Resolução da Prova 3 de Mecânica Quântica I (F689, Turma B, 1o. semestre de 2015)

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2017

1. Confira problema 12 da lista 3.
2. Um sistema esta no estado

$$\psi(t=0) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{-i\phi}$$

(A) Em qual estado de momento angular total e momento angular na direção z o sistema está?

Resolução:

No formulário foi fornecido que

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{i\phi}$$

e que

$$Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$$

portanto

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{-i\phi}$$

e $\psi(t=0) = Y_1^{-1}$. Denotando por $|\psi(t=0)\rangle$ o ket correpondente à função de onda $\psi(t=0)$ temos então

$$|\psi(t=0)\rangle = |l=1, m=-1\rangle$$

O sistema está no autoestado de L^2 com autovalor $2\hbar^2$ e de L_z com autovalor $-\hbar$.

*Email: p.r.caetano@gmail.com

(B) Se fossemos medir o momento angular na direção x, $\hat{L}_x$, quais são os valores possível que poderíamos achar? Justifique.

Resolução:

Quando $l = 1$, o formulário fornece que a representação de L_x na base z é

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os valores possíveis são os autovalores desta matriz:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & -\lambda & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
-\lambda^3 + 2\lambda\frac{\hbar^2}{2} &= 0 \\
\lambda\left(\hbar - \lambda\right)\left(\hbar + \lambda\right) &= 0
\end{aligned}$$

De onde é claro que os valores possíveis são $-\hbar$, 0 e $\hbar$.

(C) Quais são os autovetores de $\hat{L}_x$ correspondentes a estes autovalores na base z. A base z é a base de autovetores de S_z.

- $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} b \\ a + c \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Já normalizando, temos então o vetor

$$|1\,0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \pm\hbar$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \pm\hbar\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b\\ a+c\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm\sqrt{2}a\\ \pm\sqrt{2}b\\ \pm\sqrt{2}c\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = \pm\sqrt{2}a\\ a+c = \pm\sqrt{2}b\\ b = \pm\sqrt{2}c\end{cases}$$

Daí, $a = c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}b$. Para que o vetor seja normalizado, devemos ter $a^2 + b^2 + c^2 = 2b^2 = 1$, portanto

$$|1\ \pm 1\rangle = \begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pm\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(D) Quais são as probabilidades de encontrar os valores possíveis de $\hat{L}_x$ que foram achados no item (B)?

- Probabilidade de encontrar 0:

$$\begin{aligned}\langle 1\, 0|\psi\rangle &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left[S_x = 0\right] &= |\langle 1\, 0|\psi\rangle|^2\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Probabilidade de encontrar $\pm\hbar$:

$$\begin{aligned}\langle 1\ \pm 1|\psi\rangle &= \begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

logo

$$\mathcal{P}\left[S_x = \pm\hbar\right] = |\langle 1 \ \pm 1|\psi\rangle|^2$$
$$= \frac{1}{4}$$

3. Seja um conjunto de partículas com spin 1/2 movendo na direção y. Seja um aparato de Stern-Gerlach com o campo magnético apontando numa direção $\hat{n}'$. O feixe passa por dois aparatos de Stern-Gerlach (SG), o primeiro com o campo magnético na direção z e o segundo com o campo magnético na direção x. **Em ambos a componente inferior está bloqueada**.

(A) Faça a representação deste sistema.
Resolução:

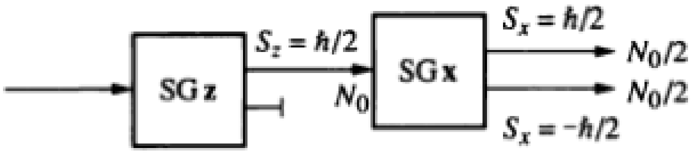

Figura 1: Esquema da situação descrita no enunciado. Figura retirada de [1].

(B) Qual é a fração de partículas que deixa o segundo SG em relação ao que deixa o primeiro SG? Justifique a resposta.
Resolução:
Suponha, como na figura, que N_0 partículas saem do primeiro SG_z. Como a componente inferior está bloqueada, todas estas partículas estão no estado $|+\rangle_z$, o autoestado de S_z com autovalor $\hbar/2$. O segundo SG mede a componente do momento angular na direção x. Como uma medida de S_x para uma partícula no estado $|\psi\rangle$ fornece $+\hbar/2$ com probabilidade $|_x\langle +|\psi\rangle|^2$, a probabilidade de uma partícula no estado $|+\rangle_z$ sair de SG_x, que possui a saída inferior bloqueada, é

$$p = |_x\langle +|+\rangle_z|^2$$

Nos dados da prova, foi fornecido que os autovetores do operador spin na direção $\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$ na base comum de S^2 e S_z são

$$\left|S_n = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$
$$\left|S_n = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Para $\hat{n} = \hat{x}$ temos $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, portanto

$$|+\rangle_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Podemos agora calcular a probabilidade pedida; Como

$$\begin{aligned}
{}_x\langle +|+\rangle_z &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

temos $p = 1/2$. Em média, se saem N_0 partículas de SG_z, sairão $N_0/2$ partículas de SG_x.

