Resolução da Lista 5 de Mecânica Quântica I (F689, Turma B)

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2017

Sumário

*Email: p.r.caetano@gmail.com

1. Dado a equação de autovalores para spin $s = 1$, ache a representação matricial de S^2, S_z, S_x e S_y.

$$S^2 |s\, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s\, m_s\rangle \qquad S_z |s\, m_s\rangle = m_s \hbar |s\, m_s\rangle \tag{1}$$

siga o raciocínio feito na aula do dia 12 de junho e descrito nas notas de aula 22 a 24 que estão no link do curso nas páginas 217 a 219. A forma matricial de S_x é igual à de L_x dada no exercício 4 da Lista 5.

Resolução:

Quando $s = 1$, m_s pode assumir os valores 1, 0 e -1. Há portanto três autoestados simultâneos de S^2 e S_z:

$$|1\rangle \equiv |1\,1\rangle \qquad |0\rangle \equiv |1\,0\rangle \qquad |{-1}\rangle \equiv |1\,-1\rangle$$

Lembremos agora como obter a representação de um operador A numa base ortonormal $|e_i\rangle$ de um espaço vetorial: se $|v\rangle = \sum v_i |e_i\rangle$ e $|w\rangle = A|v\rangle = \sum w_i |e_i\rangle$ temos

$$\begin{aligned} w_i &= \langle e_i | w\rangle \\ &= \langle e_i | A |v\rangle \\ &= \sum_j \langle e_i | A |e_j\rangle v_j \\ &= \sum_j A_{ij} v_j \end{aligned}$$

ou seja, o elemento A_{ij} da representação matricial de A é dado por

$$A_{ij} = \langle e_i | A |e_j\rangle$$

Começaremos então escrevendo a representação matricial de S^2. Primeiramente, calculando S^2 nos vetores da base temos

$$S^2|1\rangle = 2\hbar^2|1\rangle \qquad S^2|0\rangle = 2\hbar^2|0\rangle \qquad S^2|{-1}\rangle = 2\hbar^2|{-1}\rangle$$

A representação matricial de S^2 é portanto (lembrando que a base $\{|1\rangle, |0\rangle, |{-1}\rangle\}$ é ortonormal)

$$S^2 = \begin{pmatrix} \langle 1| S^2 |1\rangle & \langle 1| S^2 |0\rangle & \langle 1| S^2 |{-1}\rangle \\ \langle 0| S^2 |1\rangle & \langle 0| S^2 |0\rangle & \langle 0| S^2 |{-1}\rangle \\ \langle {-1}| S^2 |1\rangle & \langle {-1}| S^2 |0\rangle & \langle {-1}| S^2 |{-1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 \end{pmatrix}$$

o que já era esperado pois a base que utilizamos é, por definição, a base comum de S^2 e S_z: S^2 e S_z devem portanto ser diagonais. Para S_z portanto obtemos

$$S_z\,|1\rangle = \hbar\,|1\rangle \qquad S_z\,|0\rangle = \hbar\,|0\rangle \qquad S_z\,|{-1}\rangle = \hbar\,|{-1}\rangle$$

logo

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle 1|\,S_z\,|1\rangle & \langle 1|\,S_z\,|0\rangle & \langle 1|\,S_z\,|{-1}\rangle \\ \langle 0|\,S_z\,|1\rangle & \langle 0|\,S_z\,|0\rangle & \langle 0|\,S_z\,|{-1}\rangle \\ \langle -1|\,S_z\,|1\rangle & \langle -1|\,S_z\,|0\rangle & \langle -1|\,S_z\,|{-1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar \end{pmatrix}$$

Para calcular S_x e S_y, o truque é lembrar que os operadores de levantamento/abaixamento são escritos

$$S_+ = S_x + iS_y \qquad S_- = S_x - iS_y$$

Portanto

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \qquad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

Basta portanto obter as representações matriciais de S_+ e S_- e conseguiremos as representações de S_x e S_y. Como

$$S_\pm\,|s\,m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\hbar\,|s\,m_s \pm 1\rangle$$

temos

$$\begin{gathered} S_+\,|1\rangle = 0 \qquad S_+\,|0\rangle = \sqrt{2}\hbar\,|1\rangle \qquad S_+\,|{-1}\rangle = \sqrt{2}\hbar\,|{-1}\rangle \\ S_-\,|1\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle \qquad S_-\,|0\rangle = \sqrt{2}\,|{-1}\rangle \qquad S_-\,|{-1}\rangle = 0 \end{gathered}$$

e, portanto

$$S_+ = \begin{pmatrix} \langle 1|\,S_+\,|1\rangle & \langle 1|\,S_+\,|0\rangle & \langle 1|\,S_+\,|{-1}\rangle \\ \langle 0|\,S_+\,|1\rangle & \langle 0|\,S_+\,|0\rangle & \langle 0|\,S_+\,|{-1}\rangle \\ \langle -1|\,S_+\,|1\rangle & \langle -1|\,S_+\,|0\rangle & \langle -1|\,S_+\,|{-1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} \langle 1|\,S_-\,|1\rangle & \langle 1|\,S_-\,|0\rangle & \langle 1|\,S_-\,|{-1}\rangle \\ \langle 0|\,S_-\,|1\rangle & \langle 0|\,S_-\,|0\rangle & \langle 0|\,S_-\,|{-1}\rangle \\ \langle -1|\,S_-\,|1\rangle & \langle -1|\,S_-\,|0\rangle & \langle -1|\,S_-\,|{-1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

Note duas coisas: primeiramente, só precisamos calcular uma dentre S_+ e S_- para obter a outra, pois, como $S_- = S_+^\dagger$, podemos obter a representação matricial de uma a partir da outra simplemente transpondo e conjugando. Ademais, note que S_+ possui apenas a diagonal imediatamente acima da diagonal principal preenchida (e S_- a diagonal imediatamente abaixo). Isto sempre acontece com os operadores levantamento e abaixamento (afinal, eles são operadores de levantamento e abaixamento!).

Agora, é imediato obter

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Note que S_x e S_y são hermiteanos, como necessariamente deveriam ser!

2. Cohen, página 476, Complemento J_{IV}, exercício 1.
Precessão de Larmor
Considere uma partícula de spin $1/2$ de momento magnético $\vec{M} = \gamma\vec{S}$. Os estados de spin são descritos na base de vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$, autovetores de S_z com autovalores $\hbar/2$ e $-\hbar/2$. No tempo $t = 0$, o estado do sistema é

$$|\Psi(t = 0)\rangle = |+\rangle \tag{2}$$

Observação: na notação do Cohen $|+\rangle$ é o estado de spin up na direção z, ou sendo mais preciso, $|1/2\,1/2\rangle_z$.
Observação: na notação do Griffiths, $\gamma = \frac{qg_s}{2m}$, onde q é a carga, g_s é o fator giromagnético e m é a massa da partícula.

(a) Se o observável S_x é medido no tempo $t = 0$, quais resultados são possíveis e com quais probabilidades?

(b) Em vez de medir o resultado no tempo $t = 0$, o sistema é deixado evoluir sob a influência de um campo magnético na direção y, de módulo B_0. Calcule na base $|+\rangle$, $|-\rangle$, o estado do sistema no instante t.

(c) No tempo t, nós medimos os observáveis S_x, S_y e S_z. Quais são os valores destas quantidades que podemos encontrar e com quais probabilidades?

(d) Qual é a relação entre B_0 e t para qual o resultado de uma das medidas é sem incerteza? Dê uma interpretação física desta condição.

Resolução: