

The performance of the mean control charts for monitoring characteristics double bounded with estimated parameter

Luiz Medeiros de Araujo Lima Filho^a, Letícia Garcez Corrêa da Costa^b

^a*Departamento de Estatística, Universidade Federal da Paraíba, Brazil, e-mail: luiz@de.ufpb.br*

^b*Departamento de Estatística, Universidade Federal da Paraíba, Brazil, e-mail: leticiagaccosta@gmail.com*

Resumo

Gráfico de controle é uma ferramenta muito utilizada em grande parte por indústrias no monitoramento de características da qualidade. Particularmente são bastante avaliados aspectos representados por variáveis duplamente limitadas, tais como taxas e proporções. Sabe-se que o desempenho dos gráficos de controle diminui significativamente quando a suposição de parâmetros conhecidos é inválida. No entanto, em situações de aplicações reais, os parâmetros do processo são desconhecidos e precisam ser estimados a partir de uma amostra finita (Fase I). Desta forma, este artigo tem como objetivo avaliar gráficos de controle de variáveis contínuas duplamente limitadas, quando os parâmetros são desconhecidos. Em particular, investigamos o número mínimo de amostras na Fase I de modo a ter um desempenho próximo ao caso em que os parâmetros são conhecidos. Para tanto, são utilizados os gráficos de controle beta, gama unitária e simplex. Os gráficos de controle foram avaliados e comparados através de um extenso estudo de simulação de Monte Carlo, em termos de ARL, MRL e SDRL. Os resultados sugerem que o gráfico de controle simplex é o mais adequado para modelar dados duplamente limitados quando os parâmetros são desconhecidos. Ademais, para obter uma boa acurácia, de acordo com os resultados obtidos, faz-se necessário um tamanho de amostra mínimo de 100 observações na Fase I. Por fim, duas aplicações a banco de dados reais são apresentadas para demonstrar a aplicabilidade dos gráficos de controle no monitoramento de variáveis do tipo taxas e proporções contínua.

Palavras-Chave: Controle estatístico de processo, gráfico de controle, parâmetros desconhecidos, variáveis duplamente limitadas, taxas e proporções.

1. Introduction

O Controle Estatístico do Processo (CEP) é muito utilizado na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade por meio da redução da variabilidade (Montgomery, 2009). A principal ferramenta para esse monitoramento é o gráfico de controle (Montgomery, 2009). Essa é uma das sete ferramentas da qualidade e é construído com base em um histórico do processo. Inicialmente os gráficos de controles foram utilizados para monitorar processos industriais, porém, atualmente, esse instrumento é utilizado por diversas áreas (Lima-Filho et al., 2019).

Em algumas situações práticas, há interesse de modelar variáveis duplamente limitadas, tais como taxas e proporções. Há circunstâncias em que essas taxas e proporções não resultam de um experimento de Bernoulli. Ou seja, essas taxas e proporções podem representar medidas

individuais (por exemplo, escores) ou razão entre números contínuos (por exemplo, proporção de álcool anidro na gasolina). Assim, quando a característica da qualidade é proveniente de números contínuos, o gráfico de controle p não é adequado.

Devido à variabilidade na estimativa dos parâmetros, sabe-se que o desempenho dos gráficos de controle se deterioram significativamente quando os parâmetros são desconhecidos. Portanto, dado a importância de se investigar o desempenho dos gráficos de controle sob esta condição, vários estudos têm sido propostos na literatura nos últimos, como, por exemplo: Lima-Filho et al. (2019), Lima-Filho e Bayer (2019), ...

Dado o interesse em monitorar e controlar taxas e proporções contínuas, esse artigo tem como objetivo avaliar a performance dos gráficos de controle beta, gama unitária e simplex quando os parâmetros são desconhecidos (caso U), fato que em situações reais é mais frequente de ocorrer. Lee Ho et al. (2019) avaliaram esses gráficos de controle quando os parâmetros são conhecidos (caso K). Uma simulação de Monte Carlo foi realizada considerando na Fase I os tamanhos amostrais 25, 50, 100 e 200. A performance dos gráficos de controle foram avaliadas e comparadas por meio da análise de RL (run length). Para isso, uma sequência de 5.000 observações foram consideradas (Fase II).

Após essa seção introdutória, esse artigo está organizado da seguinte forma. Seção 2 analisa de forma resumida as distribuições utilizadas para modelar dados tipo taxas e proporções, assim como apresenta de forma breve a verossimilhança das distribuições. Os gráficos de controle para monitorar taxas e proporções foram discutidos na seção 3, da mesma maneira que as formas de avaliação dos gráficos de controle foram exibidos de forma sucinta. Outra discussão dessa seção é referente ao desempenho dos gráficos de controle por meio do ARL, MRL e SDRL. Aplicações reais foram apresentadas na seção 4 e a conclusão na seção 5.

2. A review on the double bounded distributions

2.1. Beta distribution

Pelo fato da distribuição beta ser definida no intervalo (0,1), ela é frequentemente utilizada para modelar variáveis aleatórias do tipo taxas e proporções.

A distribuição beta apresenta dois parâmetros $\mu > 0$ e $\phi > 0$, e é denotada por $X \sim \text{Beta}(\mu, \phi)$, podendo assumir tanto a forma simétrica quanto a forma assimétrica, dependendo dos valores dos parâmetros. Assim, a sua função de distribuição acumulada não apresenta forma fechada, enquanto sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por:

$$f(x; \mu, \phi) = \frac{x^{\mu\phi-1}(1-x)^{(1-\mu)\phi-1}}{B(\mu\phi, (1-\mu)\phi)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

em que:

$$B(\mu\phi, (1-\mu)\phi) = \frac{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)}{\Gamma(\mu\phi + (1-\mu)\phi)} \quad (2)$$

A partir disso, tem-se que a média e variância dessa distribuição são dadas por:

$$E(X) = \mu \quad (3)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\mu(1-\mu)}{\phi+1} \quad (4)$$

Na prática, os parâmetros μ e ϕ são desconhecidos e algum método de estimação se faz necessário. Para esse fim, devido as boas propriedades, os estimadores de máxima verossimilhança são amplamente utilizados. A função de log-verossimilhança (Ferrari e Cribari-Neto, 2004) é dada por:

$$l = l(\mu, \phi) = \sum_{i=1}^n \{[(1-\mu)\phi - 1] \log(1-x_i) + (\mu\phi - 1) \log x_i - \log B(\mu\phi, (1-\mu)\phi)\} \quad (5)$$

em que:

$$\begin{aligned} \log B(\mu\phi, (1-\mu)\phi) &= \log \Gamma(\mu\phi) + \\ \log \Gamma((1-\mu)\phi) &- \log \Gamma(\mu\phi + (1-\mu)\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança (MLE's) $\hat{\mu}$ e $\hat{\phi}$ são obtidos por meio da resolução de um sistema não linear. Como os MLE's não possuem forma fechada, eles foram obtidos numericamente.