(C) Se adicionarmos um terceiro SG, após os dois primeiros SG, que transmite somente a componente superior de S_z, qual fração de partículas que deixa o terceiro SG em relação ao que deixa o primeiro SG? Justifique a resposta.

Resolução:

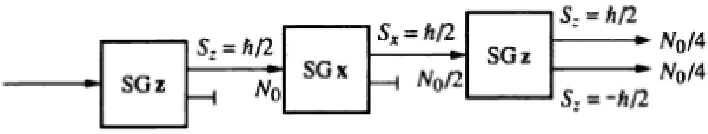

Figura 2: Esquema da nova situação. Figura retirada de [1].

Agora temos a situação descrita na Figura 2. Note que as partículas que entram no último SG_z estão no estado $|+\rangle_x$. A probabilidade de emergirem é então

$$\begin{aligned}
p &= |{}_z\langle +|+\rangle_x|^2 \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

Se entram $\frac{N_0}{2}$ partículas, sairão $\frac{N_0}{4}$ partículas, portanto.

(D) Agora o segundo SG com o campo na direção x, ambos os feixes, o superior e o inferior e o terceiro SG na direção z transmite apenas na direção inferior. Qual a fração de partículas que deixa o terceiro SG em relação ao que deixa o primeiro SG? Justifique a resposta.

Resolução: Após passar pelo segundo SG, todas as partículas colapsam no estado $|+\rangle_x$ ou $|-\rangle_x$: o feixe entrando o último SG é portanto uma mistura de N_0 partículas nestes dois estados: $\frac{N_0}{2}$ no estado $|+\rangle_x$ e $\frac{N_0}{2}$ no estado $|-\rangle_x$. Como **ambas** as partículas possuem probabilidade $1/2$ de sair na direção inferior, pois

$$|{}_z\langle -|+\rangle_x|^2 = |{}_z\langle -|-\rangle_x|^2$$

o número de partículas saindo na parte inferior do terceiro SG será

$$\left(\frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{N_0}{2}$$

Observação: Note que o resultado deste último item depende que a medição realizada por S_x de fato colapse os estados da partícula dos autoestados de S_x antes de misturarmos as partículas de novo. Ou seja, devemos ser capazes de determinar se as partículas do feixe entrando o último SG_z sairam na saída superior ou inferior de SG_x. É possível construir um aparato de Stern-Gerlach modificado, descrito por Feynman e discutido em [1], onde orientamos três magnetos de forma que partículas de spin up e down seguem trajetórias diferentes dentro do aparelho (ou pelo menos seguiriam classicamente - lembre-se que o conceito de trajetória não está bem definido em mecânica quântica), se juntando na saída (cf. Figura 3).

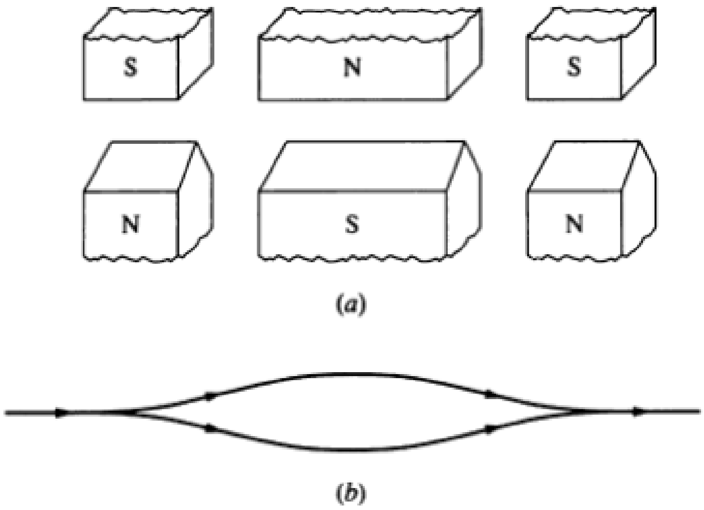

Figura 3: Aparato de Stern-Gerlach modificado. Figura retirada de [1].

A diferença aqui é que sem interromper a trajetória superior ou inferior, não conseguimos saber qual das duas trajetórias a partícula seguiu: na verdade, esta pergunta sequer faz muito sentido. O estado da partícula, portanto, não colapsa em um dos autoestados do momento angular na direção selecionada pelo aparato SG, se mantendo inalterado. Se trocássemos o segundo aparato SG (SG_x) neste exercício por um destes aparatos modificados, o feixe de N_0 partículas emergindo dele estaria no mesmo estado em que entrou, $|+\rangle_z$. Neste caso, portanto, **nenhuma partícula emergiria do último SG_z na saída de baixo**! Uma discussão interessante destes aspectos do experimento de Stern-Gerlach pode ser lida na seção 1.2 do livro de Townsend ([)], disponível nas melhores livrarias digitais russas.