高等数学

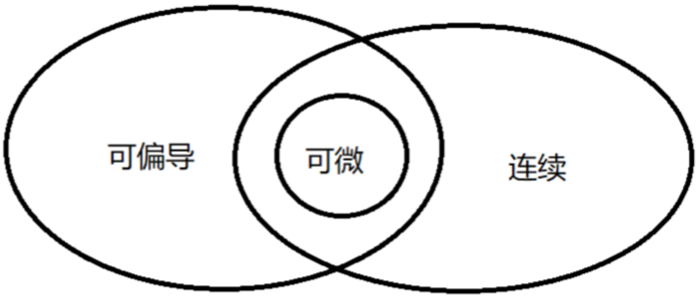
1. **可微、可导、连续的关系**

   对于一元函数，可微和可导等价，可导必连续，连续不一定可导

   对于多元函数，可偏导不一定连续；连续也不一定可偏导。

   连续不一定可微；可微一定连续。

   可偏导不一定可微；可微一定可偏导。



   （多元函数中不存在可导的概念，只有偏导数存在的概念）

   - 极限的定义：

     定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义．如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

     $$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

     那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

     $$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当 } x \to x_0).$$

   - 连续的定义：

     设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

     $$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),$$

     那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续．

   - 可微的定义：

定义1

设函数$y=f(x)$定义在点x_0的某邻域$U(x_0)$上，当给x_0一个增量Δx，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$时，相应地得到函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果存在常数A，使得Δy能表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1)$$

则称函数f在点x_0可微，并称（1）式中的第一项$A\Delta x$为f在点x_0的微分，记作 [1]

$$dy|_{x=x_0}=A\Delta x \quad or \quad df(x)|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

由定义可见，函数的微分与增量仅相差一个关于Δx的高阶无穷小量，由于dy是Δx的线性函数，所以当$A\neq 0$时，也说微分dy是增量Δy的线性主部。

容易看出，函数f在点x_0可导和可微是等价的。

定理1（可微的充要条件）

函数f在点x_0可微的充要条件是函数f在点x_0可导，而且（1）式中的A等于$f'(x_0)$。 [1]

由定理1可知：一元函数中，可微和可导是等价的

- 可积的定义：

定理 2 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

- 可导的定义：

假设函数$y=f(x)$在点x_0处的邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx($x_0+\Delta x$仍然在x_0的邻域内)，相应的函数取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$在$\Delta x\to 0$时的极限存在，称为函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导。它的导数写成$f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$f'(x_0)$也可以记成$\frac{dy}{dx}$，或者$\frac{df(x)}{dx}$。

如果函数$y=f(x)$在开区间I内可导，说明对于任意$x\in I$，都存在一个确定的导数值。所以我们就得到了一个新的函数，这个函数称为是原函数$f(x)$的导函数，记作$f'(x)$。

2. **函数极限的定义，多元极限的定义**

定义：设函数f(x)在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε，都∃$\delta>0$，使不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$在$|x-x_0|\in(0,\delta)$时恒成立，那么常数a就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$

多元极限

多元极限是微积分中的一个概念，用于描述函数在多个变量同时趋近于某一点时的极限值。

对于一个定义在某个区域内的二元函数 $f(x,y)$，如果对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得只要点 (x,y) 满足不等式 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，就有

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

其中，L 是一个实数，那么我们说在点 (x_0,y_0) 处的函数 $f(x,y)$ 有一个极限，其极限值为 L，并记为：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

这意味着当点 (x,y) 靠近 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 的值越来越接近 L，无论路径如何，只要点 (x,y) 距离 (x_0,y_0) 足够近，函数值与极限值之间的差距可以被控制在任意小的范围 ε 内。

多元极限的定义可以进一步扩展到更多的变量，如三元函数或更多元函数，原理类似，只是在定义中需要考虑多个变量的趋近性。

3. **函数在某一点连续的定义**

   在数学中，一个函数在某一点连续的定义如下：$f(x)$在点a的某个领域内有定义。

   1. 函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处有定义，即 $f(a)$ 有意义。
   2. 函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处存在极限，即：$\lim_{x\to a} f(x)$存在。
   3. 函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的极限值等于函数值，即：$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

   如果这三个条件同时满足，那么我们称函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续。

4. **拉格朗日中值定理的定义**

   高等数学中的三个中值定理是微积分中的基本定理之一，它们描述了函数在某个区间内的平均行为与函数在某一点的瞬时行为之间的关系。

   - **拉格朗日中值定理**适用于连续函数，并指出：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且在开区间 (a,b) 内可导，那么存在一个点 c，其中 $a<c<b$，使得：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

这个定理说明在某一点 c 处，函数的导数等于在区间 $[a, b]$ 上的平均变化率。（条件:闭区间连续，开区间可导）

(闭区间连续 开区间可导，切线割线斜率)