2.2. Distribuição Gama Unitária

A distribuição gama unitária com parâmetros $0 < \mu < 1$ e $\tau > 0$, apesar de não ser muito conhecida, possui propriedades que se assemelham a distribuição beta. Com isso, ela pode ser um modelo potencial para substituição da distribuição beta clássica. A função de densidade da GU é dada por meio de uma manipulação da distribuição Gama, tendo como resultado:

$$f(x|\mu, \tau) = \frac{\left[\frac{\mu^{1/\tau}}{1-\mu^{1/\tau}}\right]^\tau x^{\frac{\mu^{1/\tau}}{1-\mu^{1/\tau}}-1} (-\log x)^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} \quad (7)$$

em que:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du. \quad (8)$$

Com isso, pode-se dizer que a média e variância dessa distribuição são dadas por:

$$E(X) = \mu \quad (9)$$

$$\text{Var}(X) = \mu \left[\frac{1}{(2 - \mu^{1/\tau})^\tau} - \mu \right] \quad (10)$$

Dada a função densidade de probabilidade, a função log-verossimilhança ($l(\mu, \tau)$) (Mazucheli et al., 2018) é determinada por:

$$l = l(\mu, \tau) = n\tau \log(\mu^{1/\tau}) - n\tau \log(1 - \mu^{1/\tau}) - n \log \Gamma(\tau) + \left[\frac{\mu^{1/\tau}}{1 - \mu^{1/\tau}} \right] \sum_{i=1}^n \log x_i + \tau \sum_{i=1}^n \log(-\log x_i) \quad (11)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança (MLE's) $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}$, dado que eles não possuem forma fechada, foram obtidos numericamente.

2.3. Distribuição Simplex

A distribuição simplex é derivada da distribuição gaussiana inversa generalizada. Uma variável aleatória X segue distribuição Simplex com parâmetros $0 < \mu < 1$ e $\sigma^2 > 0$ denotada por $X \sim S(\mu, \sigma^2)$, se sua função densidade de probabilidade é dada por (?)Barndorff-Nielsen1984):

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \{2\pi\sigma^2[x(1-x)]^3\}^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} d(x; \mu) \right], \quad (12)$$

$d(x; \mu)$ é dado por:

$$d(x; \mu) = \frac{(x - \mu)^2}{x(1-x)\mu^2(1-\mu)^2} \quad (13)$$

A média e a variância de X são dadas por:

$$E(X) = \mu \quad (14)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2\mu^2(1-\mu)^2} \right\} \Gamma \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2\mu^2(1-\mu)^2} \right) \quad (15)$$

Onde:

$$\Gamma(a, b) = \int_b^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (16)$$

A função log-verossimilhança dessa distribuição pode ser representado da seguinte forma:

$$l = l(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \{ \log \sigma^2 + 3 \log [x_i(1-x_i)] \} - \frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{(x_i - \mu_i)^2}{x_i(1-x_i)\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] \right\} \quad (17)$$

Como os estimadores $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ não possuem forma fechada, eles foram estimados via método numérico.

2.4. Limites de Controle Estimados

Como dito anteriormente, na prática, em geral, os parâmetros das distribuições são desconhecidos e um método de estimamação se torna necessário. Uma vez que temos a estimativa dos parâmetros, fixado o erro tipo I, α (probabilidade de alarme falso), temos que:

$$P(\widehat{LIC}_i | \Theta_{0i} \leq X_i \leq \widehat{LIC}_i | \Theta_{0i}) = 1 - \alpha \quad (18)$$

Dessa forma, por simplicidade pode-se dizer que:

$$P(X_i \leq \widehat{LIC}_i | \Theta_{0i}) = P(X_i \geq \widehat{LSC}_i | \Theta_0) = \alpha/2 \quad (19)$$

$$\int_0^{\widehat{LIC}_i} f(x_i | \Theta_{0i}) = \int_{\widehat{LSC}_i}^1 f(x_i | \Theta_{0i}) = \alpha/2, \quad (20)$$

em que $i = B$ (beta), GU (gama unitária) e S (simplex), com $\Theta_{0i} = (\mu_{0B}, \phi_0), (\mu_{0GU}, \tau_0)$ e (μ_{0S}, σ_0^2) .

Assim, os limites de controle estimados (\widehat{LSC} e \widehat{LIC}) são definidos de forma que:

$$\widehat{LIC}_i = \psi(\alpha/2; \Theta_{0i}) = F^{-1}(\alpha/2; \Theta_{0i}) \quad (21)$$

$$\widehat{LSC}_i = \psi(1 - \alpha/2; \Theta_{0i}) = F^{-1}(1 - \alpha/2; \Theta_{0i}) \quad (22)$$

Em que ψ é a função quantílica da distribuição de probabilidade adotada com parâmetro Θ_{0i} e F^{-1} é a função de distribuição acumulada.

Quando o processo encontra-se sob controle, pode-se dizer que os pontos amostrais estarão entre as duas linhas horizontais definidas como limite de controle inferior (LIC) e limite de controle superior (LSC), limites que se baseiam na variação aleatória do processo. Caso contrário, se algum ponto for plotado fora dos limites de controle, indicando uma condição de anormalidade, o processo deve ser investigado para que sejam detectadas as causas do desvio e aplicada as ações corretivas necessárias.

Da mesma forma, o poder de detecção $(1 - \beta)$ desses gráficos de controle, considerando uma mudança δ na média, pode ser determinado como:

$$P(X_i < \widehat{LIC}_i | \Theta_1) + P(X_i > \widehat{LSC}_i | \Theta_1) = 1 - \beta \quad (23)$$

em que $\Theta_{1i} = (\mu_{1B}, \phi_0), (\mu_{1GU}, \tau_0)$ e (μ_{1S}, σ_0^2) , e $\mu_{1i} = \mu_{0i}\delta$.

Dessa forma, o seguinte algoritmo para obtenção dos gráficos de controle beta, gama unitária e simplex foi implementado:

1. Obter os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.
2. Determinar os limites de controle estimados \widehat{LIC}_i e \widehat{LSC}_i para as três distribuições para um determinado α , usando (21) (22).
3. Plotar as observações e os limites de controle \widehat{LIC}_i e \widehat{LSC}_i .
4. As observações que estiverem fora dos intervalos delimitados são considerados fora de controle. Sendo assim, ações corretivas são necessárias.

3. Control charts performance

O desempenho das cartas de controle é normalmente medida em termos do número médio de amostras até que uma causa especial seja detectada. Essa medida de desempenho é conhecida como ARL (average run length) (Montgomery, 2009). Outras medidas comumente utilizadas para avaliar o desempenho dos gráficos de controle são a mediana (MRL) e o desvio padrão (SDRL) da distribuição do comprimento da execução (RL).

