Resolução da Lista 3 de Mecânica Quântica I (F689, Turma B)

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2017

Sumário

*Email: p.r.caetano@gmail.com

1. (Bransdeen and Joachian, página 260)

   Seja o conjunto de operadores: são operadores lineares? e caso sejam são operadores hermitianos?

   (A) $\hat{A}_1\Psi(x) = (\Psi(x))^2$

   (B) $\hat{A}_2\Psi(x) = \frac{d}{dx}\Psi(x)$

   (C) $\hat{A}_3\Psi(x) = \int_0^x \Psi(x')dx'$

   (D) $\hat{A}_4\Psi(x) = x^2\Psi(x)$

   (E) $\hat{A}_5\Psi(x) = \sin\Psi(x)$

   (F) $\hat{A}_6\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)$

   (G) $\hat{A}_7\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\Psi(x)$

   (H)
   $$\hat{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (I)
   $$\hat{A}_9 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

   (J) $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}}$, onde $\hat{\vec{R}}$ é o operador vetor posição e $\hat{\vec{P}}$ é o operador vetor momento.

   Resolução:

   (A) Não é linear:
   $$\hat{A}_1\left(a\Psi_1(x) + b\Psi_2(x)\right) = \left(a\Psi_1(x) + b\Psi_2(x)\right)^2 \neq a\hat{A}_1\Psi_1(x) + b\hat{A}_1\Psi_2(x)$$

   (B) É linear pois a derivada é linear. Não é hermitiano (é anti-hermitiano):
   $$\begin{aligned}\langle\phi|\,\hat{A}_2\,|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\phi^*(x)\frac{d}{dx}\Psi(x) \\ &= \phi^*(x)\Psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi(x)\frac{d}{dx}\phi^*(x) \\ &= -\left(\langle\Psi|\,\hat{A}_2\,|\Psi\rangle\right)^*\end{aligned}$$

   (o termo de bordo se anula pois para que o produto interno $\langle\phi|\Psi\rangle$ convirja o integrando deve tender a zero em $\pm\infty$).

   (C) É linear, pois a integral é linear. Não é hermitiano: este operador é o inverso de $\hat{A}_2$, pelo teorema fundamental do cálculo, portanto $\hat{A}_3$ é hermitiano se e somente se $\hat{A}_2$ o for.

(D) É linear, pois a multiplicação é distributiva. É hermitiano:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\,\hat{A}_4\,|\Psi\rangle &= \int dx\phi^*(x)x^2\Psi(x)\\ &= \left(\int dx\Psi^*(x)x^2\phi(x)\right)^*\\ &= \left(\langle\Psi|\,\hat{A}_4\,|\Psi\rangle\right)^*\end{aligned}$$

(E) Não é linear, pois $\sin(a+b)\neq\sin(a)+\sin(b)$.

(F) É linear, novamente pois derivadas n-ésimas são lineares. É hermitiano:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\,\hat{A}_6\,|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\phi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)\\ &= \phi^*\frac{d\phi^*}{dx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{d\phi^*(x)}{dx}\frac{d\Psi(x)}{dx}\\ &= -\frac{d\phi}{dx}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{d^2\phi^*(x)}{dx^2}\Psi(x)\\ &= \left(\langle\Psi|\,\hat{A}_6\,|\phi\rangle\right)^*\end{aligned}$$

(novamente os termos de bordo se anulam pois as funções devem ser de quadrado integrável).

(G) É linear, pois derivadas são lineares. É hermitiano: basta notar que $\hat{A}_7 = -i\hbar\hat{A}_2$, portanto

$$\hat{A}_7^\dagger = i\hbar\hat{A}_2^\dagger = -i\hbar\hat{A}_2 = \hat{A}_7^\dagger$$

(H) É linear, pois multiplicação de matrizes é distributiva. Não é hermitiana, pois

$$\hat{A}_8^\dagger = \begin{pmatrix}1^* & 1^*\\ 0^* & 1^*\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq \hat{A}_8$$

(I) Novamente é linear pois multiplicação de matrizes é distributiva. É hermitiana, pois

$$\hat{A}_9^\dagger = \begin{pmatrix}1^* & i^*\\ -i^* & 1^*\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix} = \hat{A}_9$$

(J) Fazendo a identificação

$$1\to x \qquad 2\to y \qquad 3\to z$$

Temos

$$\hat{\vec{L}} = \sum \epsilon_{ijk}\hat{x}_i\hat{p}_j e_k,$$

onde ϵ_{ijk} denota o símbolo de Levi-Civita. A linearidade é consequência da linearidade dos operadores posição e momento (pois composições de operadores lineares são lineares). Para a hermiticidade temos, usando que os operadores posição e momento são hermitianos:

$$\hat{\vec{L}}^\dagger = \sum \epsilon_{ijk}\left(\hat{x}_i\hat{p}_j\right)^\dagger e_k = \sum \epsilon_{ijk}\hat{p}_j{}^\dagger\hat{x}_i{}^\dagger e_k = \sum \epsilon_{ijk}\hat{x}_i\hat{p}_j e_k = \hat{\vec{L}}$$

(onde comutamos x_i e p_j pois estes operadores falham em comutar somente caso $i = j$, e neste caso $\epsilon_{iik} = 0$.)

2. Mostre que a ação de dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ pode ser representada em forma matricial da seguinte forma: $(AB)_{mn} = \sum_p A_{mp}B_{pn}$.

Resolução: Sendo $|u_i\rangle$ uma base do espaço, temos

$$A_{ij} = \langle u_i| \hat{A} |u_j\rangle$$

Usando a identidade

$$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = \hat{1}$$

Temos

$$\begin{aligned}(AB)_{mn} &= \langle u_m| (AB) |u_n\rangle \\ &= \sum_p \langle u_m| A |u_p\rangle \langle u_p| B |u_n\rangle \\ &= \sum_p A_{mp}B_{pn}\end{aligned}$$

3. Seja o projetor $\hat{P}_n = |\phi_n\rangle \langle\phi_n|$, onde $|\phi_n\rangle$ são os vetores normalizados de uma base no espaço de Hilbert.

(A) Mostre que é um operador hermitiano.

(B) O nome projetor vem do fato da propriedade $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$. Mostre essa propriedade.

(C) Calcule os autovalores e autovetores.