- **柯西中值定理**也适用于连续函数，但它强调了两个函数之间的关系。如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并且在开区间 (a, b) 内可导，且 $g'(x)$ 不为零，则存在一个点 c，其中 $a < c < b$，使得：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(闭区间连续 开区间可导，g' ≠ 0，割线之比 = 导数之比)

- **罗尔中值定理**适用于连续函数，它强调了函数在**两个端点处的值相等**的情况。如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，并且 $f(a) = f(b)$，那么存在一个点 c，其中 $a < c < b$，使得：

$$f'(c) = 0$$

这个定理说明了在某一点 c 处，函数的导数等于零，即函数在这一点的切线是水平的。

5. **什么是凸函数**

一个函数 $f(x)$ 被称为凸函数，如果对于任意 x_1 和 x_2，以及任意 $0 \leq \lambda \leq 1$，都满足以下不等式：

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

其中，x_1 和 x_2 是函数的定义域内的任意两个点，λ 是一个权重参数。

换句话说，如果连接函数图像上的两点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的线段位于函数图像的上方，那么该函数是凸函数。

凸函数具有一些重要的性质：

- **切线上界性质**：在凸函数的任何一点，切线的斜率是该点处的导数值，而且切线位于函数图像的上方。
- **二阶导数的非负性**：如果一个函数是二次可导的，并且它的二阶导数在整个定义域上都非负，那么该函数是凸函数。
- **局部最小值是全局最小值**：凸函数的局部最小值也是全局最小值。这意味着在凸函数中，找到局部最小值就等于找到全局最小值。

6. **函数极值的求法**

   1. 寻找**导数为零**的点

   函数的极值通常出现在导数等于零的点。这是因为在极值点，函数的斜率（导数）会变为零。因此，首先需要找到函数的导数，并解方程 (f'(x) = 0) 以找到可能的极值点。

   2. 使用**二阶导数**测试

   一旦找到导数为零的点，可以使用二阶导数来测试这些点是否为极值点。具体方法如下：

   - 如果 (f''(x) > 0)，则在 (x) 处存在一个局部极小值。
   - 如果 (f''(x) < 0)，则在 (x) 处存在一个局部极大值。
   - 如果 (f''(x) = 0)，则无法确定极值，需要采用其他方法或者考虑更多信息。

   3. **边界条件**

   如果函数在一个有界区间上定义，那么还需要考虑边界条件。这意味着需要检查函数在区间的端点是否是极值点。

   4. 综合分析

   综合考虑以上几个步骤的结果，可以得出函数的极值点的位置和值。**需要注意的是，有些函数可能有多个极值点，包括局部和全局极值。**

7. **格林公式、斯托克斯公式**

   求闭合曲线的面积或体积

格林公式（Green formula）

> 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有
> $\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$，这里 L 为闭区域的边界曲线并取正向。

高斯公式（Gauss formula）

> 设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围城，若函数P,Q,R 在 V 上连续，且有一阶的连续偏导数，则 $\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$，
> 其中 S 取外侧。

斯托克斯公式（Stokes formula）

> 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R在 S （连同 L)上连续，且有一阶的连续偏导数，则
> $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx$
> $+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
> ，其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定。

8. 学过哪几种级数，他们的定义

> 设 $\{u_n\}$ 是一个数列，我们引入形式的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+...+u_n+...$ 并称之为无穷级数，或简称为**级数(series)**，称 u_n 为该级数的**通项**.

必须强调的是，级数是一个无穷求和，本身已经是对某个数列求和了，而不是一个数列.

如果极限存在并有限，那么级数被称为**收敛**，并且其和等于该极限值。如果极限不存在或为无穷大，那么级数被称为**发散**，其和没有定义。

在数学中，有许多重要的级数，其中一些包括：

- **等比级数**：具有形式 `S = a + ar + ar² + ar³ + ...`，其中 `a` 是首项，`r` 是公比。
- **调和级数**：具有形式 `S = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...`，它是一个经典的发散级数。
- **幂级数**：具有形式 `S = c₀ + c₁x + c₂x² + c₃x³ + ...`，在微积分和数学分析中非常重要。
- **傅里叶级数**：用于分解周期函数为正弦和余弦函数的级数。

9. 导数、二阶导数、偏导数的定义、意义

- 导数

假设函数$y=f(x)$在点x_0处的邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量$\Delta x(x_0+\Delta x$仍然在x_0的邻域内)，相应的函数取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果$\frac{\Delta y}{\Delta x}$在$\Delta x\to 0$时的极限存在，称为函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导。它的导数写成$f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$f'(x_0)$也可以记成$\dfrac{dy}{dx}$，或者$\dfrac{df(x)}{dx}$。

