第37卷 第1期 测 绘 学 报 Vol.37, No.1
2008年2月 ACTA GEODAETICA et CARTOGRAPHICA SINICA Feb., 2008

文章编号:1001-1595(2008)01-0005-05 中图分类号:P226 文献标识码:A

高斯投影的复变函数表示

李厚朴, 边少锋
海军工程大学 导航工程系,湖北 武汉 430033

The Expressions of Gauss Projection by Complex Numbers

LI Hou-pu, BIAN Shao-feng
Department of Navigation, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China

Abstract: Gauss projection is discussed with the help of complex number theory. Compared to traditional expressions of Gauss projection in the real number domain, a new expression derived in this paper has a very concise form both for the forward and inverse transformations between an ellipsoid and a plane. A single closed equation for both scale factor and meridian convergence is given based on complex numbers in particular. When the eccentricity is equal to zero, closed equations for the forward and inverse Gauss projection are also available. Numerical examples are attached to check the computations of this new formulation.

Key words: Gauss projection; closed expressions; complex numbers

摘 要:借助复变函数理论讨论高斯投影的复变函数表示,与传统的高斯投影实数域表达式相比,本文导出的高斯投影正反解表达式形式紧凑,公式简单,特别是基于复变函数建立的尺度比和子午线收敛角公式能表示为闭合形式;当 $e=0$ 时,高斯投影正反解公式均为简单准确的闭合表达式。最后,通过算例对导出的新公式进行验算。

关键词:高斯投影;闭合形式;复变函数

1 引 言

高斯投影是涉及大地测量、地图制图、地理信息系统的一个基本问题,应用范围非常广泛[1]。高斯投影正(反)解的传统表示方法是利用该投影满足的以下三个条件:① 正形、等角;② 中央子午线投影后为直线;③ 中央子午线投影后长度不变,将其展开为经差(横坐标)的幂级数形式[2~4]。这种实数型幂级数形式,虽然有容易理解和直观的优点,但表达式冗长,计算起来相当复杂。事实上,复变函数作为一种强有力的数学方法,在保角变换(即椭球几何学中的正形投影)中的独特地位和作用是无可替代的。因此,已有一些大地测量学者注意到了这一问题,Schuhr[5]给出了用复变函数表示的高斯投影正反解的 FORTRAN 程序并进行了计算;Bowring[6]讨论了横墨卡托投影的复变函数表示,但其给出的反解变换是在子午线弧长正解公式的基础上迭代得到的,导致计算过于繁琐;Klotz[7]基于一种有效的递推公式给出了任意带宽的高斯投影复变函数解法,但所给公式较为复杂,递推过程耗时,计算效率较低。有鉴于此,本文综合国内外学者和自己的研究成果[8~10],在子午线弧长正解公式和文献[9]导出的子午线弧长反解公式的基础上,对这一方法做出了进一步完善和改进,导出了形式紧凑、结构简单的正反解公式,最后对球面情况下的高斯投影进行了较深入的讨论。

2 高斯投影正解的复变函数表示

欲研究高斯投影,离不开等量纬度,等量纬度 q 与大地纬度 B 有如下数学关系[8,11,12]:

收稿日期:2007-01-26;修回日期:2007-10-08
基金项目:国家自然科学基金项目(40644020);国家杰出青年科学基金项目(40125013)
作者简介:李厚朴(1985-),男,山东郓城人,研究生,主要从事大地测量、卫星导航方面的研究工作。

$$q = \int \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B}\mathrm{d}B = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin B}{1-\sin B} - \frac{1}{2}e\ln\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B} = \operatorname{arctan} h\ (\sin B) - e\operatorname{arctan} h\ (e\sin B) \quad (1)$$

记 $w=q+il$ 为投影前的等量纬度与经差组成的复变量；$z=x+iy$ 为投影后平面纵横坐标组成的复变量；$i=\sqrt{-1}$。设 f 表示任意解析函数，由复变函数理论知，解析函数均满足保角映射条件，因此高斯投影条件(1)的基本数学形式应为

$$z=x+iy=f(w)=f(q+il) \quad (2)$$

再由高斯投影条件(2)可知，当 $l=0$ 时，应有 $y=0$，此时式(2)只有实数部分：

$$x=f(q) \quad (3)$$

最后由投影条件(3)可知，式(3)实际上即为子午线弧长正解公式[8,10]，即

$$x = X(B) = a(1-e^2)\int_0^B \frac{\mathrm{d}B}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} = a(1-e^2)(\alpha B+\beta\sin 2B+\gamma\sin 4B+\delta\sin 6B+\varepsilon\sin 8B+\cdots) \quad (4)$$