Resolução:

(A) Basta notar que

$$\hat{P}_n^\dagger = (|\phi_n\rangle \langle\phi_n|)^\dagger = |\phi_n\rangle \langle\phi_n| = \hat{P}_n$$

(B) Temos, lembrando que $|\phi_n\rangle$ é normalizado e portanto $\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{P}_n^2 &= \hat{P}_n\hat{P}_n \\ &= |\phi_n\rangle \langle\phi_n|\phi_n\rangle \langle\phi_n| \\ &= |\phi_n\rangle \langle\phi_n| \\ &= \hat{P}_n\end{aligned}$$

(C) O problema de autovalores para o operador $\hat{P}_n$ é escrito

$$\hat{P}_n |\Psi_i\rangle = \lambda_i |\Psi_i\rangle$$

Como os vetores $|\phi_k\rangle$ formam uma base normalizada do espaço, vale a identidade

$$\sum_k |\phi_k\rangle \langle\phi_k| = \hat{1}$$

Portanto, assumindo que a base é ortonormal

$$\sum_k P_n |\phi_k\rangle \langle\phi_k|\Psi_i\rangle = \sum_k \lambda_i |\phi_k\rangle \langle\phi_k|\Psi_i\rangle$$
$$\sum_k \langle\phi_k|\Psi_i\rangle |\phi_n\rangle \langle\phi_n|\phi_k\rangle = \sum_k \lambda_i \langle\phi_k|\Psi_i\rangle |\phi_k\rangle$$
$$\sum_k \delta_{nk} \langle\phi_k|\Psi_i\rangle |\phi_k\rangle = \sum_k \lambda_i \langle\phi_k|\Psi_i\rangle |\phi_k\rangle$$

Como os $|\phi_k\rangle$ são linearmente independentes devemos ter, para todo k,

$$(\lambda_i - \delta_{nk}) \langle\phi_k|\Psi_i\rangle = 0$$

Desmembrando esta equação nos casos $k = n$ e $k \neq n$ temos

$$\begin{cases} (\lambda_i - 1) \langle\phi_k|\Psi_i\rangle = 0 & \text{se } k = n \\ \lambda_i \langle\phi_k|\Psi_i\rangle = 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Analisando as equações anteriores, notamos que há apenas dois valores possíveis para λ_i: $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$ (para todos os outros valores as equações acima implicam $\langle\phi_k|\Psi_i\rangle = 0$ para todo k; como $|\Psi_i\rangle = \sum_k \langle\phi_k|\Psi_i\rangle |\phi_k\rangle$ isto implicaria $|\Psi_i\rangle = 0$).

- $\lambda_0 = 0$: Neste caso a segunda equação é satisfeita para quaisquer valores de $\langle\phi_k|\Psi_0\rangle$. A primeira equação, entretanto, exige que $\langle\phi_n|\Psi_0\rangle = 0$. Concluímos então que os autovetores são todos da forma

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{k \neq n} c_k |\phi_k\rangle$$

  sendo c_k arbitrário.
- $\lambda_1 = 1$: Neste caso a primeira equação é automaticamente satisfeita, portanto $\langle\phi_n|\Psi_1\rangle$ pode assumir qualquer valor. A segunda equação, porém, exige que $\langle\phi_k|\Psi_1\rangle = 0$ para todo $k \neq n$. Os autovetores são então da forma

$$|\Psi_1\rangle = c_n |\phi_n\rangle$$

  para c_n arbitrário.

4. Um Hamiltoniano é dado por

$$H = c^2 \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} \tag{1}$$

onde m, m_μ e m_τ são números reais e os vetores da base são dados por

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\nu_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A) Ache os autovalores e autovetores deste Hamiltoniano.

(B) Assuma que no instante $t = 0$, o sistema está no estado $|\Psi(t = 0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$. Então o sistema no instante t estará no estado $|\Psi(t)\rangle$, determine este estado. Qual é a probabilidade de o sistema estar no estado $|\nu_\tau\rangle$ no instante t? Esta probabilidade está relacionado com o Prêmio Nobel de 2015, pela descoberta da oscilação dos neutrinos. Ciência Hoje de Dezembro de 2015: Metamorfose Fantasmagórica

(C) A matrix H (1) é Hermitiana? Se sim use a propriedade que pode ser diagonalizada por uma matriz unitária escrita na forma:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mostre que esta matriz é unitária: $U^{-1} = U^\dagger$. Diagonalize a matriz H por esta transformação unitária e ache o valor do ângulo θ que diagonaliza esta matriz H. Como podemos achar os autovetores de H usando este procedimento?

Resolução:

(A) O polinômio característico do Hamiltoniano é

$$p(E) = c^2 \left[(m_\mu - E)(m_\tau - E) - m^2\right] = E^2 - (m_\tau + m_\mu)E + m_\mu m_\tau - m^2$$

As raízes deste polinômio são

$$\begin{aligned}
E_\pm/c^2 &= \frac{m_\mu + m_\tau}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m_\tau + m_\mu)^2 - 4m_\mu m_\tau + 4m^2} \\
&= \overline{m} \pm m\sqrt{\left(\frac{m_\tau - m_\mu}{2m}\right)^2 + 1} \\
&= \overline{m} \pm m\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{2m}\right)^2 + 1} \\
&= \overline{m} \pm m\sqrt{\cot^2 2\theta + 1} \\
&= \overline{m} \pm \frac{m}{\sin 2\theta}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\overline{m} = \frac{m_\mu + m_\tau}{2} \qquad \Delta m = m_\tau - m_\mu \qquad \theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{\Delta m}{2m}$$

O autovetor associado ao autovalor E_+ satisfaz

$$
\begin{aligned}
c^2 \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= E_+ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \left(\overline{m} + \frac{m}{\sin 2\theta} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
\Rightarrow m_\mu \alpha + m\beta &= \left(\overline{m} + \frac{m}{\sin 2\theta} \right) \alpha \\
\left(m_\mu - \frac{m_\mu + m_\tau}{2} - \frac{m}{\sin 2\theta} \right) \alpha + m\beta &= 0 \\
-\left(\frac{\Delta m}{2m} - \frac{1}{\sin 2\theta} \right) \alpha + \beta &= 0 \\
-\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \sin 2\theta + 1 \right) \alpha + \sin 2\theta \beta &= 0 \\
-\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1 \right) \alpha + 2 \sin\theta \cos\theta \beta &= 0 \\
-2\cos^2\theta \alpha + 2\sin\theta\cos\theta\beta &= 0 \\
-\cos\theta\alpha + \sin\theta\beta &= 0
\end{aligned}
$$

O autovetor associado ao autovalor E_+ pode então ser escrito como

$$
|\nu_+\rangle = \sin\theta\, |\nu_\mu\rangle + \cos\theta\, |\nu_\tau\rangle
$$

Lembrando que autovetores associados a autovalores distintos são sempre ortogonais podemos agora imediatamente escrever o autovetor associado a E_-

$$
|\nu_-\rangle = -\cos\theta\, |\nu_\mu\rangle + \sin\theta\, |\nu_\tau\rangle
$$

(B) Primeiramente vamos escrever $|\nu_\mu\rangle$ e $|\nu_\tau\rangle$ na base de autoestados de H:

$$
\begin{aligned}
|\nu_\mu\rangle &= \langle \nu_+ | \nu_\mu \rangle + \langle \nu_- | \nu_\mu \rangle \\
&= \sin\theta\, |\nu_+\rangle - \cos\theta\, |\nu_-\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\nu_\tau\rangle &= \langle \nu_+ | \nu_\tau \rangle + \langle \nu_- | \nu_\tau \rangle \\
&= \cos\theta\, |\nu_+\rangle + \sin\theta\, |\nu_-\rangle
\end{aligned}
$$