Essas medidas são expressas por:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (24)$$

$$SDRL = \sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}} \quad (25)$$

$$MRL = \frac{\ln(0.5)}{\ln(1-p)} \quad (26)$$

Quando o processo está sob controle, essas medidas são dadas em função do erro tipo I e $p = \alpha$. Quando o processo está fora de controle, essas medidas são funções do erro tipo II e $p = 1 - \beta$. (Lima-Filho et al., 2019) (Lee Ho et al., 2019)

Um gráfico de controle com melhor desempenho é o que mais se aproxima dos níveis nominais em termos de ARL_0 , MRL_0 e $SDRL_0$. Por outro lado, para gráficos de controle com mesmo ARL_0 , MRL_0 e $SDRL_0$, aquele com o menor ARL_1 , MRL_1 e $SDRL_1$ é considerado o melhor. Por exemplo, um valor baixo de ARL_1 indica que é necessário um número médio menor de amostras coletadas para a correta detecção de alterações na característica da qualidade. (Lima-Filho e Bayer, 2019)

3.1. Simulation procedure

Na Tabela 1 encontram-se os parâmetros das distribuições para os 4 cenários considerados. A primeira coluna é referente aos diferentes cenários avaliados no estudo. Já a segunda coluna, corresponde aos valores do parâmetro μ , enquanto as colunas 3-5 são relativas aos parâmetros de dispersão das distribuições beta, simplex e unit Gamma, respectivamente.

Table 1: Dispersion parameters in different cases.

Case	μ	Beta (ϕ)	Simplex (σ^2)	Unit Gamma (τ)
1	0.1	75	1.37	43.59
2	0.3	150	0.38	96.75
3	0.5	100	0.39	51.64
4	0.7	50	0.70	14.36

A densidade das três distribuições nos cenários 1-4 estão apresentadas nas Figuras 1.

Para avaliar e comparar a performance das cartas de controle, em termos de ARL, MRL e SDRL, quando os parâmetros são desconhecidos, foi utilizada uma simulação de Monte Carlo, onde 5.000 réplicas foram geradas, considerando $\alpha = 0.0027$. A seguir uma breve descrição do procedimento de simulação:

1. Uma sequência de $n + 10.000$ observações são geradas considerando a distribuição beta, cenário 1.
2. A seguir, os parâmetros das três distribuições foram estimados por meio do estimador de máxima verossimilhança, considerando as n primeiras observações (fase I).
3. Em seguida, para o valor fixado de α , os limites de controle são determinados considerando os parâmetros estimados no passo anterior.
4. As 10.000 últimas observações (fase II) foram utilizadas para analisar o desempenho dos gráficos de controle por meio do ARL, MRL e SDRL.
5. Após o procedimento ser repetido 5.000 vezes, foram calculadas as médias de cada medida de desempenho (ARL, MRL, SDRL).
6. Os passos 1-5 são repetidos para as distribuições Simplex e Gama Unitária.
7. Os passos 1-6 são repetidos para $n = 50, 100, 200$.
8. Os procedimentos são repetidos para todos os valores de δ (0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3).
9. Por fim, os passos anteriores são repetidos considerando os cenários 2, 3 e 4 e $\alpha = 0.01$.

Para avaliar a performance dos gráficos de controle, códigos no software R foram construídos. Todas as simulações foram realizadas por meio dessa linguagem de programação. Para estimar os parâmetros das distribuições beta, gamma unitária e simplex foram utilizados os pacotes `gamlss`, `VGAM` e `fitdistrplus`, respectivamente.

3.2. Simulation results

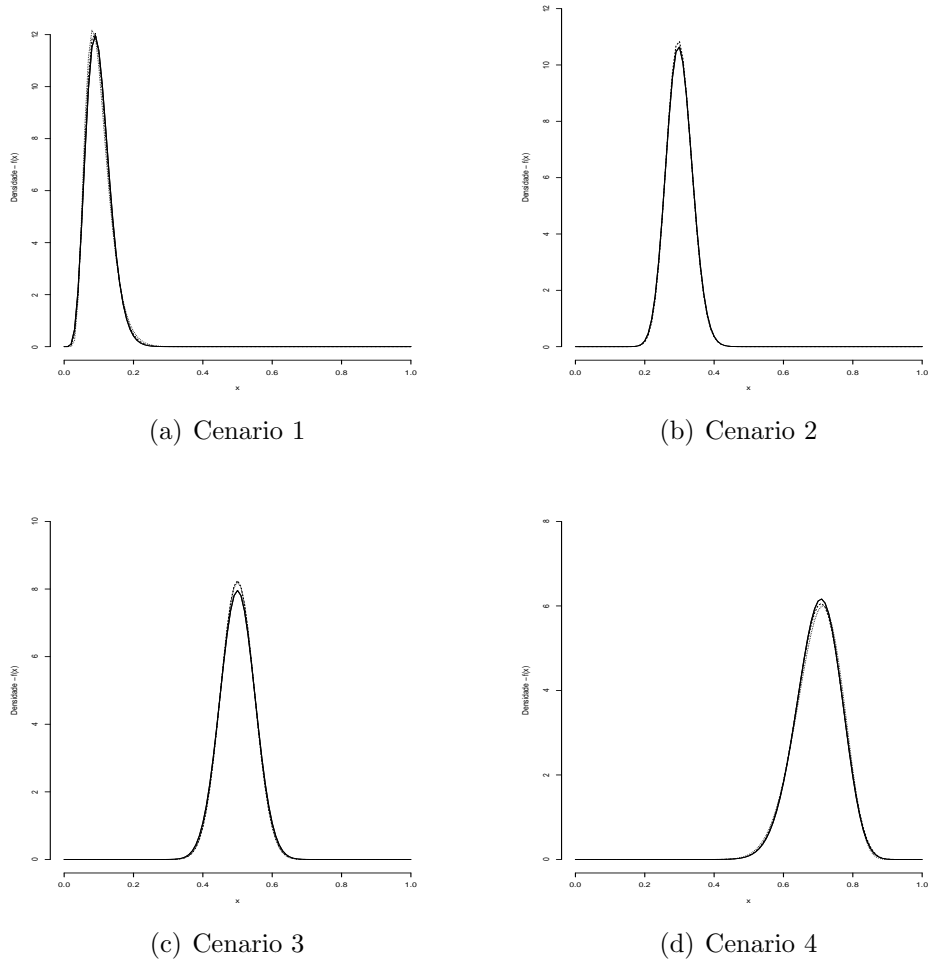
A performance dos gráficos de controle, considerando $\alpha = 0.0027$, em termos de ARL, SDRL e MRL, em relação aos cenários 1-4, são apresentados nas Tabelas 2-5, respectivamente. Enquanto o desempenho dos gráficos de controle considerando $\alpha = 0.01$, em termos de ARL, SDRL e MRL, e seus cenários, estão presentes nas Tabelas 6-9.

Diferentes valores de δ , que simboliza a mudança induzida no processo, foram utilizados. O processo encontra-se fora de controle, quando o $\delta = \{0.7, 0.8, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3\}$ e o processo sob controle, quando $\delta = 1$. Considerado $\alpha = 0.0027$, quando o processo está em controle é esperado um $ARL_0 = 370$, $MRL_0 = 256.1$ e $SDRL_0 = 369.5$. Quando considerado um $\alpha = 0.01$, o esperado é que $ARL_0 = 100$, $MRL_0 = 69$ e $SDRL_0 = 99.5$.

As colunas correspondentes a Beta - True, UGamma - True e Simplex - True são os desempenhos quando os limites de controle adequados são utilizados. As demais colunas são resultados quando os limites de controle incorretos são empregados.