式中，a 为椭球长半径，

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\ 025}{16\ 384}e^8+\cdots \\ -\frac{3}{8}e^2-\frac{15}{32}e^4-\frac{525}{1\ 024}e^6-\frac{2\ 205}{4\ 096}e^8-\cdots \\ \frac{15}{256}e^4+\frac{105}{1\ 024}e^6+\frac{2\ 205}{16\ 384}e^8+\cdots \\ -\frac{35}{3\ 072}e^6-\frac{105}{4\ 096}e^8+\cdots \\ \frac{315}{131\ 072}e^8+\cdots \end{pmatrix} \quad (5)$$

易知式(1)决定了等量纬度与大地纬度一一对应的函数关系，如果将等量纬度 q 向复变量拓展，用 $w=q+il$ 代替 q，并将相应的实变函数向复变函数拓展，则由该函数决定的原实数纬度亦变为复变量，称其为“复数纬度”，本文用 Φ 表示。由式(1)解出大地纬度后，并将其推广到复变函数，则有

$$\Phi = \arcsin\left[\tan h\ (w+e\operatorname{arctan} h\ (e\sin\Phi))\right] \quad (6)$$

式(6)两端都含有复数纬度 Φ，故 Φ 只能迭代求出。迭代式可取为

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0\approx\arcsin\left[\tan h(w)\right]\\ &\Phi_i=\arcsin\left[\tan h(w+e\operatorname{arctan} h(e\sin\Phi_{i-1}))\right]\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

式中，Φ_0 表示初值，Φ_{i-1} 和 Φ_i 分别表示复数纬度的第 $i-1$ 次和第 i 次迭代值，由于偏心率很小，迭代又以 e^2 量级收敛，一般迭代 3 次即可。将求出的复数纬度代入式(4)，相应地在等式左端引入复变量 z，则有

$$z = x+iy = a(1-e^2)\int_0^\Phi \frac{\mathrm{d}\Phi}{(1-e^2\sin^2\Phi)^{3/2}} = a(1-e^2)(\alpha\Phi+\beta\sin 2\Phi+\gamma\sin 4\Phi+\delta\sin 6\Phi+\varepsilon\sin 8\Phi+\cdots) \quad (8)$$

式(6)和式(8)所确定的高斯投影正解的正确性可进一步阐述如下：

1. 因为由 w 决定的复数纬度 Φ 和由 Φ 所决定的纵横坐标，函数关系均为初等函数，且在其主值范围内是单值的解析函数，而解析函数满足保角映射条件，故高斯条件(1)得以保证。

2. 当经差 $l=0$ 时，虚部 $y=0$，式(8)恢复为式(4)，即通常的子午线弧长正解公式，它满足高斯投影条件(2)和(3)。

因此，式(6)和式(8)确实是满足高斯投影全部条件的正解复变函数表达式。

3 高斯投影反解的复变函数表示

高斯投影反解的复变函数表示原则上可由式(8)迭代求出，但稍显复杂，更实用的方法是在子午线弧长反解公式的基础上得到。子午线弧长反解的直接解公式为[9]

$$B=\varphi+a_2\sin 2\varphi+a_4\sin 4\varphi+a_6\sin 6\varphi+a_8\sin 8\varphi \quad (9)$$

式中，

$$\varphi=\frac{X(B)}{a(1-e^2)\alpha} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix}a_2\\ a_4\\ a_6\\ a_8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}e^2+\frac{3}{16}e^4+\frac{213}{2\ 048}e^6+\frac{255}{4\ 096}e^8 \\ \frac{21}{256}e^4+\frac{21}{256}e^6+\frac{533}{8\ 192}e^8 \\ \frac{151}{6\ 144}e^6+\frac{151}{4\ 096}e^8 \\ \frac{1\ 097}{131\ 072}e^8 \end{pmatrix} \quad (11)$$

定义复数底点纬度

$$\Psi=\frac{x+iy}{a(1-e^2)\alpha} \quad (12)$$

并将 Ψ 代替式(10)中定义的 φ 代入式(9)，作复数开拓后的左端应为复数纬度 Φ，则

$$\Phi=\Psi+a_2\sin 2\Psi+a_4\sin 4\Psi+a_6\sin 6\Psi+$$

$$a_8\sin 8\Psi \tag{13}$$

求出复数纬度 Φ 后,将 Φ 代入式(6)并解得

$$w=q+il=\operatorname{arctan}h(\sin\Phi)-e\operatorname{arctan}h(e\sin\Phi) \tag{14}$$