Notamos agora que a evolução temporal dos ket's $|\nu_\pm\rangle$ é obtida multiplicando-os por $\exp(-iE_\pm t/\hbar)$. Temos então para $|\Psi(t)\rangle$:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \sin\theta e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}\, |\nu_+\rangle - \cos\theta e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}\, |\nu_-\rangle \\
&= e^{-\frac{i\overline{m}c^2 t}{\hbar}} \left(\sin\theta e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}}\, |\nu_+\rangle - \cos\theta e^{\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}}\, |\nu_-\rangle \right)
\end{aligned}
$$

A probabilidade de o sistema estar no estado $|\nu_\tau\rangle$ no instante t é dada pelo valor

$|\langle \nu_\tau | \Psi(t) \rangle|^2$. Calculando

$$\begin{aligned}
\langle \nu_\tau | \Psi(t) \rangle &= e^{-\frac{i\overline{m}c^2 t}{\hbar}} \left(\sin\theta e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} \langle \nu_\tau | \nu_+ \rangle - \cos\theta e^{\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} \langle \nu_\tau | \nu_- \rangle \right) \\
&= e^{-\frac{i\overline{m}c^2 t}{\hbar}} \left(\sin\theta \cos\theta e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} - \sin\theta\cos\theta e^{\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} \right) \\
&= e^{-\frac{i\overline{m}c^2 t}{\hbar}} \sin 2\theta i \frac{1}{2i} \left(e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} - e^{\frac{imc^2 t}{\hbar \sin 2\theta}} \right) \\
&= -ie^{-\frac{i\overline{m}c^2 t}{\hbar}} \sin 2\theta \sin\left(\frac{mc^2 \hbar}{\sin 2\theta} t \right)
\end{aligned}$$

A probabilidade desejada é, portanto

$$p = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left(\frac{mc^2 \hbar}{\sin 2\theta} t \right).$$

(C) Sim, a matriz H é hermitiana:

$$H^\dagger = c^2 \begin{pmatrix} m_\mu^* & m^* \\ m^* & m_\tau^* \end{pmatrix}^T = c^2 \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} = H$$

A matriz de rotação U é unitária:

$$\begin{aligned}
UU^\dagger &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Podemos então diagonalizar H na forma

$$\begin{aligned}
U^\dagger H U &= c^2 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= c^2 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\mu \cos\theta - m\sin\theta & m_\mu \sin\theta + m\cos\theta \\ m\cos\theta - m_\tau \sin\theta & m\sin\theta + m_\tau\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= c^2 \begin{pmatrix} m_\mu \cos^2\theta - m\sin 2\theta + m_\tau \sin^2\theta & m\cos 2\theta - \frac{m_\tau - m_\mu}{2}\sin 2\theta \\ m\cos 2\theta - \frac{m_\tau - m_\mu}{2}\sin 2\theta & m_\mu \sin^2\theta + m\sin 2\theta + m_\tau\cos^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para que a última matriz seja diagonal é preciso que as entradas não diagonais se anulem. Temos, então

$$\begin{aligned}
m\cos 2\theta - \frac{\Delta m}{2}\sin 2\theta &= 0 \\
\cot 2\theta &= \frac{\Delta m}{2m} \\
\theta &= \frac{1}{2}\cot^{-1}\left(\frac{\Delta m}{2m}\right)
\end{aligned}$$

Para encontrar os autovetores de H usando este método, basta notar que os vetores coluna

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

são autovetores da matriz $U^\dagger H U$, cujo autovalor associado é a entrada correspondente na diagonal da matriz. Nestas condições,

$$U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad U\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

serão autovetores de H, como pode ser provado multiplicando o problema de autovalores para $U^\dagger H U$ por U. Consequentemente, **os autovetores de H correspondem às colunas de U.**

5. O Hamiltoniano de um sistema de três níveis é representado pela matriz

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

e tem dois observáveis A e B representados por

$$\hat{A} = \lambda \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

e

$$\hat{B} = \mu \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

onde ω, λ e μ são reais positivos.

(A) Os operadores A e B são operadores lineares? São hermitianos?

(B) Encontre os autovalores e autovetores normalizados de H, A e B.

(C) Quais são os valores possíveis das quantidades H, A e B?

(D) Ache os comutadores entre H, A e B.

(E) Suponha que o sistema começa no estado

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

que é um estado normalizado. Encontre os valores esperados de H, A e B em t.

(F) Qual é o estado $|\psi(t)\rangle$? Se você medir a energia no tempo t que valores você pode ter? Qual é a probabilidade de obter cada um desses valores?

Resolução:

(A) Sim, são lineares pois a multiplicação de matrizes por vetores é distributiva. Também são hermitianos: basta notar que a transposta conjugada de A e B é idêntica aos próprios:

$$A^\dagger = \lambda^* \begin{pmatrix} 0^* & 1^* & 0^* \\ 1^* & 0^* & 0^* \\ 0^* & 0^* & 2^* \end{pmatrix}^T = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$B^\dagger = \mu^* \begin{pmatrix} 2^* & 0^* & 0^* \\ 0^* & 0^* & 1^* \\ 0^* & 1^* & 0^* \end{pmatrix}^T = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

(B) Como H é diagonal, por inspeção concluímos que seus autovalores são $E_1 = \hbar\omega$ e $E_2 = E_3 = 2\hbar\omega$, e seus autovetores associados são $\left|\Psi_H^{(1)}\right\rangle = |1\rangle$, $\left|\Psi_H^{(2)}\right\rangle = |2\rangle$ e $\left|\Psi_H^{(3)}\right\rangle = |3\rangle$.

Para A temos o polinômio característico

$$p_A(\xi) = \lambda \begin{vmatrix} -\xi & 1 & 0 \\ 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 2-\xi \end{vmatrix} = \lambda(\xi^2 - 1)(2 - \xi)$$

Os autovalores de A são portanto

$$\lambda_A^{(1)} = -\lambda \qquad \lambda_A^{(2)} = \lambda \qquad \lambda_A^{(3)} = 2\lambda.$$

Como A é diagonal por blocos podemos estudar os autovetores de cada bloco separadamente. No bloco superior temos os autovetores associados aos autovalores $\lambda_A^{(1)} = -\lambda$ e $\lambda_A^{(2)} = \lambda$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \pm\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm\lambda a \\ \pm\lambda b \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b &= \pm a \end{aligned}$$

Escolhemos então os autovetores

$$\left|\Psi_A^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right) \qquad \left|\Psi_A^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

Já ao bloco inferior está associado o autovetor

$$\left|\Psi_A^{(3)}\right\rangle = |3\rangle\,.$$

Para B por sua vez, temos o polinômio característico

$$p_B(\xi) = \mu \begin{vmatrix} 2-\xi & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 1 \\ 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix} = \mu(2-\xi)(\xi^2-1)$$

Os autovalores de B são, então

$$\lambda_B^{(1)} = -\mu \qquad \lambda_B^{(2)} = \mu \qquad \lambda_B^{(3)} = 2\mu.$$

Novamente vamos analisar os autovalores por blocos. O primeiro bloco é trivial, e o autovetor, associado ao autovalor 2μ, é

$$\left|\Psi_B^{(3)}\right\rangle = |1\rangle$$

O outro bloco é quase idêntico ao bloco já analisado para a matriz A. Escolhemos então os autovetores

$$\left|\Psi_B^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle - |3\rangle\right) \qquad \left|\Psi_B^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle + |3\rangle\right).$$

(C) Os valores possíveis para um observável são os autovalores do mesmo. Os valores possíveis para H são, portanto, $\hbar\omega$ e $2\hbar\omega$; os de A são $-\lambda$, λ e 2λ e os de B são $-\mu$, μ e 2μ.

