Exercícios do curso de Cosmologia

Pedro Rangel Caetano*

Universidade Estadual de Campinas, 1o. semestre de 2018

1. *Utilizando as equações de Friedmann, obtenha a equação da aceleração para o caso com curvatura.*

Partiremos da 1a. equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}, \tag{1}$$

da equação dos fluidos

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0, \tag{2}$$

e das equações de estado para as componentes ϵ_i, com pressão P_i, (lembrando que $P = \sum_i P_i$ e $\epsilon = \sum_i \epsilon_i$),

$$P_i = w_i \epsilon_i. \tag{3}$$

Derivando (1) e substituindo a mesma na expressão resultante, obtemos

$$\begin{aligned}
2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) &= \frac{8\pi G}{3c^2}\dot{\epsilon} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\left(-\frac{2\dot{a}}{a^3}\right)\\
\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{\dot{a}}{a^3} &= \frac{4\pi G}{3c^2}\dot{\epsilon} + \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{\dot{a}}{a^3}\\
\frac{\ddot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3c^2}\left(2\epsilon\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

Substituindo agora (2) e (3) temos

*Email: p.r.caetano@gmail.com, RA 147650

$$\frac{\ddot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\sum_i 2\epsilon_i - 3(\epsilon_i + P_i)\right)\frac{\dot{a}}{a}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_i (3\epsilon_i + 3w_i\epsilon_i - 2\epsilon_i)$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_i \epsilon_i(1 + 3w_i)$$

Sendo a última a expressão desejada para a equação da aceleração.

2. *Mostre que, num universo espacialmente plano preenchido com matéria sem pressão e uma constante cosmológica, a solução das equações de Friedmann é dada por*

$$a(t) = C[\sinh(\beta t)]^{2/3}. \tag{4}$$

Determine a constante β *e obtenha os limites* $\beta t \ll 1$ *e* $t \to \infty$.

Partindo da primeira equação de Friedmann temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda\right)$$
$$\dot{a}^2 a - H_0^2\Omega_\Lambda a^3 = H_0^2\Omega_m$$

onde Ω_m e Ω_Λ são os parâmetros de densidade da matéria não relativística e da constante cosmológica hoje. Fazendo a substituição

$$y = a^{3/2}, \qquad \dot{y} = \frac{3}{2}a^{1/2}\dot{a}$$

na equação anterior obtemos

$$\left(\frac{2\dot{y}}{3}\right)^2 - H_0^2\Omega_\Lambda y^2 = H_0^2\Omega_m$$
$$\dot{y}^2 - \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}\right)^2 y^2 = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_m}}{2}\right)^2.$$

Note agora que esta equação é a equação de uma hipérbole no espaço de fase $\dot{y}$ vs. y. Com esta motivação, e notando que $y(0) = 0$ (pois $a(0) = 0$), podemos tentar o *ansatz*

$$y = A\sinh(\beta t), \qquad \dot{y} = A\beta\cosh(\beta t).$$

e obtemos

$$A^2\beta^2\cosh^2(\beta t) - A^2\left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}\right)^2\sinh^2(\beta t) = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_m}}{2}\right)^2.$$

Que é facilmente satisfeita fazendo

$$\beta = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}\right), \qquad A = \frac{3H_0\sqrt{\Omega_m}}{2\beta} = \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}}$$

.

A solução encontrada para $a(t)$ é, portanto,

$$a(t) = C\,[\sinh(\beta t)]^{2/3}$$

onde

$$C = A^{2/3} = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3}$$

Para $\beta t \ll 1$, podemos aproximar em primeira ordem $\sinh(\beta t) = \beta t$. O fator de escala então neste caso é

$$a(t) = C\beta^{2/3}t^{2/3}$$
$$a(t) = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_m}t}{2}\right)^{2/3}$$

que corresponde a um universo com apenas matéria e constante de Hubble $\widetilde{H_0} = H_0\sqrt{\Omega_m}$ como esperado, já que para t pequeno a expansão é dominada pela matéria. Por outro lado, para $\beta t \to \infty$ temos

$$\sinh(\beta t) = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \sim \frac{e^{\beta t}}{2}$$

logo

$$a(t) = \frac{C}{2^{2/3}}e^{2\beta t/3}$$
$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} e^{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t},$$

que corresponde à solução assintótica de um universo com apenas constante cosmológica, novamente de acordo com o esperado, pois a constante cosmológica sempre domina para tempos tardios.

