Resolução da Lista 2 de Mecânica Quântica I (F689, Turma B)

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2017

Sumário

*Email: p.r.caetano@gmail.com

1. Dada a função de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} N & \text{, se } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{qualquer outro valor} \end{cases}$$

   (a) Calcule a normalização N e o valor esperado de $\langle x \rangle$.

   (b) Calcule a transformada de Fourier desta função $\phi(k)$ conforme fórmula Eq. 2.103 do Griffiths.

   (c) Assuma que podemos definir o valor esperado do momento como

$$\langle p \rangle = \int \phi^*(k)\hbar k \phi(k) dk \qquad \left\langle p^2 \right\rangle = \int \phi^*(k)\hbar^2 k^2 \phi(k) dk$$

   Calcule explicitamente o valor esperado do momento e do momento ao quadrado usando a resposta do item anterior. O valor esperado do momento ao quadrado, $\left\langle p^2 \right\rangle$ tem sentido?

2. Uma partícula livre tem função de onda no instante $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2}$$

   onde A e a são constantes e a é uma constante real e positiva.

   (a) Normalize $\Psi(x, 0)$.

   (b) Determine $\Psi(x, t)$. Dica: Integrais na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx$$

   podem ser feitas *completando o quadrado*. Seja $y \equiv \sqrt{a}(x + b/a)$ e note que $(ax^2 + bx) = y^2 - b^2/4a$. Resposta

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-ax^2/d(t)}}{\sqrt{d(t)}}$$

   $d(t) \equiv 1 + 2i\hbar a t/m$.

   (c) Calcule $|\Psi(x, t)|^2$. Expresse a resposta em termos de $w \equiv \sqrt{\frac{a}{1+(2\hbar a t/m)^2}}$. Desenhe $|\psi(x, t)|^2$ como função de x em $t = 0$ e um grande valor de t. De forma qualitativa o que acontece com $|\psi(x, t)|^2$?

   (d) Determine $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\left\langle x^2 \right\rangle$, $\left\langle p^2 \right\rangle$, σ_x, σ_p. Resposta parcial: $\left\langle p^2 \right\rangle = a\hbar^2$.

   (e) O princípio da incerteza é válido neste caso? Em qual tempo o sistema fica próximo do limite do princípio da incerteza?

3. (Griffiths 2.5).
   Uma partícula no poço infinito tem como estado inicial uma mistura entre os dois primeiros estados estacionários:

$$\Psi(x,0) = A\left(\Psi_1(x) + \Psi_2(x)\right)$$

   (a) Normalize $\Psi(x,0)$. Lembre que se você normalizar em $t = 0$ a função de onda fica normalizada $\forall t$.
   (b) Encontre $\Psi(x,t)$ e $|\Psi(x,t)|^2$.
   (c) Determine $\langle x \rangle$. Qual a frequência de oscilação? Qual é a amplitude de oscilação?

4. Versão modificada do Exemplo 2.2 do Griffiths. Dada a função de onda

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x)$$

   como condição inicial das soluções do poço infinito. Ache os primeiros coeficientes c_n para $n = 1, 2$ e 3.

   (a) No instante $t_0 > 0$ foi medido que o sistema estava no estado de energia E_3 que corresponde a energia do estado $n = 3$. Em um instante $t > t_0$ foi medido a energia do sistema. Qual o valor de c_n para $n = 1, 2$ e 3 neste instante?

5. Assuma que o potencial unidimensional $V(x)$ seja dado por $V(x) = -\alpha\left(\delta(x+a) + \delta(x-a)\right)$.

   (a) Ache a solução geral da função de onda devido a este potencial quando a energia for $E < 0$.
   (b) Encontre a condição do estado ligado neste caso.

6. Descreva a função de onda para quaisquer valores de x para o potencial $V(x)$ mostrado abaixo. Assuma que a energia $E < V_0$. Você deve descrever se é um estado ligado ou um estado de espalhamento, e se possue soluções evanescentes. Não é necessário calcular a função de onda.

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & \text{qualquer outro valor} \end{cases}$$