Resolução da Lista 3 de Mecânica Quântica I (F689, Turma B)

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2017

Sumário

Exercício 1 **2**

Exercício 2 **2**

Exercício 3 **2**

Exercício 4 **2**

Exercício 5 **3**

*Email: p.r.caetano@gmail.com

(Bransdeen and Joachian, página 260)
Seja o conjunto de operadores: são operadores lineares? e caso sejam são operadores hermitianos?$\hat{A}_1\Psi(x) = (\Psi(x))^2$ $\hat{A}_2\Psi(x) = \frac{d}{dx}\Psi(x)$ $\hat{A}_3\Psi(x) = \int_0^x \Psi(x')dx'$ $\hat{A}_4\Psi(x) = x^2\Psi(x)$ $\hat{A}_5\Psi(x) = \sin\Psi(x)$ $\hat{A}_6\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)$ $\hat{A}_7\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\Psi(x)$ $\hat{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\hat{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}}$, onde $\hat{\vec{R}}$ é o operador vetor posição e $\hat{\vec{P}}$ é o operador vetor momento.

Mostre que a ação de dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ pode ser representada em forma matricial da seguinte forma: $(AB)_{mn} = \sum_p A_{mp}B_{pn}$.

Seja o projetor $\hat{P}_n = |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, onde $|\phi_n\rangle$ são os vetores normalizados de uma base no espaço de Hilbert.

(A) Mostre que é um operador hermitiano.

(B) O nome projetor vem do fato da propriedade $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$. Mostre essa propriedade.

(C) Calcule os autovalores e autovetores.

Um Hamiltoniano é dado por

$$H = c^2 \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} \tag{1}$$

onde m, m_μ e m_τ são números reais e os vetores da base são dados por

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\nu_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A) Ache os autovalores e autovetores deste Hamiltoniano.

(B) Assuma que no instante $t = 0$, o sistema está no estado $|\Psi(t = 0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$. Então o sistema no instante t estará no estado $|\Psi(t)\rangle$, determine este estado. Qual é a probabilidade de o sistema estar no estado $|\nu_\tau\rangle$ no instante t? Esta probabilidade está relacionado com o Prêmio Nobel de 2015, pela descoberta da oscilação dos neutrinos. Ciência Hoje de Dezembro de 2015: Metamorfose Fantasmagórica

(C) A matrix H (1) é Hermitiana? Se sim use a propriedade que pode ser diagonalizada por uma matriz unitária escrita na forma:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mostre que esta matriz é unitária: $U^{-1} = U^\dagger$. Diagonalize a matriz H por esta transformação unitária e ache o valor do ângulo θ que diagonaliza esta matriz H. Como podemos achar os autovetores de H usando este procedimento?

O Hamiltoniano de um sistema de três níveis é representado pela matriz

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e tem dois observáveis A e B representados por

$$\hat{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

e

$$\hat{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

onde ω, λ e μ são reais positivos.

(A) Os operadores A e B são operadores lineares? São hermitianos?

(B) Encontre os autovalores e autovetores normalizados de H, A e B.

(C) Quais são os valores possíveis das quantidades H, A e B?

(D) Ache os comutadores entre H, A e B.

(E) Suponha que o sistema começa no estado

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é um estado normalizado. Encontre os valores esperados de H, A e B em t.

(F) Qual é o estado $|\psi(t)\rangle$? Se você medir a energia no tempo t que valores você pode ter? Qual é a probabilidade de obter cada um desses valores?