3. *Utilizando a solução acima, obtenha a idade do universo e o raio do horizonte co-móvel. Adote* $\Omega_m 0 = 0.3$, $k = 0$ *e* $h = 0.7$.

Suporemos que o Universo é plano. Neste caso, a primeira equação de Friedmann é

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda - \Omega_r}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} \right)$$

onde H_0 é a constante de Hubble, Ω_Λ o parâmetro de densidade da energia escura hoje e Ω_r o parâmetro de densidade da radiação hoje. Supondo $\Omega_r = 0$ temos

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)$$

Primeiramente, supondo que não há energia escura podemos fazer $\Omega_\Lambda = 0$, e obtemos

$$\begin{aligned} H &= H_0 a^{-3/2} \\ \frac{da}{a} &= H_0 a^{-3/2} dt \\ \frac{a^{1/2} da}{H_0} &= dt \\ \frac{2}{3} d\left(a^{3/2}\right) H_0^{-1} &= dt \\ t_0 &= \frac{2}{3} H_0^{-1} \end{aligned}$$

Para $H_0 = 73$ km/s/Mpc, $H_0^{-1} = 13.4$ Gyr, logo obtemos para a idade do Universo num Universo plano, dominado por matéria, $t_0 = 8.9$ Gyr.

Agora, supondo que $\Omega_\Lambda = 0.7$, temos

$$\begin{aligned} H &= H_0 \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{1/2} \\ dt &= H_0^{-1} \frac{da}{a} \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{-1/2} \\ t_0 &= H_0^{-1} \int_0^1 \frac{da}{a} \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{1/2}$ obtemos

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2} \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{-1/2} (-3) \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^4} da \\ \Rightarrow \frac{da}{a} \left(\Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_\Lambda}{a^3} \right)^{-1/2} &= -\frac{2}{3} \frac{a^3}{1 - \Omega_\Lambda} du = -\frac{2}{3} \frac{du}{u^2 - \Omega_\Lambda} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{da}{a}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{-1/2} = \frac{2}{3}\int_1^\infty \frac{du}{u^2-\Omega_\Lambda}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}\int_1^c \frac{du}{u^2-\Omega_\Lambda} &= \frac{1}{2\Omega_\Lambda^{1/2}}\left(\int_1^c \frac{1}{u-\Omega_\Lambda^{1/2}}du - \int_1^c \frac{1}{u+\Omega_\Lambda^{1/2}}du\right)\\ &= \frac{1}{2\Omega_\Lambda^{1/2}}\left(\log\frac{c-\Omega_\Lambda^{1/2}}{c+\Omega_\Lambda^{1/2}} + \log\frac{1+\Omega_\Lambda^{1/2}}{1-\Omega_\Lambda^{1/2}}\right)\end{aligned}$$

no limite $c \to \infty$ obtemos

$$\int_0^1 \frac{da}{a}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{-1/2} = \frac{1}{3\Omega_\Lambda^{1/2}}\log\frac{1+\Omega_\Lambda^{1/2}}{1-\Omega_\Lambda^{1/2}}$$

Para $\Omega_\Lambda = 0.7$ esta integral avalia-se em 0.964, logo obtemos $t_0 = 12.9$ Gyr. A integral contendo a contribuição da radiação,

$$\int_0^1 \frac{da}{a}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda-\Omega_r}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}\right)$$

pode ser feita numericamente, e difere apenas 0.02 % da aqui calculada.