Quanto maior o tamanho da amostra utilizada, os resultados das medidas de desempenho se aproximam do valor nominal. Outro fator importante a ser analisado é que a partir do tamanho

Figure 1: Densidade da distribuição beta (solid line) simplex (dashed line) and gamma unit (dotted line) nos diferentes cenários



de amostra 100, temos um resultado satisfatório **o que é satisfatório? qual o erro máximo?**. Ou seja, uma amostra desse tamanho é suficiente para obter uma boa acurácia.

Ao comparar as medidas de desempenho (ARL, SDRL e MRL), observa-se que quando a distribuição correta é considerada, o gráfico de controle que apresenta a melhor performance, na maioria dos cenários, é o simplex. Por sua vez, quando empregado os limites de controle incorretos, ou seja, considerar a distribuição equivocada, o gráfico de controle simplex ainda assim apresenta bom desempenho na maioria dos casos. Por consequência, o gráfico em questão é o que mais se aproxima dos valores nominais das medidas de desempenho e possivelmente a distribuição mais adequada para modelar dados duplamente limitados como taxas e proporções.

Para melhor visualização das análises feitas acima, foi calculado o Erro Absoluto Médio Percentual (MAPE), medida que calcula em média quanto cada distribuição está errando na estimativa, medindo a qualidade da previsão e expressando a acurácia do erro em porcentagem. A Tabela 10 apresenta os resultados referentes ao $\alpha = 0.0027$, enquanto a Tabela 11 é relativo ao $\alpha = 0.01$.

$$MAPE = \left(\frac{1}{n} \sum \frac{RL - \widehat{RL}}{RL} \right) * 100 \quad (27)$$

Levando em conta o MAPE dos quatro tamanhos de amostra escolhidos, a distribuição que apresenta o menor valor desse erro na maioria dos casos para os dois alphas adotados é a Simplex.

O MAPE global representa a média do MAPE de cada medida de desempenho considerando todos os tamanhos de amostra. A partir dessa medida de acurácia, há evidências suficientes para considerar a distribuição Simplex a mais adequada para modelar dados do tipo taxas e proporções.

Table 2: Comparing the performance of the control charts - Case 1 - ARL 370

δ	Beta - True			UGamma			Simplex			Beta			UGamma - True			Simplex			Beta			UGamma			Simplex - True			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 25$	0.7	53.10	51.61	37.87	32.82	23.20	16.31	15.75	11.46	111.63	102.13	83.52	57.48	55.76	41.14	22.20	21.57	15.56	1134.11	647.39	1014.82	772.70	499.38	666.69	184.15	160.09	141.58	
	0.8	158.96	144.74	118.31	92.31	88.83	66.51	39.17	38.49	27.40	289.53	229.50	164.26	150.50	121.74	55.10	54.00	38.62	1393.37	792.90	1260.44	1059.92	638.31	939.47	356.59	295.83	282.22	
	0.9	363.86	295.75	290.60	250.86	215.33	193.71	101.22	98.46	72.24	497.34	384.09	404.76	380.44	309.47	141.73	135.04	102.22	1066.88	694.01	935.74	1031.21	684.53	893.83	552.62	416.57	451.32	
	1.0	524.57	412.21	424.24	493.35	382.09	396.12	263.73	229.56	199.76	516.63	406.56	422.50	537.14	415.14	435.33	321.23	281.36	244.47	486.59	383.25	393.58	602.56	461.13	494.68	508.44	402.89	406.35
	1.1	466.04	371.04	372.29	579.00	441.36	476.10	490.17	400.62	388.65	370.90	302.00	291.55	498.24	388.27	407.07	484.25	386.49	388.76	171.37	153.81	238.97	217.49	174.76	304.35	263.00	235.31	
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 50$	1.2	318.20	239.11	248.81	455.17	361.18	369.23	591.36	443.72	486.91	215.06	195.22	161.99	329.77	258.92	262.76	484.03	373.86	355.05	69.65	66.47	49.84	96.51	91.86	70.20	140.06	126.20	103.37
	1.3	170.48	150.97	129.22	285.33	235.17	225.85	488.22	354.33	406.01	118.54	107.94	87.83	191.51	165.88	146.54	315.41	259.14	251.45	32.36	31.53	22.73	43.76	42.32	30.98	64.07	62.33	45.62
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	25.03	24.40	17.57	19.39	18.83	13.61	12.02	11.50	76.34	74.60	53.71	43.92	43.04	30.79	19.57	18.99	13.75	1265.40	777.72	1117.20	733.10	521.37	615.21	131.70	126.25	94.88	
	0.8	79.23	77.84	55.59	57.44	56.45	40.19	31.36	30.72	21.97	216.85	200.18	161.33	120.34	116.51	85.89	46.79	46.09	33.75	1714.75	1011.21	1552.68	1158.09	753.31	1007.37	289.74	218.22	215.71
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 100$	0.9	256.94	237.51	189.44	190.07	179.32	137.89	93.13	91.29	65.41	436.01	375.86	336.32	306.23	276.68	228.17	118.09	115.15	83.88	1169.68	821.26	999.07	1110.88	793.78	947.20	483.57	419.46	375.93
	1.0	477.21	408.77	367.35	449.97	383.64	344.12	277.19	255.61	205.23	464.22	413.64	356.42	487.06	415.37	377.78	270.70	255.62	198.17	403.00	357.92	307.68	528.81	455.99	410.35	461.22	399.64	356.54
	1.1	349.41	308.91	264.22	440.76	375.87	341.71	461.19	397.53	356.18	294.41	273.30	217.21	414.26	362.63	319.42	420.27	374.64	318.31	129.75	126.28	92.05	183.55	175.66	130.65	238.15	228.38	172.30
	1.2	156.38	149.48	113.15	224.00	203.33	165.43	328.51	295.33	248.86	160.67	152.51	115.79	248.82	229.98	185.70	382.47	329.42	292.71	53.53	52.37	37.61	71.97	70.26	50.68	102.89	100.23	72.71
	1.3	65.79	63.97	46.80	92.09	89.52	65.61	153.22	141.83	110.42	85.74	83.32	60.67	134.28	126.88	97.20	240.73	221.55	178.87	27.29	26.64	19.16	34.99	34.24	24.54	48.79	48.02	34.11
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 200$	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	21.08	21.15	15.17	17.44	16.92	12.24	11.41	10.89	8.06	57.38	56.44	40.16	36.50	35.82	25.53	18.19	17.66	12.76	1450.75	1044.65	1247.61	575.98	510.60	439.71	98.69	96.08	69.29
	0.8	63.66	62.93	44.44	48.77	48.08	34.11	28.77	28.18	20.13	156.94	153.53	110.62	95.10	93.42	66.60	42.05	41.34	29.40	2101.89	1368.72	1890.33	1142.55	896.58	941.95	218.48	212.58	154.66
	0.9	199.28	193.88	141.60	150.73	146.82	106.47	81.97	80.68	57.46	348.62	333.05	252.03	238.62	231.95	169.55	101.95	100.48	71.29	1207.23	974.64	980.27	1200.62	954.70	979.48	404.38	381.89	294.07
	1.0	398.76	377.54	290.83	374.26	353.95	271.45	235.50	227.70	168.00	381.89	360.19	278.62	390.02	377.55	291.27	233.29	226.97	164.90	326.93	312.88	234.86	444.40	419.74	322.99	396.72	374.78	290.08
Valores Teóricos	1.1	265.86	257.71	189.60	342.27	327.33	247.13	386.93	369.19	279.33	230.40	223.10	163.56	325.28	309.25	234.55	356.44	342.15	255.80	108.79	107.01	76.33	148.26	145.35	104.58	198.17	193.54	139.65
	1.2	113.80	111.89	79.91	155.37	151.79	109.75	235.05	227.56	166.93	122.63	120.52	85.86	183.36	178.24	130.43	292.20	281.54	269.61	47.40	46.60	33.17	62.06	60.99	43.49	86.91	85.60	60.81
	1.3	50.16	49.29	35.07	66.76	65.76	46.73	101.53	99.51	71.45	66.90	65.93	46.79	99.31	97.78	69.66	170.48	166.03	120.69	25.12	24.51	17.61	31.61	30.96	22.11	42.92	42.14	30.02
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	32.6	32.1	22.25	24	23.49	16.28	14.08	13.57	9.41	51.07	50.56	35.05	34.8	34.3	23.77	18.07	17.56	12.17	865.66	865.16	599.69	359.23	358.73	248.65	88.88	88.38	61.26
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$	0.8	83.52	82.02	57.55	58.51	58.01	40.21	31.01	30.5	21.14	135.04	134.54	93.26	88.65	88.14	61.1	41.44	40.94	28.38	1750.88	1750.38	1213.27	818.39	817.89	566.92	194.41	193.91	134.41
	0.9	212.69	212.19	147.08	150.23	149.73	103.79	73.73	73.23	50.76	300.19	299.69	207.73	219.53	219.03	151.82	99.85	99.35	68.86	921.03	920.53	638.06	946.91	946.41	656	358.61	358.11	248.22
	1.0	370.37	369.87	256.37	338.5	338	234.29	181.05	180.54	125.14	336.76	336.26	233.08	370.37	369.87	256.37	227.97	227.47	157.67	257.84	257.34	178.38	257.84	257.34	178.38	370.83	370.33	256.69
	1.1	291.43	290.93	201.66	406.43	405.93	281.37	372.38	371.88	257.77	203.61	203.11	140.78	296.79	296.29	205.37	348.08	347.58	240.93	91.25	90.75	62.9	91.25	90.75	62.9	185.44	184.94	128.19
	1.2	156.68	156.18	108.26	251.35	250.85	173.88	403.37	402.87	279.25	108.61	108.11	74.94	165.85	165.35	114.61	272.3	271.8	188.4	41.38	40.88	28.34	41.38	40.88	28.34	82.17	81.67	56.61
1.3	82.4	81.9	56.77	131.71	131.21	90.95	245.15	244.65	169.58	60.07	59.57	41.29	90.33	89.83	62.27	156.37	155.87	108.04	22.51	22	15.25	22.51	22	15.25	41.29	40.78	28.27	