(D) Temos

$$\begin{aligned}
[H,A] &= \hbar\omega\lambda \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \hbar\omega\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \hbar\omega\lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H,B] &= \hbar\omega\mu \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \hbar\omega\mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$[A,B] = \lambda\mu \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \lambda\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda\mu \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(E) Temos para o valor esperado de H, $\langle H \rangle_\Psi$:

$$\langle H \rangle_\Psi = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \hbar\omega$$

Já para o valor esperado de A:

$$\langle A \rangle_\Psi = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

E, por fim, para o valor esperado de B:

$$\langle B \rangle_\Psi = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2\mu$$

(F) Como $|\Psi(t=0)\rangle$ é autovetor de H com autovalor $\hbar\omega$ o sistema está em um estado estacionário. Temos então $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t}|1\rangle$, e o único valor possível para uma medida futura da energia é $\hbar\omega$, com probabilidade 1.

6. Seja um espaço de Hilbert de três dimensões com uma base ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$:

$$|\Psi\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle \qquad |\phi\rangle = b\,|1\rangle + a\,|2\rangle$$

   (A) Calcule $\langle\Psi|$, $\langle\phi|$. Compute $\langle\Psi|\phi\rangle$ e $\langle\phi|\Psi\rangle$.

   (B) Expresse $|\Psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ como vetores coluna e recalcule.

   (C) Calcule $A = |\Psi\rangle\langle\phi|$. Encontre a representação 3x3 deste operador.

   (D) Calcule $Q = |\Psi\rangle\langle\Psi| + |\phi\rangle\langle\phi|$. Este operador é hermitiano? Mostre que tem um autovalor nulo.

Resolução:

(A) Para conjugar uma expressão, trocamos todos os bra's por ket's e todos os números complexos por seus conjugados. Temos então

$$\langle\Psi| = a^*\langle 1| + b^*\langle 2| + c^*\langle 3| \qquad \langle\phi| = b^*\langle 1| + a^*\langle 2|$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\phi\rangle &= (a^*\langle 1| + b^*\langle 2| + c^*\langle 3|)\,(b\,|1\rangle + a\,|2\rangle)\\ &= a^*b + b^*a\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle\phi|\Psi\rangle &= (b^*\langle 1| + a^*\langle 2|)\,(a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle)\\ &= b^*a + a^*b\end{aligned}$$

(B) Temos

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, a operação de conjugação consiste em transpor as matrizes ou vetores envolvidos e conjugar os números complexos. Temos então

$$\langle\Psi| = \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix} \qquad \langle\phi| = \begin{pmatrix} b^* & a^* & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\phi\rangle &= \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\\ &= a^*b + b^*a\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle\phi|\Psi\rangle &= \begin{pmatrix} b^* & a^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\\ &= b^*a + a^*b\end{aligned}$$

(C) Temos

$$
\begin{aligned}
A &= |\Psi\rangle \langle\phi| \\
&= (a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle)\,(b^*\,\langle 1| + a^*\,\langle 2|) \\
&= ab^*\,|1\rangle\langle 1| + aa^*\,|1\rangle\langle 2| + bb^*\,|2\rangle\langle 1| + ba^*\,|2\rangle\langle 2| + cb^*\,|3\rangle\langle 1| + ca^*\,|3\rangle\langle 2|
\end{aligned}
$$

A representação 3x3 é dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^* & a^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ab^* & aa^* & 0 \\ bb^* & ba^* & 0 \\ cb^* & ca^* & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(D) Podemos calcular o conjugado hermitiano de Q utilizando as regras usuais: basta inverter a ordem das expressões, trocar bra's por ket's, ket's por bra's e números complexos por seus conjugados. Temos então para $Q^\dagger$:

$$Q^\dagger = (|\Psi\rangle\langle\Psi| + |\phi\rangle\langle\phi|)^\dagger = |\Psi\rangle\langle\Psi| + |\phi\rangle\langle\phi| = Q$$

Portanto Q é hermitiano.

Para o autovalor nulo, note que um autovetor com autovalor nulo de um operador é simplesmente um vetor do núcleo do operador (ou seja, um vetor que atuado pelo operador é levado ao vetor nulo). Para mostrar que Q possui um autovalor nulo basta portanto mostrar que existe um vetor $|\xi\rangle$ tal que

$$Q\,|\xi\rangle = \langle\Psi|\xi\rangle\,|\Psi\rangle + \langle\phi|\xi\rangle\,|\phi\rangle = 0.$$

Analisando a expressão anterior, podemos buscar $|\xi\rangle$ simultaneamente ortogonal a $|\Psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, de forma que $\langle\Psi|\xi\rangle = \langle\phi|\xi\rangle = 0$. Se estivéssemos em $\mathbb{R}^3$ esta tarefa seria fácil: bastaria realizar o produto vetorial. Podemos porém definir um produto vetorial complexo da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
|\xi\rangle &= (a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle) \times (b\,|1\rangle + a\,|2\rangle + 0\,|3\rangle) \equiv \begin{vmatrix} |1\rangle & |2\rangle & |3\rangle \\ a^* & b^* & c^* \\ b^* & a^* & 0 \end{vmatrix} \\
&= -a^*c^*\,|1\rangle + b^*c^*\,|2\rangle + (a^{*2} - c^{*2})\,|3\rangle
\end{aligned}
$$

Então

$$\langle\Psi|\xi\rangle = \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^*c^* \\ b^*c^* \\ a^{*2} - c^{*2} \end{pmatrix} = -a^{*2}c^* + b^{*2}c^* - (a^{*2} - c^{*2})c^* = 0$$

e

$$\langle\phi|\xi\rangle = \begin{pmatrix} b^* & a^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^*c^* \\ b^*c^* \\ a^{*2} - c^{*2} \end{pmatrix} = -a^*b^*c^* + a^*b^*c^* = 0$$

Segue então imediatamente que $|\xi\rangle$ é autovetor de Q com autovalor nulo. Alternativamente, é possível encontrar a representação 3x3 de Q,

$$Q = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ab^* + ba^* & ac^* \\ ab^* + ab^* & |a|^2 + |b|^2 & bc^* \\ a^*c & b^*c & |c|^2 \end{pmatrix}$$

E mostrar que $\lambda = 0$ é raiz do polinômio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} |a|^2 + |b|^2 - \lambda & ab^* + ba^* & ac^* \\ ab^* + ab^* & |a|^2 + |b|^2 - \lambda & bc^* \\ a^*c & b^*c & |c|^2 - \lambda \end{vmatrix}$$

7. Sejam dois operadores A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

descritos na base ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$.

