x,x\rangle\in R)$。

定义设 R 是集合 X 上的关系，若对于 x, y∈X，$(x,y)\in R$，则有 $(y,x)\in R$，就称 R 是对称的。

即

$\forall x\forall y\,(x\in X \wedge y\in X \wedge (x,y)\in R\rightarrow (y,x)\in R)$ 。

定义设 R 是集合 X 上的关系，若对于每个 x, y,z∈X，$(x,y)\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$，则有 $\langle x,z\rangle\in R$，就称 R 是传递的。即

$$\forall x\forall y\forall z\,(x\in X\wedge y\in X \wedge z\in X \wedge (x,y)\in R\wedge \langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$$

定义：设 R 是集合 X 上的关系，若集合 X 上的关系 R′ 满足以下三个条件，则称 R′ 为R 的自反闭包（对称闭包、传递闭包）。

(1) R′ 是自反的（对称的、传递的）；

(2) $R\subseteq R'$；

(3) 对于 X 上的任何自反的（对称的、传递的）关系 R″，只要 $R\subseteq R''$，就有 $R'\subseteq R''$。

半序、全序、偏序、良序关系的定义

- 定义：设X是非空集合， R 是X上的关系，若 R 自反的、反对称的、传递的，则 R 称为偏序关系或偏序。记为“$\leqslant$ ”。
- 定义：若X是集合，R是集合X上的偏序关系，则 $<X, \leqslant>$称为偏序集

- 定义：若 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 中至少有一个成立，则称 x 和 y 是可比的。
- 定义：设$<X, \leqslant>$是偏序集，若对于任意$x, y \in R$，都有$x \leqslant y$或者$y \leqslant x$，则称R是全序集，称 $\leqslant$ 为全序，或线序。

$$\forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \rightarrow x \leqslant y \vee y \leqslant x)$$

- 数的大小关系$\leq$ 为全序关系

- 定义：设$<X, \leqslant>$是偏序集，若对于任意X的子集都有最小元，则称$<X, \leqslant>$为良序集。

- 良序一定是全序，<u>有穷</u>集合的全序一定是良序

等价关系的定义、整除是等价关系吗

- 定义：设$X \neq \varnothing$，$R \subseteq X \times X$，若R是自反的、对称的和传递的，则称R为X上的等价关系，简称等价关系。

单射、满射、双射的定义

1. **单射（Injective）：**
   一个函数 f：A → B 被称为单射，如果对于不同的输入元素 a_1 和 a_2（$a_1 \neq a_2$），它们的映射值 $f(a_1)$ 和 $f(a_2)$ 也是不同的。换句话说，如果每个不同的输入元素都映射到不同的输出元素，那么这个函数是单射的。数学上可以表示为：对于任意的 $a_1, a_2 \in A$，如果 $f(a_1) = f(a_2)$，则 $a_1 = a_2$。
2. **满射（Surjective）：**
   一个函数 f：A → B 被称为满射，如果对于集合 B 中的每个元素 b，都存在集合 A 中的至少一个元素 a，使得 f(a) = b。换句话说，函数的值域等于集合 B，即函数能够覆盖集合 B 中的每一个元素。
3. **双射（Bijective）：**
   一个函数 f：A → B 被称为双射，如果它既是单射又是满射。换句话说，对于每一个不同的输入元素 a_1 和 a_2（$a_1 \neq a_2$），它们的映射值 $f(a_1)$ 和 $f(a_2)$ 也是不同的，同时函数的值域等于集合 B。双射函数是一种一一对应的函数，它能够建立集合 A 和集合 B 之间的一一对应关系。

集合的递归定义

在数学中，可以使用递归定义来定义集合。递归定义是一种通过基本情况和递归规则来构造集合的方法。通常，递归定义包括以下两个重要部分：

1. 基本情况（Base Case）：基本情况是定义集合中的最基本元素或情况。它是一个非递归的定义，用来作为递归定义的起点。基本情况通常是明确的、直观的定义，不需要依赖于递归规则。
2. 递归规则（Recursive Rule）：递归规则是一种描述如何构造集合的规则，通常基于已经定义的集合元素。递归规则指定了如何从已知的集合元素构造出新的集合元素。这些规则可能会包含对之前定义的集合的引用，从而使定义变得递归。