Table 3: Comparing the performance of the control charts - Case 2 - ARL 370

δ	Beta - True				UGamma				Simplex				UGamma - True				Simplex				Beta				UGamma				Simplex - True			
	ARL		SDRL		ARL		SDRL		ARL		SDRL		ARL		SDRL		ARL		SDRL		ARL		SDRL		ARL		SDRL					
	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL	MRL	ARL				
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 25$	0.7	3.67	3.11	2.67	3.47	2.91	2.54	3.03	2.47	2.25	3.35	2.79	2.46	3.19	2.62	2.35	2.82	2.26	2.11	4.96	4.40	3.56	4.50	3.93	3.24	3.59	3.03	2.62				
	0.8	17.53	17.00	12.31	15.77	15.22	11.06	12.24	11.75	8.65	15.16	14.58	10.78	13.78	13.22	9.72	10.97	10.44	7.75	40.09	37.76	28.91	33.72	31.97	23.87	22.43	15.45	15.77				
	0.9	159.42	139.57	119.70	138.75	125.58	103.12	97.44	91.82	70.80	147.46	137.80	107.18	131.47	120.92	95.79	90.89	89.32	63.90	348.65	275.06	279.47	309.54	244.08	206.59	179.42	157.43					
	1	719.99	585.78	580.19	710.44	569.04	575.05	623.95	507.96	497.36	767.79	607.27	623.51	758.04	598.94	615.81	669.14	537.35	537.08	849.10	654.74	698.40	855.57	650.56	705.79	764.55	596.93	623.86				
	1.1	228.54	196.40	173.29	246.42	212.35	187.54	269.97	232.62	208.52	235.63	207.59	180.32	229.28	223.57	201.17	280.97	243.26	172.62	146.01	129.86	109.58	139.47	142.84	120.43	172.67	154.76	130.61				
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 50$	1.2	32.50	31.17	23.29	36.04	34.61	25.71	39.98	38.58	28.78	34.61	32.05	25.12	38.01	37.94	27.94	41.52	38.16	30.35	19.75	13.94	13.94	21.24	20.50	16.06	10.43	22.75	22.04				
	1.3	6.81	6.26	4.86	7.27	6.71	5.18	7.77	7.21	5.54	7.03	6.51	5.01	7.53	7.00	5.33	8.05	7.52	5.69	5.30	4.77	3.82	5.56	5.02	4.00	5.83	5.29	4.18				
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL			
	0.7	3.15	2.59	2.34	3.02	2.46	2.26	2.72	2.16	2.06	2.93	2.37	2.19	2.82	2.26	2.12	2.56	2.00	1.95	3.59	3.03	2.63	3.38	2.82	2.48	2.92	2.35	2.16				
	0.8	12.38	11.85	8.72	11.52	10.99	8.12	9.50	9.07	6.80	11.23	10.71	7.93	10.49	9.98	7.41	8.80	8.28	6.25	20.26	19.74	14.21	18.26	17.76	12.81	14.07	13.54	9.91				
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 100$	0.9	94.41	91.40	66.96	84.42	82.39	59.41	64.00	62.88	44.88	89.40	86.65	63.44	81.81	78.16	58.23	61.01	60.05	43.01	190.32	178.19	139.21	165.81	155.25	120.88	114.93	110.74	81.66				
	1	536.78	460.60	413.85	533.25	460.13	411.17	459.20	413.11	345.68	535.88	455.93	418.01	533.24	457.04	414.03	473.65	410.45	361.13	594.28	497.91	465.97	587.04	499.48	455.61	536.75	466.94	410.91				
	1.1	120.26	116.34	85.42	132.37	127.71	94.51	146.66	141.06	104.11	120.51	117.71	85.16	132.88	129.57	94.11	146.85	142.94	104.48	76.48	74.29	54.19	83.28	80.77	59.12	90.91	88.93	63.17				
	1.2	18.36	17.78	12.91	19.77	19.17	13.89	21.47	20.82	15.02	18.85	18.29	13.26	20.33	19.75	14.28	22.01	21.41	15.42	12.81	12.26	9.06	13.58	13.02	9.59	14.43	13.87	10.87				
	1.3	4.88	4.34	3.51	5.12	4.59	3.68	5.41	4.87	3.88	4.86	4.32	3.50	5.11	4.58	3.68	5.40	4.87	3.88	4.07	3.52	2.94	4.22	3.68	3.05	4.39	3.85	3.17				
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 200$	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL			
	0.7	2.93	2.37	2.19	2.82	2.26	2.13	2.58	2.01	1.97	2.77	2.21	2.09	2.68	2.11	2.03	2.46	1.89	1.90	3.21	2.65	2.38	3.05	2.49	2.26	2.69	2.13	2.02				
	0.8	10.75	10.22	7.60	10.07	9.54	7.13	8.58	8.06	6.11	9.96	9.44	7.06	9.37	8.84	6.65	8.03	7.50	5.70	16.21	15.67	11.40	14.82	14.29	10.43	11.91	11.39	8.40				
	0.9	74.16	72.70	52.12	67.31	66.19	47.22	52.86	52.06	36.94	71.56	70.51	50.01	65.06	64.10	45.46	51.27	50.44	35.90	136.44	133.36	96.31	120.43	118.25	84.34	88.87	87.53	62.17				