(A) Mostre que A e B são operadores hermitianos.

(B) Mostre que A e B comutam.

(C) Ache os autovalores e autovetores de A e B.

(D) Ache uma base comum para A e B. Mostre a forma de A e B nesta base comum.

Resolução:

(A) Tomando as transpostas conjugadas de A e B temos

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad B^\dagger = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-2i)^* \\ 0 & (2i)^* & 1 \end{pmatrix} = B$$

(B) Temos

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4i \\ 0 & -4i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2i \\ 0 & -4i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(C) Da forma de A é imediato que os autovalores são

$$\lambda_A^{(1)} = 1 \qquad \lambda_A^{(2)} = \lambda_A^{(3)} = 2$$

(note que o autovalor 2 é duplamente degenerado) com os respectivos autovetores

$$\left|\nu_A^{(1)}\right\rangle = |1\rangle \qquad \left|\nu_A^{(2)}\right\rangle = |2\rangle \qquad \left|\nu_A^{(3)}\right\rangle = |3\rangle$$

Já para B, temos o polinômio característico

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2i \\ 0 & -2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4)$$

que possui como raízes

$$\lambda_B^{(1)} = -1 \qquad \lambda_B^{(2)} = \lambda_B^{(3)} = 3$$

Para o autovetor associado ao primeiro autovalor temos

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha \\ \beta + 2i\gamma \\ \gamma - 2i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha & = -\alpha \\ \beta + 2i\gamma & = -\beta \\ \gamma - 2i\beta & = -\gamma \end{cases}$$

O sistema obtido pode ser satisfeito tomando (já levando em conta a normalização)

$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \gamma & = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e obtemos portanto o autovetor

$$\left|\nu_B^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\,|2\rangle - |3\rangle \right)$$

Já para o outro autovalor, observe que a matriz B se decompõe em dois blocos: o bloco superior, composto apenas pelo número 3, e o bloco inferior, formado por uma matriz 2x2. Um dos autovetores é o associado ao primeiro bloco, $\left|\nu_B^{(2)}\right\rangle = |1\rangle$, e o outro é o autovetor associado à matriz 2x2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 3\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2i\beta & = 3\alpha \\ \beta - 2i\alpha & = 3\beta \end{cases}$$

Uma solução, já levando em conta a normalização, do sistema anterior é $\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, portanto obtemos o autovetor

$$\left|v_B^{(3)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\left|2\right\rangle + \left|3\right\rangle\right)$$

Em suma, os autovalores de A são

$$\lambda_A^{(1)} = 1 \qquad \lambda_A^{(2)} = \lambda_A^{(3)} = 3$$

com os autovetores associados

$$\left|v_A^{(1)}\right\rangle = \left|1\right\rangle \qquad \left|v_A^{(2)}\right\rangle = \left|2\right\rangle \qquad \left|v_A^{(3)}\right\rangle = \left|3\right\rangle$$

enquanto os autovalores de B são

$$\lambda_B^{(1)} = -1 \qquad \lambda_B^{(2)} = \lambda_B^{(3)} = 3$$

com os autovetores associados

$$\left|v_B^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\left|2\right\rangle - \left|3\right\rangle\right) \qquad \left|v_B^{(2)}\right\rangle = \left|1\right\rangle \qquad \left|v_B^{(3)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\left|2\right\rangle + \left|3\right\rangle\right).$$

(D) Precisamos encontrar 3 vetores linearmente independentes que sejam simultaneamente autovetores de A e B. É imediato que $\left|v_A^{(1)}\right\rangle = \left|v_B^{(2)}\right\rangle = \left|1\right\rangle$ deve ser um destes vetores. Para os restantes, note que $\left|v_A^{(2)}\right\rangle$ e $\left|v_A^{(3)}\right\rangle$ são autovetores de A com o mesmo autovalor ($\lambda_A^{(2)} = \lambda_A^{(3)} = 2$), logo combinações lineares destes são também autovetores de A com autovalor 2. Como $\left|v_B^{(1)}\right\rangle$ e $\left|v_B^{(2)}\right\rangle$ são combinações lineares dos vetores citados é claro que são autovetores de A. O conjunto $\left\{\left|v_B^{(1)}\right\rangle, \left|v_B^{(2)}\right\rangle, \left|v_B^{(3)}\right\rangle\right\}$ é portanto formado por vetores LI que são simultaneamente autovetores de A (com autovalores 2, 1 e 2, respectivamente) e de B (com autovalores -1, 3 e 3, respectivamente).

Para escrever os operadores nesta nova base, note que se $\{\left|v_i\right\rangle\}$ e $\{\left|u_i\right\rangle\}$ são bases ortogonais de um espaço vetorial e A é um operador cuja matriz na base $\{\left|v_i\right\rangle\}$ é a_{ij} temos

$$\begin{aligned} A &= \sum a_{ij}\left|v_i\right\rangle\left\langle v_j\right| \\ &= \sum a_{ij}\left|u_l\right\rangle\left\langle u_l|v_i\right\rangle\left\langle v_j|u_m\right\rangle\left\langle u_m\right| \\ &= \sum\left\langle u_l|v_i\right\rangle a_{ij}\left\langle v_j|u_m\right\rangle\left|u_l\right\rangle\left\langle u_m\right| \end{aligned}$$

Definindo a matriz de mudança de base M como $m_{ij} = \left\langle v_i|u_j\right\rangle$ a representação de A na base $\{\left|u_i\right\rangle\}$ é dada pelo produto $M^\dagger A M$. No caso em questão, a matriz de mudança de base é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \left\langle 1\middle|v_B^{(1)}\right\rangle & \left\langle 1\middle|v_B^{(2)}\right\rangle & \left\langle 1\middle|v_B^{(3)}\right\rangle \\ \left\langle 2\middle|v_B^{(1)}\right\rangle & \left\langle 2\middle|v_B^{(2)}\right\rangle & \left\langle 2\middle|v_B^{(3)}\right\rangle \\ \left\langle 3\middle|v_B^{(1)}\right\rangle & \left\langle 3\middle|v_B^{(2)}\right\rangle & \left\langle 3\middle|v_B^{(3)}\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(basta escrever os vetores da nova base, escritos na base antiga, como as colunas da matriz). Sendo $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ as representações de A e B na nova base temos

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= M^\dagger A M \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 & \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= M^\dagger B M \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alternativamente, basta argumentar que, como sabemos que

$$\begin{array}{ccc}
A\left|v_B^{(1)}\right\rangle = 2\left|v_B^{(1)}\right\rangle & A\left|v_B^{(2)}\right\rangle = 1\left|v_B^{(2)}\right\rangle & A\left|v_B^{(3)}\right\rangle = 2\left|v_B^{(3)}\right\rangle \\
B\left|v_B^{(1)}\right\rangle = -1\cdot\left|v_B^{(1)}\right\rangle & B\left|v_B^{(2)}\right\rangle = 3\left|v_B^{(2)}\right\rangle & B\left|v_B^{(3)}\right\rangle = 3\left|v_B^{(3)}\right\rangle
\end{array}$$

as matrizes de A e B na base comum devem ser $\tilde{A} = \mathrm{diag}(2, 1, 2)$ e $\tilde{B} = \mathrm{diag}(-1, 3, 3)$.