如果函数$y=f(x)$在开区间I内可导，说明对于任意$x\in I$，都存在一个确定的导数值。所以我们就得到了一个新的函数，这个函数称为是原函数$f(x)$的导函数，记作$f'(x)$。

- 二阶导数

> 以导数定义法定义：如果函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$在x处可导，则称y'的导数为函数$y=f(x)$在点x处的二阶导数，记为y''、$f''(x)$。[3]
>
> 以极限定义法定义：函数$f(x)$在x_0处的二阶导数$f''(x_0)$是导函数$y=f'(x)$在x_0处的导数，即 [4]
>
> $$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$
>
> [4]

- 偏导数

定义　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\qquad(2-1)$$

存在，那么称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad \text{或}\quad f_x(x_0,y_0).①$$

例如，极限(2－1)可以表为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.\qquad(2-2)$$

类似地，函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},\qquad(2-3)$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad \text{或}\quad f_y(x_0,y_0).$$

10. **微分的定义**

微分是**一个变量在某个变化过程中的改变量的线性主部。**

若函数$y=f(x)$在点x处有导数$f'(x)$存在，则y因x的变化量$\triangle x$所引起的改变量是$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)=f'(x)\cdot\triangle x+o(\triangle x)$，式中$o(\triangle x)$随$\triangle x$趋于$0$。

y的微分是$\triangle y$的线性主部：$dy=f'(x)\triangle x$。

通常把自变量x的增量$\triangle x$称为自变量的微分，记作dx。

11. **梯度是什么，和导数的关系**

 方向导数：给定方向的变化率

梯度：由各自变量的偏导组成的向量。 意义：函数值增长最快的方向，即变化率最大的方向

12. **泰勒公式的定义和意义**

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上具有 $(n+1)$ 阶的导数，那么对于任一 $x\in(a,b)$ ，有 [4]

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ，此处的 ε 为 x_0 与 x 之间的某个值。$f(x)$ 称为 n 阶泰勒公式，其中，

$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 n 次泰勒多项式，它与 $f(x)$ 的误差

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 n 阶泰勒余项 [4] [5-6] [2] 。

 泰勒公式的几何意义是利用多项式函数来逼近原函数，由于多项式函数可以任意次求导，易于计算，且便于求解极值或者判断函数的性质，因此可以通过泰勒公式获取函数的信息，同时，对于这种近似，必须提供误差分析，来提供近似的可靠性 [8] 。

13. **如果一个微分方程的解中有一个任意常数，那么该解是不是一定是微分方程的通解**

不一定，要求独立任意常数的个数与微分方程的阶相同。

▶1. **常微分方程** 含有自变量、自变量的未知函数以及未知函数的导数或微分的方程式称为微分方程．当未知函数是一元函数时，则称为常微分方程．

▶2. **线性微分方程与非线性微分方程** 以未知函数和它的各阶导数作为总体是一次的就称为线性微分方程，否则就称为非线性微分方程．

▶3. **微分方程的阶** 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶．以 x 为自变量，以 $y(x)$ 为未知函数的 n 阶微分方程的一般形式是 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，其中 F 是已知的 $n+1$ 元函数．

▶4. **微分方程的解** 若把某函数及其导数代入微分方程能使该方程成为恒等式，则称这个函数是该微分方程的一个解．通常要求微分方程的解具有和该微分方程的阶数同样阶数的连续导数．

▶5. **微分方程的通解和特解** 含有与微分方程的阶数相同个数的独立任意常数的解，称为微分方程的通解．通解也可以称为一般解；不含任意常数或任意常数确定后的解，称为微分方程的特解．

▶6. **微分方程的初始条件与初值问题** 能确定通解中的任意常数的条件称为定解条件，初始条件是定解条件中最常见的类型．初始条件的形式与方程的阶数有关，一般说，以 x 为自变量，以 $y(x)$ 为未知函数的 n 阶微分方程的初始条件为：

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_{n-1},$$ 其中 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 是任意给定的常数．

n 阶微分方程和它的初始条件组成一个定解问题

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}_{(x_0)}=y_{n-1}\end{cases}$$

称为 n 阶微分方程的初值问题．

14. **傅里叶变换的定义**

一般情况下，若“傅里叶变换”一词不加任何限定语，则指的是“连续傅里叶变换”（连续函数的傅里叶变换）。定义傅里叶变换有许多不同的方式。本文中采用如下的定义：（连续）傅里叶变换将可积函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$表示成复指数函数的积分形式或级数形式。

$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-2\pi ix\xi}\,dx$，$\xi$ 为任意实数。ξ 的定义域为频域。