	1	431.82	397.49	320.82	425.07	390.73	316.02	373.92	347.95	274.27	447.24	411.23	333.26	445.15	409.15	331.38	394.67	371.07	290.06	489.20	443.12	364.08	497.01	451.02	371.99	444.44	413.99	327.44				
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 400$	1.1	90.96	89.28	64.10	99.11	97.16	69.94	109.11	106.82	77.20	92.80	91.03	65.18	101.10	99.10	71.22	111.18	108.96	78.23	60.75	59.70	42.51	65.33	64.27	45.69	70.92	69.83	49.68				
	1.2	15.33	14.77	10.81	16.34	15.77	11.52	17.62	17.03	12.40	15.90	15.36	11.19	16.98	16.44	11.94	18.32	17.76	12.86	11.18	10.66	7.90	11.77	11.25	8.31	12.47	11.94	8.80				
	1.3	4.37	3.83	3.15	4.56	4.03	3.30	4.80	4.27	3.47	4.38	3.84	3.17	4.58	4.04	3.31	4.82	4.29	3.47	3.75	3.21	2.71	3.88	3.34	2.81	4.03	3.50	2.92				
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL			
	Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 800$	0.7	2.88	2.33	2.13	2.78	2.23	2.08	2.55	1.99	1.98	2.69	2.13	2.04	2.61	2.05	2.01	2.40	1.83	1.92	3.09	2.54	2.28	2.95	2.39	2.18	2.62	2.06	2.00			
Case2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 1600$	0.8	10.33	9.81	7.32	9.73	9.21	6.90	8.35	7.83	5.95	9.37	8.85	6.64	8.86	8.33	6.28	7.65	7.13	5.45	14.96	14.44	10.53	13.78	13.26	9.71	11.25	10.73	7.95				
	0.9	68.23	67.25	47.65	62.45	61.51	43.67	49.88	49.15	34.87	64.07	63.24	44.72	58.81	58.02	41.07	47.03	46.31	32.85	119.24	116.94	83.84	106.40	104.47	74.72	80.10	78.79	56.16				
	1	398.86	377.44	291.16	394.09	371.42	288.56	344.86	327.49	249.71	399.41	376.28	292.23	399.02	377.65	291.31	354.87	339.08	256.85	432.63	408.56	315.30	438.29	413.15	318.43	398.75	377.52	290.83				
	1.1	82.14	80.90	57.43	89.27	87.95	62.57	97.93	96.35	68.73	83.08	81.71	58.20	90.27	88.66	63.41	98.81	97.15	69.26	55.40	54.55	38.71	59.39	58.52	41.48	64.18	63.22	44.90				
	1.2	14.42	13.86	10.16	15.35	14.79	10.81	16.50	15.93	11.59	14.81	14.29	10.43	15.79	15.26	11.11	16.95	16.41	11.91	10.61	10.07	7.51	11.14	10.61	7.87	11.78	11.24	8.33				
Valores Teóricos	1.3	4.23	3.69	3.07	4.41	3.88	3.20	4.63	4.10	3.35	4.20	3.66	3.05	4.38	3.85	3.17	4.60	4.07	3.33	3.65	3.10	2.65	3.77	3.23	2.74	3.91	3.37	2.85				
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL			
	0.7	2.85	2.29	1.6	2.61	2.05	1.43	2.34	1.77	1.24	2.83	2.27	1.59	2.59	2.03	1.42	2.32	1.75	1.23	3.26	2.72	1.89	2.88	2.33	1.63	2.47	1.91	1.34				
	Case2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 3200$	0.8	9.97	9.46	6.56	8.59	8.08	5.6	7.1	6.58	4.56	10.06	9.55	6.62	8.65	8.13	5.64	7.12	6.6	4.98	16.5	15.99	11.09	13.4	12.89	8.93	10.27	9.76	6.77			
	0.9	63.25	62.75	43.49	50.95	50.45	34.97	58.45	57.94	26.3	69.35	68.85	47.72	55.35	54.84	38.02	41.29	40.78	28.27	137.17	136.67	94.73	103.1	102.6	71.12	71.34	70.83	49.1				
Case 2 $\phi = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 1600$	1	370.37	369.87	256.37	306.21	305.71	211.9	242.93	242.43	168.04	447.47	446.97	309.82	370.37	369.87	256.37	294.44	293.94	203.75	549.86	549.36	380.79	549.86	549.36	380.79	370.38	369.88	256.38				
	1.1	76.33	75.83	52.56	71.49	70.98	49.2	70.44	69.94	48.48	88.55	88.05	61.03	82.79	82.29	57.04	81.61	81.11	56.22	63.26	62.76	43.5	63.26	62.76	43.5	58.81	58.31	40.42				
	1.2	13.88	13.37	9.27	13.23	12.72	8.82	13.13	12.62	8.75	15.73	15.22	10.55	14.95	14.44	10.01	14.82	14.31	9.92	11.61	11.09	7.69	11.61	11.09	7.69	11.05	10.54	7.31				
	1.3	4.16	3.62	2.52	4.02	3.49	2.43	4	3.47	2.41	4.42	3.89	2.7	4.26	3.73	2.59	4.24	3.7	2.58	3.85	3.31	2.31	3.83	3.31	2.31	3.73	3.19	2.22				
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	M																						