8. Propriedades da função Delta de Dirac:

$$\int_a^b dx f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{se } a < x_0 < b \\ 0 & \text{se } x_0 < a \text{ ou } x_0 > b \end{cases}$$

(A) Prove que $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{g'(x_i)}\delta(x - x_i)$ onde $g'(x_i) \equiv \left.\frac{dg}{dx_i}\right|_{x_i}$ onde x_i são as raízes de $g(x_i) = 0$ se $a < x_i < b$.

(B) $\int_a^b dx f(x)\delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$ se $a < x_0 < b$.

Resolução:

(A) Seja x_i uma raiz qualquer de $g(x)$, e suponha que $g'(x_i) \neq 0$. Existem então a_i e b_i tais que $x_i \in (a_i, b_i)$ e g restrita a (a_i, b_i) é injetiva. Note que isso implica que x_i é a única raiz de $g(x)$ neste intervalo. Além disso, fazendo a mudança de variáveis $x' = g(x)$ temos:

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{b_i} f(g(x))\delta(g(x))dx &= \int_{g^{-1}(a_i)}^{g^{-1}(b_i)} f(x')\delta(x')\frac{dx'}{g'(x)} \\ &= \frac{f(g(x_i))}{g'(x_i)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(g(x))\frac{\delta(x-x_i)}{g'(x_i)}dx\end{aligned}$$

Suponha agora que $g'(x_i) \neq 0$ para todas as raízes x_i. Temos então

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(g(x))\delta(g(x)) &= \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f(g(x))\delta(g(x))dx \\ &= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} f(g(x))\frac{\delta(x-x_i)}{g'(x_i)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(g(x))\left(\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{g'(x_i)}\right)dx\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{g'(x_i)}$$

(B) Utilizando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_a^b dx f(x)\delta'(x-x_0) &= f(x)\delta(x-x_0)\Big|_a^b - \int_a^b dx f'(x)\delta(x-x_0) \\ &= -f'(x_0).\end{aligned}$$

9. Dados os operadores contínuos, operador posição $\hat{\vec{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ e operador momento $\hat{\vec{P}} = (\hat{P_x}, \hat{P_y}, \hat{P_z})$ que satisfazem as equações de autovalores:

$$\begin{aligned}\hat{X}\left|r\right\rangle &= x\left|r\right\rangle \qquad & \hat{P_x}\left|p\right\rangle &= p_x\left|p\right\rangle \\ \hat{Y}\left|r\right\rangle &= y\left|r\right\rangle \qquad & \hat{P_y}\left|p\right\rangle &= p_y\left|p\right\rangle \\ \hat{Z}\left|r\right\rangle &= z\left|r\right\rangle \qquad & \hat{P_z}\left|p\right\rangle &= p_z\left|p\right\rangle\end{aligned}$$

Admita que estes operadores estão definidos em todo o espaço vetorial: $(-\infty, \infty)$.

(A) Mostre que os operadores $\hat{X}$ e $\hat{P_x}$ são hermitianos.

(B) Calcule os comutadores $[X, P_x]$ e $[Y, P_x]$.

(C) Com esta informação os operadores $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{P_x}$ são um conjunto completo de observáveis que comuta (C. C. O. C)? Justifique a sua resposta.

(D) Dada a equação de autovalores de $\hat{P_x}$, $\hat{P_x}|p\rangle = p_x|p\rangle$, ache os autovetores deste sistema na representação de posição x. É dado que a matriz de mudança de base de momento $|p\rangle$ para a base de posição $|r\rangle$ é $\langle r|p\rangle = \nu^*_{\vec{p}}((\vec{r}) = \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$.

Resolução:

(A) O conjugado hermitiano de um operador A é definido de forma que

$$\langle\Phi| A |\Psi\rangle = \Big(\langle\Psi| A^\dagger |\Phi\rangle\Big)^*$$

Escrevendo esta condição para o operador X na representação da posição temos

$$\begin{aligned}
\langle\Phi| X |\Psi\rangle &= \int d^3r\Phi^*(r)x\Psi(r) \\
&= \left(\int d^3r\Psi^*(r)x\Phi(r)\right)^* \\
&= (\langle\Psi| X |\Phi\rangle)^*
\end{aligned}$$

logo $\hat{X}$ é hermitiano. Analogamente, escrevendo $\langle\Phi| \hat{P}_x |\Psi\rangle$ na representação do momento temos

$$\begin{aligned}
\langle\Phi| \hat{P}_x |\Psi\rangle &= \int d^3p\Phi^*(p)p_x\Psi(p) \\
&= \left(\int d^3p\Psi^*(p)p_x\Phi(p)\right)^* \\
&= \Big(\langle\Psi| \hat{P}_x |\Phi\rangle\Big)^*.
\end{aligned}$$

Logo P_x também é hermitiano.

(B) Aplicando o comutador em $|\Psi\rangle$ e fazendo as contas na representação da posição temos

$$\begin{aligned}
\langle r| [X, P_x] |\Psi\rangle &= \langle r| XP_x - P_xX |\Psi\rangle \\
&= x\langle r| P_x |\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle r| X |\Psi\rangle \\
&= x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle r|\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x\langle r|\Psi\rangle) \\
&= x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle r|\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\langle r|\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}x\frac{d}{dx}\langle r|\Psi\rangle \\
&= -\frac{\hbar}{i}\langle r|\Psi\rangle \\
&= \langle r| i\hbar |\Psi\rangle
\end{aligned}$$

Obtemos portanto

$$[X, P_x] = i\hbar$$

Analogamente para $[Y, P_x]$ temos

$$\begin{aligned}
\langle r| [Y, P_x] |\Psi\rangle &= \langle r| YP_x - P_xY |\Psi\rangle \\
&= y \langle r| P_x |\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \langle r| Y |\Psi\rangle \\
&= y\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \langle r|\Psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} (y \langle r|\Psi\rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto:

$$[Y, P_x] = 0.$$

(C) Não, pois como $[X, P_x] = i\hbar \neq 0$, nem todos os observáveis em questão comutam.