Já para o horizonte comóvel, num universo plano contendo apenas matéria não-relativística e energia escura, temos

$$\begin{aligned}\chi_{hor} &= c\int_0^{t_0}\frac{dt}{a}\\ &= c\int_0^1 \frac{da}{H(a)a^2}\\ &= \frac{c}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{a^2}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{1/2}$ obtemos

$$\begin{aligned}du &= \frac{1}{2}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{-1/2}(-3)\frac{1-\Omega_\Lambda}{a^4}da\\ \Rightarrow \frac{da}{a^2}\left(\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right)^{-1/2} &= -\frac{2}{3}\frac{du}{1-\Omega_\Lambda}a^2 = -\frac{2}{3}\frac{du}{1-\Omega_\Lambda}\left(\frac{1-\Omega_\Lambda}{u^2-\Omega_\Lambda}\right)^{2/3}\end{aligned}$$

E portanto obtemos

$$\begin{aligned}
\chi_{hor} &= \frac{c}{H_0}\frac{2}{3}(1-\Omega_\Lambda)^{-1/3}\int_1^\infty (u^2-\Omega_\Lambda)^{-2/3}du \\
&= \frac{c}{H_0}\frac{2}{3}(1-\Omega_\Lambda)^{-1/3}\int_{(1-\Omega_\Lambda)^{1/2}}^\infty u^{-4/3}du \\
&= \frac{c}{H_0}\frac{2}{3}(1-\Omega_\Lambda)^{-1/3}(-3u^{-1/3})\Big|_{(1-\Omega_\Lambda)^{1/2}}^\infty \\
&= \frac{c}{H_0}\frac{2}{\sqrt{1-\Omega_\Lambda}}
\end{aligned}$$

Para $H_0 = 70$ km/s/Mpc, $c/H_0 = 4.3$ Gpc, portanto para $\Omega_\Lambda = 0.7$ o horizonte comóvel vale $\chi_{hor} = 15.7$ Gpc.

6. *Utilizando a equação de estado do gás de Chaplygin generalizado,*

$$p = -\frac{A}{\rho^{\alpha}} \tag{5}$$

nas equações de Friedmann com $k = 0$*, obtenha a função de Hubble*

$$3H(z)^2 = \left[A + B(1+z)^{3(1+\alpha)}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{6}$$

onde B *é uma constante de integração com*

$$A + B = (3H_0^2)^{1+\alpha}. \tag{7}$$

Em unidades naturais com $c = 8\pi G = 1$ temos

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho + \Lambda \\ \dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo na segunda a equação de estado do gás de Chaplygin e fazendo a mudança de variáveis de t para z,

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a} - 1\right) = -H(1+z)\frac{d}{dz}$$

temos

$$\begin{aligned} -H(1+z)\frac{d\rho}{dz} + 3H\left(\rho - A\rho^{-\alpha}\right) &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho - A\rho^{-\alpha}} &= 3\frac{dz}{1+z} \\ \int \frac{\rho^{\alpha}}{\rho - A\rho^{-\alpha}} d\rho &= 3\int \frac{dz}{1+z} + \text{constante.} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \rho^{\alpha+1} - A$ e integrando vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha}\int \frac{du}{u} &= 3\log(1+z) + \text{ constante.} \\ \log\left(\rho^{1+\alpha} - A\right) &= 3(1+\alpha)\log(1+z) + \text{constante.} \\ \rho^{1+\alpha} - A &= B(1+z)^{1+\alpha} \\ \rho &= \left(A + B(1+z)^{1+\alpha}\right)^{1/(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Voltando esta equação na primeira equação de Friedmann obtemos imediatamente o resultado

$$3H(z)^2 = \left[A + B(1+z)^{3(1+\alpha)}\right]. \qquad (8)$$

A constante de integração é fixada fazendo $z = 0$, quando $H(z) = H_0$, o que fornece

$$A + B = (3H_0^2)^{1+\alpha}. \qquad (9)$$