Table 4: Comparing the performance of the control charts - Case 3 - ARL 370

δ	Beta - True			UGamma			Simplex			UGamma - True			Beta			UGamma			Simplex - True		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 3	0.7	2.21	1.61	1.60	2.17	1.57	1.56	2.09	1.49	1.51	1.97	1.36	1.41	1.94	1.33	1.39	1.28	1.89	1.49	2.02	1.46
$\phi = 100$	0.8	9.03	8.48	6.42	8.67	8.10	6.16	7.97	7.41	5.67	6.66	6.12	4.76	6.44	5.90	4.60	6.06	5.52	4.34	8.78	6.68
$\sigma = 0.39$	0.9	100.18	90.71	73.75	94.30	85.68	68.84	81.43	77.23	58.81	71.15	69.18	50.37	66.44	64.27	47.09	58.76	57.26	41.51	120.37	107.89
$\tau = 51.64$	1	665.19	523.42	540.12	661.60	520.20	537.76	579.67	468.03	463.35	696.55	543.67	570.03	694.32	537.84	567.32	614.09	492.37	497.05	808.33	581.31
$n = 25$	1.1	100.99	94.07	73.82	106.03	98.62	77.86	83.92	78.16	60.55	133.49	122.96	98.40	139.96	128.25	104.87	107.95	102.39	77.60	117.88	106.73
	1.2	9.23	8.70	6.55	9.51	8.96	6.74	8.10	7.55	5.77	11.12	10.59	8.11	11.52	10.97	8.77	9.60	9.32	6.79	9.32	8.77
	1.3	2.23	1.64	1.60	2.26	1.67	1.62	2.11	1.51	1.50	2.14	1.53	1.54	2.17	1.57	1.56	2.01	1.39	1.43	2.07	1.46
Case 3	0.7	1.94	1.34	1.36	1.91	1.31	1.34	1.87	1.26	1.30	1.78	1.17	1.22	1.76	1.15	1.20	1.73	1.12	1.18	1.78	1.16
$\phi = 100$	0.8	6.61	6.08	4.73	6.42	5.88	4.59	6.08	5.55	4.36	5.20	4.68	3.74	5.08	4.54	3.65	4.88	4.34	3.51	6.37	5.83
$\sigma = 0.39$	0.9	55.95	54.88	39.28	53.19	52.19	37.36	48.34	47.51	33.87	41.26	40.55	28.80	39.46	38.79	27.60	36.46	35.81	25.52	60.61	57.38
$\tau = 51.64$	1	480.80	418.81	377.01	485.70	419.03	374.35	410.68	370.35	309.80	477.24	418.29	368.27	470.57	412.60	361.46	405.97	366.62	307.16	562.18	471.53
$n = 50$	1.1	57.10	56.10	39.78	59.24	58.24	41.39	49.28	48.40	34.47	67.37	65.99	47.63	70.26	68.62	49.92	58.30	57.25	41.17	58.10	57.01
	1.2	6.66	6.13	4.77	6.82	6.28	4.87	6.13	5.59	4.39	7.20	6.67	5.13	7.39	6.86	5.26	6.57	6.04	4.69	6.31	5.78
	1.3	1.94	1.34	1.37	1.96	1.36	1.39	1.87	1.26	1.31	1.79	1.17	1.26	1.81	1.19	1.27	1.72	1.10	1.21	1.77	1.15
Case 3	0.7	1.90	1.30	1.31	1.88	1.28	1.29	1.84	1.24	1.24	1.76	1.15	1.16	1.74	1.13	1.14	1.72	1.10	1.11	1.73	1.12
$\phi = 100$	0.8	6.22	5.69	4.45	6.06	5.53	4.34	5.79	5.26	4.15	4.98	4.45	3.60	4.88	4.34	3.52	4.71	4.17	3.40	5.86	5.34
$\sigma = 0.39$	0.9	48.05	47.25	33.57	46.01	45.26	32.15	42.57	41.91	29.73	36.08	35.39	25.28	34.74	34.08	24.32	32.58	31.96	22.81	48.29	47.40
$\tau = 51.64$	1	418.41	389.71	307.77	416.24	387.63	306.73	357.61	338.25	260.62	420.49	391.05	310.36	418.66	389.64	307.90	363.06	342.49	265.07	487.53	449.84
$n = 100$	1.1	47.51	46.77	33.22	49.18	48.41	34.38	42.22	41.49	29.50	56.18	55.26	39.35	58.36	57.38	40.84	49.79	48.91	34.92	47.66	46.88
	1.2	6.18	5.65	4.43	6.32	5.79	4.52	5.76	5.23	4.12	6.59	6.06	4.70	6.75	6.22	4.82	6.10	5.58	4.37	5.82	5.30
	1.3	1.90	1.30	1.32	1.92	1.32	1.34	1.84	1.23	1.25	1.74	1.13	1.18	1.76	1.15	1.19	1.68	1.06	1.13	1.73	1.11
Case 3	0.7	1.89	1.30	1.28	1.87	1.27	1.25	1.83	1.23	1.19	1.75	1.15	1.10	1.74	1.13	1.08	1.71	1.10	1.06	1.72	1.11
$\phi = 100$	0.8	6.09	5.56	4.37	5.94	5.41	4.27	5.70	5.16	4.09	4.91	4.38	3.54	4.81	4.28	3.47	4.65	4.12	3.36	5.73	5.20
$\sigma = 0.39$	0.9	45.34	44.63	31.71	43.55	42.82	30.48	40.62	39.92	28.42	34.52	33.84	24.13	33.29	32.63	23.28	31.39	30.76	21.97	45.22	44.51
$\tau = 51.64$	1	398.82	377.42	291.15	396.22	374.23	289.35	342.17	325.72	247.61	399.93	377.81	291.99	398.77	377.56	291.03	346.74	329.70	251.06	464.68	436.10
$n = 200$	1.1	44.90	44.08	31.41	46.44	45.60	32.47	40.25	39.52	28.13	52.34	51.59	36.49	54.23	53.45	37.84	46.93	46.25	32.74	44.76	43.92
	1.2	6.05	5.52	4.33	6.18	5.65	4.42	5.66	5.13	4.06	6.40	5.87	4.58	6.55	6.02	4.68	5.96	5.43	4.27	5.69	5.16
	1.3	1.89	1.29	1.27	1.91	1.31	1.30	1.83	1.23	1.19	1.72	1.11	1.12	1.74	1.13	1.14	1.67	1.05	1.07	1.71	1.10
Valores Teóricos	0.7	1.88	1.28	0.91	1.72	1.12	0.8	1.7	1.09	0.78	1.87	1.28	0.91	1.73	1.13	0.81	1.71	1.1	0.79	1.86	1.26
Case 3	0.8	5.93	5.4	3.75	4.99	4.46	3.1	4.84	4.31	3	5.59	5.06	3.51	4.74	4.21	2.93	4.62	4.09	2.84	6.63	6.11
$\phi = 100$	0.9	42.35	41.85	29.01	32.07	31.57	21.88	30.58	30.07	20.85	41.98	41.48	28.75	31.77	31.26	21.67	30.31	29.81	20.66	55.16	54.66
$\sigma = 0.39$	1.0	370.37	369.87	256.37	261.77	261.27	181.1	234.22	233.72	162	536.14	535.64	371.28	370.37	368.87	256.37	328.89	328.39	227.62	624.39	623.89
$\tau = 51.64$	1.1	42.35	41.85	29.01	34.16	33.66	23.33	30.58	30.07	20.85	64.11	63.61	44.09	50.09	49.59	34.37	44.15	43.64	30.25	55.16	54.66
	1.2	5.93	5.4	3.75	5.19	4.66	3.24	4.84	4.31	3	7.44	6.92	4.8	6.31	5.79	4.02	5.8	5.28	3.67	6.63	6.11
	1.3	1.88	1.28	0.91	1.76	1.15	0.82	1.7	1.09	0.78	1.86	1.27	0.9	1.72	1.12	0.8	1.66	1.04	0.75	1.86	1.26