(D) Escrevendo o problema de autovalores de $\hat{P}_x$ na representação da posição temos, definindo $\langle r|p\rangle = \nu_{\vec{p}}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
\langle r| P_x |p\rangle &= p_x \langle r|p\rangle \\
\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\nu_{\vec{p}}(x, y, z) &= p_x\nu_{\vec{p}}(x, y, z) \\
\frac{\partial}{\partial x}\nu_{\vec{p}}(x, y, z) &= \frac{ip_x}{\hbar}\nu_{\vec{p}}(x, y, z) \\
\Rightarrow \nu_{\vec{p}}(x, y, z) &= \exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right) f(y, z)
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente com os operadores $\hat{P}_y$ e $\hat{P}_z$ obtemos

$$\nu_{\vec{p}}(x, y, z) = \exp\left(\frac{ip_y y}{\hbar}\right) f(x, z) \qquad \nu_{\vec{p}}(x, y, z) = \exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right) f(x, y)$$

A solução final é, portanto

$$\nu_{\vec{p}}(x, y, z) = A \exp\left(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)$$

10. Seja o operador momento angular em coordenadas esféricas

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

onde ϕ é a coordenada no sistema de coordenadas esféricas com valor entre 0 e 2π.

(A) Quais são as condições para que $\hat{L}_z$ seja hermitiano?

Resolução:

(A) A condição de hermiticidade é

$$\langle\Psi| L_z |\Phi\rangle = \langle\Phi| L_z |\Psi\rangle^*$$

Escrevendo estes produtos internos na representação da posição usando coordenadas esféricas

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Psi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \left(\int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Phi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)^*$$

Para que isto seja satisfeito basta que

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Psi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \left(\int_0^{2\pi} d\phi \Phi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)^*$$

Aplicando integração por partes observamos que para esta realção ser satisfeita devemos ter

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = (i\hbar\Phi\Psi^*)\Big|_{\phi=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}(i\hbar)\Psi^*$$
$$\Rightarrow \Phi(r,\theta,2\pi)\Psi(r,\theta,2\pi) - \Phi(r,\theta,0)\Psi(r,\theta,0) = 0$$

Basta portanto que as funções de onda estejam bem definidas, i.e., que $\Psi(r,\theta,2\pi) = \Psi(r,\theta,0)$.

Bransdeen and Joachian, página 260:

11. Seja uma partícula de massa m em 1 dimensão espacial, sob a ação do Hamiltoniano $H = \frac{p_x^2}{2m}$.

(A) Mostre que os autovalores do Hamiltoniano H são duplamente degenerados.

(B) Mostre que a degenerescência pode ser removida por considerar autovetores de H e de p_x.

(C) No caso do poço do potencial infinito as soluções são autovetores de H e de p_x? Se não, como podemos escrever a solução para ser um autovetor de H e de p_x.

Resolução:

(A) O problema de autovalores para o Hamiltoniano neste caso é

$$\frac{p_x^2}{2m}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Na representação da posição esta equação lê-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\langle x|\Psi\rangle = E\langle x||\Psi\rangle$$
$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

As soluções desta equação são combinações lineares das soluções linearmente independentes

$$|\Psi_+\rangle = \int dx \exp\left(i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)|x\rangle \qquad |\Psi_-\rangle = \int dx \exp\left(-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)|x\rangle$$

Cada autovalor E do problema possui portanto um autoespaço de dimensão dois associado, logo os autovalores do Hamiltoniano são duplamente degenerados.

(B) O problema de autovalores para p_x na representação do momento é

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle x|\Psi\rangle = p_x \langle x|\Psi\rangle$$

O único autovetor associado ao autovalor p_x é, então

$$|\Psi\rangle = \int dx exp\left(\frac{ip_x x}{\hbar}\right)|x\rangle$$

É fácil perceber que para cada E as duas soluções LI que obtemos anteriormente correspondem aos autovetores do momento com autovalores $+\sqrt{2mE}$ e $-\sqrt{2mE}$. Logo a cada par de autovalores (p_x, E) do momento e do Hamiltoniano, respectivamente, satisfazendo $p_x^2 = 2mE$ está associado um subespaço de autovetores de dimensão 1, portanto a degerescência é removida.

(C) Naturalmente todas as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo são autovetores de H: esta equação é exatamente o problema de autovalores do Hamiltoniano escrito na representação da posição. As soluções do poço infinito escritas como senos,

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

no entanto, não são autovetores de p_x:

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{p}_x|\Psi_n\rangle &= \frac{\hbar}{i}\frac{d\Psi_n}{dx}\\ &= \frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\\ &\neq p_x\langle x|\Psi_n\rangle\end{aligned}$$

Entretanto, vimos no Problema 12 da Lista 1 que as soluções do poço infinito também podem ser escritas como combinação linear das soluções

$$\Psi_n^+(x) = e^{ik_n x} \qquad \Psi_n^-(x) = e^{-ik_n x}$$

onde $k_n = n\pi/a$ e $E_n = (\hbar k_n)^2/2m$. Estas soluções sim são autovetores do operador momento com autovalor $\pm\hbar k_n$ (e do Hamiltoniano com autovalor $(\hbar k_n)^2/2m$):

$$
\begin{aligned}
\langle x| \hat{p}_n \left|\Psi_n^{\pm}\right\rangle &= \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}e^{\pm ik_n x} \\
&= \pm\frac{\hbar}{i}(ik_n)e^{\pm ik_n x} \\
&= \pm\hbar k_n \left\langle x\middle|\Psi_n^{\pm}\right\rangle
\end{aligned}
$$

12. Seja o oscilador harmônico unidimensional, e o estado fundamental do sistema é $|0\rangle$. Seja o Hamiltoniano dado por

$$
H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (m\omega x)^2\right) = \hbar\omega(N + 1/2)
$$

Onde $\langle x|0\rangle \equiv \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$ é a função de onda do estado fundamental. N é o operador número com propriedades

$$
\begin{aligned}
N &= a_+ a_- \\
E_n &= \hbar\omega\,(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, ... \\
a_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,(\mp i p_x + m\omega x) \\
[a_-, a_+] &= 1 \\
[N, a_\pm] &= \pm a_\pm \\
a_+\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle
\end{aligned}
$$

(A) Ache a expressão do estado $|n\rangle$ em termos de operadores escada a_+ e a_- e do estado fundamental do sistema $|0\rangle$.

(B) Escreve a equação diferencial da função de onda do estado fundamental $\langle r|0\rangle$ e ache a solução $\phi_0(x)$. Não é necessário determinar a constante de normalização.

(C) O Hamiltoniano de um sistema em uma dimensão tem a forma

$$
\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{K\hat{x}^2}{2} + \frac{e\Phi_0\hat{x}}{a}
$$

onde K, e, Φ_0 e a são constantes positivas. Ache os autovalores e autovetores deste sistema.