求出 q 后,可由式(1)解得

$$B=\arcsin\left[\tan h(q+e\operatorname{arctan}h(e\sin B))\right] \tag{15}$$

式(15)两端都含有 B,故 B 只能迭代求出。迭代式可取为

$$\left.\begin{aligned}&B_0\approx\arcsin\left[\tan h(q)\right]\\&B_i=\arcsin\left[\tan h(q+e\operatorname{arctan}h(e\sin B_{i-1}))\right]\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中,B_0 表示初值,B_{i-1} 和 B_i 分别表示大地纬度的第 $i-1$ 次和第 i 次迭代值。由于偏心率很小,迭代又以 e^2 量级收敛,一般迭代 3 次即可。至此式(12)~式(15)构成了高斯投影反解表达式的完整形式,其正确性可进一步阐述如下:

1. 由于式(13)、(14)和(15)在其主值范围内均为单值的解析函数,因此由 $z=x+iy$ 到 $w=q+il$ 的映射是保角映射,满足高斯投影条件(1)。

2. 当 $y=0$ 时,式(12)与式(10)定义一致,即 $\Psi=\varphi$,式(13)恢复为式(9),此时 $l=0$,解出的 B 即为中央子午线处的大地纬度,满足高斯投影条件(2)和条件(3)。

因此式(12)~式(15)构成了高斯投影反解的复变函数表示形式。

4　高斯投影尺度比和子午线收敛角的复变函数表示

用复变函数的观点看,所谓尺度比和子午线收敛角就是解析函数在某点处的导数[13]。求 $z=f(q+il)$ 对 $w=q+il$ 的导数,可得

$$z'=\frac{\mathrm{d}f(w)}{r\mathrm{d}w} \tag{17}$$

式中,

$$r=N\cos B=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{18}$$

式(17)与一般解析函数导数的定义稍有不同,它考虑了椭球面的实际尺度。为求得式(17)的具体表示形式,将其变形为

$$z'=\frac{\mathrm{d}f(w)}{r\mathrm{d}\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w} \tag{19}$$

式(8)和式(14)分别对 Φ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}\Phi}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\Phi)^{3/2}} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\Phi}=\frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\Phi)\cos\Phi} \tag{21}$$

将式(18)、式(20)、式(21)代入式(19)可得

$$z'=\frac{\cos\Phi\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}} \tag{22}$$

如果将上式表示为三角形式

$$z'=m(\cos\gamma-i\sin\gamma)=\frac{\cos\Phi\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}} \tag{23}$$

则由复变函数导数的定义可知,m 即为尺度比,γ 即为子午线收敛角。式(23)角度加一负号是由于复变函数规定的自身正向(逆时针方向)与高斯投影定义的子午线收敛角正向(顺时针方向)相反。值得注意的是式(23)表示的尺度比和子午线收敛角是闭合公式,这也从另一方面说明高斯投影的复变函数表示的确有一定的数学优越性。

5　$e=0$ 时的球面高斯投影闭合表达式

1. 当 $e=0$ 时,高斯投影正解公式式(1)、式(6)和式(8)简化为

$$q=\operatorname{arctan}h(\sin B) \tag{24}$$

$$z=x+iy=a\Phi=a\arcsin\left[\tan h(q+il)\right] \tag{25}$$

2. 当 $e=0$ 时,高斯投影反解公式式(12)~式(15)简化为

$$\Phi=\Psi=\frac{x+iy}{a} \tag{26}$$

$$w=q+il=\operatorname{arctan}h(\sin\Phi) \tag{27}$$

$$B=\arcsin\left[\tan h(q)\right] \tag{28}$$

3. 当 $e=0$ 时,高斯投影尺度比和子午线收敛角式(23)简化为

$$z'=m(\cos\gamma-i\sin\gamma)=\frac{\cos\Phi}{\cos B} \tag{29}$$

因此可以看出选择球面作为参考面时,高斯投影有着极其简单的闭合表达式,而高斯投影实变函数表达式,即使 $e=0$,也仍然是幂级数形式。

6　算　例

我们以克拉索夫斯基椭球 $a=6\ 378\ 245$ m,扁率 $f=1/298.3$ 作为参考椭球,取纬度 $B=45°$,经差 $l=2°$,应用文中导出的高斯投影正反解、尺度比和子午线收敛角的复变函数表达式,进行检核计算。

6.1 高斯投影正解

先由大地纬度 B 求等量纬度：

$$q=\operatorname{arctan}h\left[\sin\frac{\pi}{4}-e\operatorname{arctan}h\left(e\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]=0.876\ 6$$