下面是一个示例，演示如何递归地定义自然数集合 ℕ（包括0和正整数）：

基本情况：

- 0 是自然数。

递归规则：

- 如果 n 是自然数，那么 n+1 也是自然数。

在这个示例中，基本情况是0是自然数，而递归规则说明如果 n 是自然数，那么 n+1 也是自然数。通过这个递归定义，可以构造出自然数集合 ℕ，包括0和所有正整数。

集合的对称差

在集合论中，两个集合的对称差是指这两个集合中所有不重复元素的集合。通常用符号 ⊕ 表示对称差运算。

如果给定两个集合 A 和 B，它们的对称差可以表示为：

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

笛卡尔积的定义

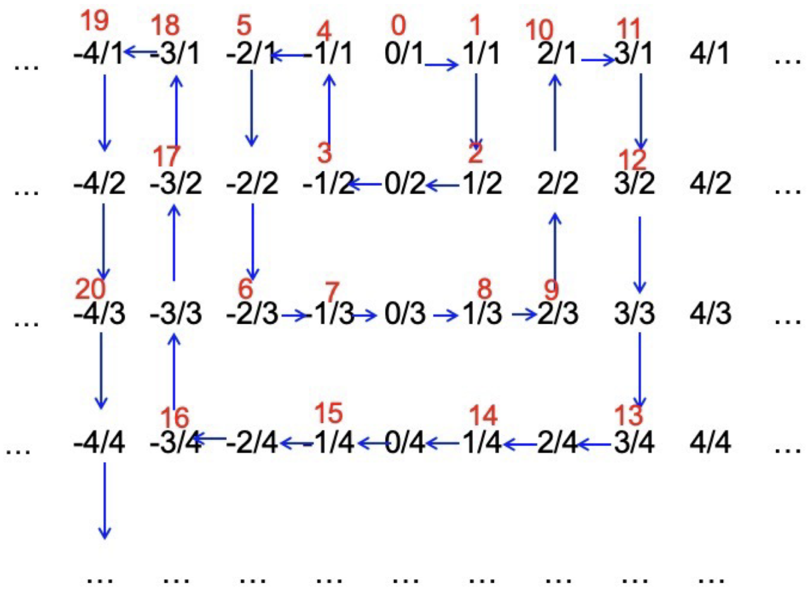
在集合论中，笛卡尔积（Cartesian product）是两个集合的乘积集合，它包含了所有可能的有序对，其中第一个元素来自第一个集合，第二个元素来自第二个集合。笛卡尔积通常用符号 "×" 表示。

如果有两个集合 A 和 B，它们的笛卡尔积可以表示为：

A × B = {(a, b) | a ∈ A 且 b ∈ B}

自然数和有理数一样多吗？如何证明？

例：有理数集合 Q是可数集.



39

集合的势

在集合论中，集合的势（cardinality）是用来描述集合的大小或元素数量的概念。势通常表示为 "|" 符号，表示集合中的元素数量。集合的势可以分为不同的级别，具体取决于集合的大小。以下是一些常见的集合势：

1. 有限集合：如果一个集合包含有限数量的元素，那么它的势就是一个正整数。例如，如果集合 A = {1, 2, 3, 4, 5}，那么 |A| = 5，表示集合 A 包含了5个元素。
2. 可数无穷集合：可数无穷集合的势是可数的，通常用符号 "$\aleph_0$"（aleph-null）表示。这表示集合中的元素可以用自然数（1, 2, 3, ...）进行一一对应。例如，自然数集合 N 的势是可数无穷。
3. 不可数无穷集合：不可数无穷集合的势是不可数的，通常用符号 "$\aleph_1$"（aleph-one）表示。这表示集合中的元素数量比可数无穷集合更多，无法用自然数进行一一对应。例如，实数集合 R 的势是不可数无穷。

Cantor's Theorem（Cantor 定理）表明，不同的无穷集合可以具有不同的势，即不同的大小。这个定理由数学家 Georg Cantor 在19世纪末提出，它揭示了无穷集合的丰富和多样性，以及它们之间的势的差异。

需要注意的是，集合的势是一个抽象的概念，它不仅用于有限集合，还用于描述无限集合的大小和比较。不同势的集合在集合论、数学分析以及其他数学领域中都有重要的应用。

欧拉图、哈密顿图的定义

1. **欧拉图（Eulerian Graph）：**

   一个图是欧拉图，如果存在一条通路（path），它经过图中每一条边（edge）且仅经过一次，这样的通路被称为欧拉通路。如果存在一条回路（circuit），它经过图中每一条边且仅经过一次，这样的回路被称为欧拉回路。一个图要成为欧拉图，必须满足以下条件：

   - 图必须是连通图，即在图中的任意两个顶点都存在至少一条路径相连。
   - 每个顶点的度数（边的数量）必须是偶数。在欧拉回路中，每个顶点的度数都是偶数；在欧拉通路中，除了两个端点外，其它顶点的度数也必须是偶数。

   欧拉图得名于瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler），他首次研究了这种类型的图。

2. **哈密顿图（Hamiltonian Graph）：**

   一个图是哈密顿图，如果存在一个哈密顿回路，即一个简单回路，它经过图中每个顶点且仅经过一次。哈密顿图的定义要求遍历每个顶点，但不要求遍历每条边。一个图要成为哈密顿图，必须满足以下条件：

   - 图必须是连通图，即在图中的任意两个顶点都存在至少一条路径相连。
   - 对于图中的每一对不同的顶点 u 和 v，存在一条从 u 到 v 的哈密顿路径（不需要回路）。

   哈密顿图得名于爱尔兰数学家威廉·哈密顿（William Rowan Hamilton），他首次研究了这种类型的图。