若约定自变量 x 表示*时间*（以秒为单位），变换变量ξ 表示频率（以赫兹为单位）。在适当条件下，$\hat{f}$ 可由**逆傅里叶变换**（inverse Fourier transform）由下式得到f：

$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\,e^{2\pi i\xi x}\,d\xi$，$x$ 为任意实数。x 的定义域为时域。

傅里叶逆定理表明 f 可由$\hat{f}$ 确定，傅里叶在其1822年出版的著作《热分析理论（页面存档备份，存于互联网档案馆）》（法语：Théorie analytique de la chaleur）中首次引入这个定理。虽然现在标准下的证明直到很久以后才出现。f 和$\hat{f}$ 常常被称为*傅里叶积分对*或*傅里叶变换对*。

15. **拉普拉斯算子的定义**

对函数先做梯度运算再做散度运算的结果，是**所有非混合二阶偏导数的和**

查 • 论 • 编

拉普拉斯算子是 n 维欧几里得空间中的一个二阶微分算子，其定义为对函数 f 先作梯度运算（∇f）后，再作散度运算（$\nabla \cdot \nabla f$）的结果。因此如果 f 是二阶可微的实函数，则 f 的拉普拉斯算子定义为：

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \text{ — (1)}$$

f 的拉普拉斯算子也是笛卡儿坐标系 x_i 中的所有非混合二阶偏导数：

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ — (2)}$$

作为一个二阶微分算子，对于 $k \geq 2$，拉普拉斯算子把 C^k 函数映射到 C^{k-2} 函数。表达式（(1)或(2)）定义了一个算子Δ：$C^k(\mathbf{R}^n) \to C^{k-2}(\mathbf{R}^n)$，或更一般地，定义了一个算子Δ：$C^k(\Omega) \to C^{k-2}(\Omega)$，对于任何开集Ω。

函数的拉普拉斯算子也是该函数的海森矩阵的迹：

$$\Delta f = \operatorname{tr}(H(f)).$$

梯度和散度的定义：

标量场的梯度是一个矢量场

散度作用于矢量，得到的结果是一个标量

2. 梯度（Gradient）

当 ∇ 作用于标量 s 时即可得到该标量在空间中的梯度，下面列出了CFD中梯度的各种表达形式：

$$grad\ s = \nabla s = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial s}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial s}{\partial z}\mathbf{k}$$

可以看出***标量场的梯度是一个矢量场***，它表示s 在空间某一位置沿某一方向的变化量。如果想要的到 s 在某一特定方向 $\mathbf{e}_l$（方向 l 上的单位矢量） 上的梯度，即方向导数，则可以根据矢量点乘的几何意义来进行计算：

$$\frac{ds}{dl} = \nabla s \cdot \mathbf{e}_l = \|\nabla s\| cos(\nabla s, \mathbf{e}_l)$$

由此可见，当 $cos(\nabla s, \mathbf{e}_l) = 1$ ，即空间任意方向 l 与梯度方向一致时沿该方向具有最大梯度，因此 ∇s 代表了空间中任意点上梯度变化最大的方向和变化量，而且 ∇s 垂直于该点处的等值线或等值面。

3. 散度（Divergence）

根据矢量点乘的运算规则，∇ 与一个矢量的点乘是一个标量，它代表了矢量场的散度：

$$div\ \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

可以看出矢量的散度是一个标量，在CFD中它表示空间中某一区域流入或流出的矢量的多少，比较典型的例子有点源或者点汇。如下图是一个点汇，周围的矢量均流向该点。

16. **连续和一致连续，收敛和一致收敛**

- 连续 函数，收敛 级数。

- 连续：某点连续：极限值=函数值（不会跳变），函数连续：每个点都连续。
- 一致连续：对区间 L 上任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。
- 一致连续→连续，$1/x$ 不一致连续。

  考察均匀程度，不允许难以接受的连续突变（特别陡）。

  闭区间上，连续<=>一致连续。
- 收敛：对特定的x，级数项数→无穷时，极限值=某个函数(x)。$\forall \varepsilon > 0, \exists N_x(\varepsilon), s.t.$ 当$n > N_x(\varepsilon)$时，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- 一致收敛：$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.$ 当$n > N(\varepsilon)$时，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- 收敛：在极限函数$f(x)$的任意小邻域内（该邻域对 x 定制）（可以想象成一条加宽的带子），对于函数列$\{f_n(x)\}$，N项之后的函数图像都会全部落在这条带子里面。

  一致收敛：对所有 x，找到一条通用的带子。
- 收敛→一致收敛，$f_n(x) = x^n$ 在$(0,1)$ 上收敛到 0，但不一致收敛。

  不允许 $|f_n(x) - f(x)|$难以接受的大。

  闭区间上，收敛<=>一致收敛。
- 一致收敛后，对和函数求积分 可以变成 逐项求积分求导。