然后与 l 组成复变量：

$$w=q+il=0.876\ 6+2\cdot\frac{\pi}{180}\cdot i$$

令 $e=0$，由式(7)可得复数纬度的初值为

$$\Phi_0\approx\arcsin\left[\tan h(w)\right]=0.782\ 3+0.024\ 77i$$

迭代三次，可得：

$$\Phi_1=0.785\ 695\ 7+0.024\ 766i$$

$$\Phi_2=0.785\ 706\ 921\ 4+0.024\ 765\ 780\ 07i$$

$$\Phi_3=0.785\ 706\ 959\ 1+0.024\ 765\ 776\ 35i$$

再一次迭代表明数值在 10 位有效数字范围内已无任何变化，所以一般迭代三次即可。将复数纬度略去迭代下标代入式(8)，经计算可得

$$z=4\ 986\ 988.873+157\ 696.350\ 5i(/\mathrm{m})$$

其中 z 的实部、虚部即为高斯投影的纵横坐标。

6.2 高斯投影反解

先由高斯投影正解求出的 z 值计算复数底点纬度：$\Psi=\dfrac{x+iy}{a(1-e^2)\alpha}=0.783\ 187+0.024\ 765\ 6i$，再代入式(13)可得复数纬度：$\Phi=0.785\ 7+0.024\ 76i$，将其代入式(14)可得 $w=0.876\ 6+0.034\ 91i$，w 实部为等量纬度 q，在式(15)中令 $e=0$ 可得大地纬度初值：$B_0=\arcsin\left[\tan h(0.876\ 6)\right]=0.782\ 04$，然后依次可得下列迭代值：

$$B_1=0.785\ 386,\quad B_2=0.785\ 398\ 125\ 5,$$

$$B_3=0.785\ 398\ 163\ 3,\quad B_4=0.785\ 398\ 163\ 4$$

因此，$B=B_4\cdot\dfrac{180}{\pi}=45°$，$l=l\cdot\dfrac{180}{\pi}=2°$，这表明反解数值已精确恢复至原给定值。

6.3 尺度比和子午线收敛角

将计算点的实数纬度、复数纬度代入式(22)可得 z 的导数为 $z'=1.000\ 00-0.024\ 69i$ 该复数的模值即为尺度比 $m=|z'|=1.000\ 31$；辐角反号即为子午线收敛角 $\gamma=-\arg(z')=1.414\ 5°$。而用传统的尺度比公式和子午线收敛角公式[2,3]亦可得

$$m=1+\frac{l^2}{2}\cos^2 B(1+e'^2\cos^2 B)+\frac{l^4}{24}\cos^4 B(5+4\tan^2 B)=1.000\ 31$$

$$\gamma=l\sin B\left[1+\frac{l}{3}\cos^2 B(1+3e'^2\cos^2 B+2e'^4\cos^4 B)\right]=1.414\ 5°$$

所得结果与本文中的方法完全一致。传统方法为级数展开式，文中的方法为闭合公式，表示形式和计算都要简单得多。

7 结 论

借助复变函数与保角映射的内在联系，本文全面讨论了高斯投影的复变函数表示。研究结果表明：

1. 本质上，高斯投影正反解公式就是实数域子午线弧长正反解公式的复数域开拓。与传统的实数型幂级数表达式相比，文中的表达式形式紧凑，公式简单，计算效率高，特别是基于复变函数建立的尺度比和子午线收敛角公式能表示为闭合形式。

2. 选择球面作为参考面时，高斯投影不论正反解都有简单准确的闭合表示形式；而传统的实变函数表达式，即使 $e=0$，也仍然是复杂的幂级数形式。

3. 美国使用的通用墨卡托投影(Universal Transverse Mercator Projection，UTM)和高斯投影没有实质性差别，只是将中央子午线投影后尺度比 $m=1$ 变为 $m=0.999\ 6$。本文公式稍加变形，即可推广到 UTM 投影。

参考文献：

[1] TENG Jun-hua, SUN Mei-xian, HUANG Wei-gen. A New Algorithm for Map Projection Reverse Transformation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(2):179-185.(滕骏华，孙美仙，黄韦艮. 地图投影反解变换的一种新方法[J]. 测绘学报，2004，33(2):179-185.)

[2] XIONG Jie. Ellipsoidal Geodesy [M]. Beijing: Publishing House of PLA, 1988.(熊 介. 椭球大地测量学[M]. 北京：解放军出版社，1988.)

[3] HUA Tang. The Mathematical Basis of Chart [M]. Beijing: Haichao Press, 1985.(华 棠. 海图数学基础[M]. 北京：海潮出版社，1985.)

[4] YANG Qi-he. The Theory and Method of Map Projection [M]. Beijing: Publishing House of PLA, 1989.(杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京：解放军出版社，1989.)