Resolução:

(A) Basta agir com o operador a_+ n vezes:

$$
a_+^n\,|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle
$$

Portanto

$$
|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}a_+^n\,|0\rangle\,.
$$

(B) Por definição o estado fundamental deve satisfazer à relação

$$a_- |0\rangle = 0$$

Escrevendo o operador a_- na representação da posição temos

$$\begin{aligned}
\langle x| a_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (i \langle x| \hat{p}_x + m\omega \langle x| \hat{x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} \langle x| + m\omega x \langle x| \right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} \langle x|0\rangle + m\omega x \langle x|0\rangle \right) = 0$$

A função de onda do estado fundamental $\psi_0(x)$ é dada por $\langle x|0\rangle$, portanto obtemos a equação diferencial

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0$$

Dividindo por ψ_0 e lembrando da derivada logarítmica temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log(\psi_0) &= -\frac{m\omega}{\hbar} x \\
\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{8\pi^2\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}
\end{aligned}$$

A solução é portanto uma gaussiana centrada na origem, com desvio padrão $\sqrt{2\hbar/(m\omega)}$.

(C) Primeiramente vejamos o significado deste Hamiltoniano. Trata-se de um sistema com energia potencial

$$V = \frac{Kx^2}{2} + \frac{e\Phi_0 x}{a}$$

O primeiro termo é o potencial de um oscilador harmônico. O segundo fornece uma força $F = -\nabla \left(\frac{e\Phi_0 x}{a} \right) = -\frac{e\Phi_0}{a} \hat{\imath}$, logo este sistema é um oscilador harmônico submetido a uma força constante. Classicamente, obtemos uma equação diferencial da forma

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m} x - \frac{e\Phi_0}{ma}$$

que pode ser facilmente resolvida fazendo uma mudança de variáveis $x' = x + \frac{e\Phi_0}{Ka}$, de onde obtemos a equação do oscilador harmônico. Isto é intuitivo: um sistema massa mola submetido à força peso, por exemplo, oscila com exatamente a mesma frequência, com seu ponto de equilíbrio deslocado para baixo. Adaptando este processo ao caso quântico, tentamos uma mudança de variáveis que faça o termo linear desaparecer do Hamiltoniano (pagando o preço de adicionar uma constante ao mesmo). Completando o quadrado, temos

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2}\left(x^2 + \frac{2e\Phi_0 x}{Ka} + \left(\frac{e\Phi_0}{Ka}\right)^2 - \left(\frac{e\Phi_0}{Ka}\right)^2\right) \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2}\left(x + \frac{e\Phi_0}{Ka}\right)^2 - \frac{e^2\Phi_0^2}{2Ka^2} \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{K\tilde{x}}{2} - \frac{e^2\Phi_0^2}{2Ka^2} \\
&= H_{O.H.} - \Delta E
\end{aligned}$$

onde definimos $\tilde{x} = x + \frac{e\Phi_0}{Ka}$, $H_{O.H.} = p^2/2m + K\tilde{x}^2/2$ (o Hamiltoniano do oscilador harmônico) e $\Delta E = e^2\Phi_0^2/(2Ka^2)$.
O problema de autovalores para este Hamiltoniano nos fornece, então

$$\begin{aligned}
H\left|\Psi\right\rangle &= E\left|\Psi\right\rangle \\
(H_{O.H.} - \Delta E)\left|\Psi\right\rangle &= E\left|\Psi\right\rangle \\
H_{O.H.}\left|\Psi\right\rangle &= (E + \Delta E)\left|\Psi\right\rangle \\
H_{O.H.}\left|\Psi\right\rangle &= \tilde{E}\left|\Psi\right\rangle
\end{aligned}$$

Note que a última expressão é precisamente o problema de autovalores para o oscilador harmônico. Já sabemos portanto suas soluções:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_n &= \hbar\omega(n + 1/2) \\
\left|n\right\rangle &= \frac{\tilde{a}_+^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle.
\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\tilde{p}_x + m\omega\tilde{x}\right) \\
\left\langle\tilde{x}|0\right\rangle &= \left(\frac{m\omega}{8\pi^2\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\tilde{x}^2}.
\end{aligned}$$

Os autovalores e autovetores do oscilador harmônico com força constante são, então

$$\begin{aligned}
E_n &= \hbar\omega(n + 1/2) + \frac{e^2\Phi_0^2}{2Ka^2} \\
\left|n\right\rangle &= \frac{\tilde{a}_+^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle.
\end{aligned}$$

13. Responda as questões justificando se a sentença está correta ou não:

(A) Operadores hermitianos tem autovalores que podem ser reais ou imaginários

(B) Se o sistema está no autovetor de um operador Q, então o valor esperado de um operador Q' será independente do tempo se Q e Q' comutam.

(C) O autovetor de qualquer operador não é um estado estacionário.

(D) Se você faz uma medida de uma quantidade observável Q de um sistema de forma repetida e quase instantânea então você espera obter o mesmo valor em cada medida.

(E) Uma partícula está submetida a um potencial de oscilador harmônico. Se a partícula está num estado de autoestado do operador momento então o valor esperado do operador Q não depende do tempo.

(F) Uma partícula está submetida a um potencial de oscilador harmônico. Se a partícula está num estado de autoestado do operador energia então o valor esperado do operador Q depende do tempo.

(G) Se dois operadores A e A' comutam então eles sempre são representados por matrizes diagonais.

(H) O desvio padrão do valor esperado de um operador A que é hermitiano é não nulo.

Resolução:

(A) *Falso*. Os autovalores de um operador hermitiano A são sempre reais, pois, já que dados $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ vale

$$\langle\Phi| A |\Psi\rangle = (\langle\Psi| A |\Phi\rangle)^*$$

é claro que se $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$ é autovetor de A, i.e., $A|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle$ temos

$$\lambda \langle\Psi|\Psi\rangle = \lambda^* \langle\Psi|\Psi\rangle$$
$$\Rightarrow \lambda = \lambda^*.$$

(B) *Falso*. A evolução temporal do valor esperado de um operador obedece à relação

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\Psi = \frac{i}{\hbar}\langle [H,Q]\rangle_\Psi + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}\right\rangle_\Psi$$

Basta que Q' não comute com H, ou dependa explicitamente do tempo, para que a derivada do valor esperado não se anule.

(C) *Falso*. Autovetores do operador Hamiltoniano são estados estacionários, já que a equação de Schrödinger independente do tempo é exatamente o problema de autovalores para este operador. Há porém, naturalmente, operadores cujos autoestados não são estacionários: autoestados do operador momento para o oscilador harmônico, por exemplo, não são estacionários - o valor esperado da posição depende do tempo.

(D) *Verdadeiro.*

(E) *Falso.* Se $Q = \hat{x}$, por exemplo, temos $[H, x] = -i\hat{p_x}\hbar/m$. Num autoestado $|\Psi\rangle$ com momento p temos então

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_\Psi = \frac{i}{\hbar}\frac{ip\hbar}{m} = -\frac{p}{m}$$

que pode ser diferente de 0.

(F) *Falso.* O valor esperado da energia, por exemplo, não depende do tempo nesta situação.

(G) *Falso.* Eles serão representados por matrizes diagonais numa base de autovetores comuns a ambos; em quaisquer outras bases isto não ocorrerá.

(H) *Falso.* O desvio padrão do valor esperado da energia num estado estacionário é nulo, por exemplo.