[5] SCHUHR P. Transformationen Zwischen Ellipsoidischen Geographis-chen Konformen Gauss-Krügerbzw, UTM-Coordinaten [J]. 1995,(5):259-264.

[6] BOWRING B R. The Transverse Mercator Projection-a Solution by Complex Numbers[J]. Survey Review, 1990, 30: 325-342.

[7] KLOTZ J. Eine Analy Tische Losung der Gauss-Krüger-Abbildung[J]. Zeitschrift für Vermessungs, 1993, 118(3): 106-115.

[8] BIAN Shao-feng, CHAI Hong-zhou, JIN Ji-hang. Geodetic Coordinate System and Datum[M]. Beijing: National Defence Industry Press,2005.(边少锋,柴洪州,金际航. 大地坐标系与大地基准[M]. 北京:国防工业出版社,2005.)

[9] BIAN Shao-feng, CHEN Yong-bing. Solving an Inverse Problem of a Meridian Arc in Terms of Computer Algebra System[J]. Journal of Surveying Engineering,2006,132(1):7-10.

[10] BIAN Shao-feng, ZHANG Chuan-ding. The Gauss Projection-A Solution by Complex Numbers[J]. Journal of Institute of Surveying and Mapping,2001,18(3):157-159.(边少锋,张传定. Gauss 投影的复变函数表示[J]. 测绘学院学报,2001,18(3):157-159.)

[11] CHEN Jian, CHAO Ding-bo. Ellipsoidal Geodesy[M]. Beijing:Publishing House of Surveying and Mapping, 1991.(陈健,晁定波. 椭球大地测量学[M]. 北京:测绘出版社,1991.)

[12] HU Yu-ju, GONG Jian-wen. Map Projection(2nd ed.)[M]. Beijing:Publishing House of Surveying and Mapping, 1992.(胡毓钜,龚剑文. 地图投影(第2版)[M]. 北京:测绘出版社,1992.)

[13] YANG Qi-he. Summarization for Theory and Method of Conformal Projection[J]. Journal of Institute of Surveying and Mapping,1994,11(2):133-139.(杨启和. 等角投影理论和方法综述[J]. 测绘学院学报, 1994,11(2):133-139.)

(责任编辑:张燕燕)

“测绘科技与学科建设暨《测绘学报》创刊50周年高端论坛”在京召开

作为我国各个自然科学学会最早创办的77种学术期刊之一,《测绘学报》2007年喜迎50华诞。12月13日,“测绘科技与学科建设暨《测绘学报》创刊50周年高端论坛”在中国地质大学(北京)举行。来自国家测绘局、中国科协以及相关高校、科研院所的近百名专家学者就我国测绘科技发展的前沿问题、测绘学科的建设以及《测绘学报》如何进一步发挥学术功能,为广大测绘科技工作者进行自主创新、推动测绘事业实现又好又快发展提供交流平台等话题进行了探讨和交流。

国土资源部副部长、国家测绘局局长鹿心社发来贺信。鹿心社在贺信中说:“《测绘学报》创刊50年来,坚持‘尊重科学、弘扬学术、追求卓越、求实创新’的办刊理念,始终站在测绘科技发展的最前沿,以推动测绘科学发展为己任,积极倡导和鼓励测绘科技创新,在积累和传播测绘科研成果、总结和推广测绘先进技术、推动测绘科技进步等方面发挥了重要作用。”

《测绘学报》原名《测量制图学报》,由方俊、夏坚白、陈永龄、王之卓、叶雪安、白敏等老一辈测绘科学家亲手创立。截至2007年底,共出版139期,发表文章1650余篇。50年来,《测绘学报》努力搭建学术期刊与科技人员之间良性互动的学术交流平台,通过严格执行论文编辑出版制度,培养了作者的科学态度和严谨作风,造就了一批批勤奋求实、肯于钻研的优秀测绘科技人才,成为了测绘科技人员共有的学术交流园地,奠定了国内测绘学术第一刊的地位。

此次论坛由中国科学院院士陈俊勇主持,李清泉教授(代表李德仁院士)、刘先林院士、中国科学院新当选院士杨元喜分别做了《信息化测绘的本质是服务》、《国产航空数码相机》、《2000国家大地坐标系现状和影响》的大会学术报告。大会还向荣获“《测绘学报》50年杰出贡献奖”的李德仁、晁定波、杨元喜、毋河海、欧吉坤、陈映鹰、舒 宁、沈云中等八位学者颁发了证书和奖品。

《光明日报》、《科技日报》、《中国测绘报》以及新华网等媒体也对此次论坛进行了报道。