Table 5: Comparing the performance of the control charts - Case 4 - ARL 370

δ	Beta - True				UGamma				Simplex				UGamma - True				Beta				UGamma				Simplex - True										
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL					
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 25$	0.7	2.12	1.51	1.52	2.10	1.49	1.51	2.27	1.67	1.64	2.08	1.49	1.49	2.07	1.47	1.49	2.19	1.60	1.59	2.13	1.54	2.12	1.52	1.53	2.24	1.65	1.62	2.24	1.65	1.62					
	0.8	7.91	7.36	5.62	7.75	7.21	5.52	9.06	8.50	6.42	5.63	5.09	4.05	5.56	5.02	3.99	6.22	5.88	4.45	5.89	5.34	4.23	5.81	5.26	4.18	6.42	5.88	4.60	6.42	5.88	4.60				
	0.9	78.60	72.57	58.17	76.20	70.53	56.41	94.44	88.87	69.73	43.77	42.57	31.07	42.69	41.50	30.33	50.86	49.04	36.13	41.66	40.95	29.32	40.35	39.37	28.16	47.72	46.81	33.86	47.72	46.81	33.86				
	1	517.19	394.35	424.73	513.29	395.95	419.33	358.12	299.28	280.56	533.86	413.71	435.03	537.41	406.70	438.43	343.03	295.82	263.13	662.01	474.61	555.08	655.71	475.06	549.30	523.04	404.43	424.64	523.04	404.43	424.64				
	1.1	43.11	40.81	31.16	43.80	41.64	31.62	20.28	19.63	14.28	113.58	102.10	85.75	118.79	102.72	90.83	41.88	40.79	29.58	262.84	197.14	214.33	271.78	198.86	221.10	77.54	69.85	57.41	77.54	69.85	57.41				
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 50$	1.2	3.34	2.78	2.43	3.37	2.81	2.45	2.51	1.94	1.84	6.19	5.63	4.41	5.58	5.00	4.46	3.62	3.15	2.59	2.31	6.47	5.92	4.63	6.59	6.05	4.71	3.36	2.80	2.46	3.36	2.80	2.46			
	1.3	1.18	0.43	1.00	1.18	0.44	1.00	1.11	0.34	1.00	1.09	0.26	1.01	1.09	0.26	1.01	1.03	0.15	1.00	1.05	0.16	1.01	1.05	0.16	1.01	1.01	0.07	1.00	1.01	0.07	1.00	1.01	0.07	1.00	
	1.4	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43
	1.5	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18
	1.6	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07
Valores Teóricos Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 200$	0.7	1.96	1.37	1.39	1.95	1.36	1.37	2.10	1.52	1.58	2.02	1.43	1.48	2.01	1.42	1.47	2.12	1.54	1.67	2.04	1.45	1.52	2.03	1.44	1.56	1.68	2.14	1.56	1.68	2.14	1.56	1.68			
	0.8	6.15	5.62	4.41	6.07	5.54	4.36	6.99	6.45	4.99	4.46	3.60	4.94	4.41	3.57	5.50	4.97	3.95	5.13	4.60	3.70	5.08	4.55	3.67	5.61	5.07	4.03	5.61	5.07	4.03	5.61	5.07	4.03		
	0.9	44.09	43.37	30.84	43.22	42.50	30.24	53.70	52.90	37.59	29.12	28.51	20.38	28.63	28.02	20.04	34.30	33.64	23.98	27.43	26.81	19.26	26.99	26.37	18.95	31.64	30.98	22.14	31.64	30.98	22.14	31.64	30.98	22.14	
	1	398.84	377.59	291.01	397.27	375.34	290.19	269.16	260.90	191.14	400.16	378.01	292.40	398.90	377.56	290.94	265.46	255.22	190.38	515.70	473.73	386.95	507.41	468.21	379.68	398.05	376.58	290.65	379.68	398.05	376.58	290.65	379.68	398.05	376.58
	1.1	27.64	27.04	19.37	28.00	27.39	19.62	16.80	16.25	11.83	55.80	55.02	38.94	56.73	55.98	39.58	29.01	28.43	20.31	103.02	101.14	72.51	105.62	103.61	74.39	40.84	40.09	28.56	74.39	40.84	40.09	28.56	74.39	40.84	40.09
Valores Teóricos Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 200$	1.2	3.07	2.52	2.23	3.09	2.54	2.24	2.44	1.88	1.95	4.38	3.84	3.17	4.42	3.88	3.20	3.00	2.44	2.21	5.12	4.59	3.69	5.20	4.66	3.74	3.12	2.56	2.29	3.12	2.56	2.29	3.12	2.56	2.29	
	1.3	1.16	0.43	1.00	1.17	0.44	1.00	1.11	0.35	1.00	1.05	0.23	1.00	1.05	0.23	1.00	1.02	0.14	1.00	1.02	0.12	1.00	1.02	0.13	1.00	1.00	0.06	1.00	1.00	0.06	1.00	1.00	0.06	1.00	
	1.4	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43	0.18	0.18	0.43
	1.5	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18	0.07	0.07	0.18
	1.6	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07	0.03	0.03	0.07

Table 6: Comparing the performance of the control charts - Case 1 - ARL 100

δ	Beta - True			U'Gamma			Simplex			Beta			U'Gamma			Simplex - True		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 25$	0.7	18.59	17.94	13.15	14.31	13.76	10.08	9.71	9.18	6.87	28.59	28.01	20.28	19.69	19.20	13.74	11.70	11.16
	0.8	45.15	43.94	31.98	32.98	32.34	23.05	20.50	19.82	14.42	64.36	47.05	46.16	44.94	42.60	25.28	24.63	24.63
	0.9	97.80	92.54	70.94	75.68	73.67	53.91	45.62	44.84	32.00	122.54	116.04	89.00	96.05	92.64	68.55	54.41	53.41
	1	141.83	131.66	104.53	139.30	126.54	102.73	97.66	94.95	69.42	139.43	128.38	101.35	137.09	129.54	98.92	103.38	97.94
	1.1	125.05	116.55	91.01	149.98	138.53	110.93	156.92	143.45	116.39	106.21	100.70	76.12	128.86	120.86	93.73	133.88	126.47
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 50$	0.7	10.72	10.20	7.57	9.30	8.78	6.59	7.15	6.63	5.11	22.60	21.95	15.91	16.75	16.20	11.78	10.77	10.24
	0.8	26.93	26.32	18.84	22.55	21.98	15.78	16.16	15.63	11.35	52.26	51.43	36.47	37.91	37.21	26.54	22.52	21.40
	0.9	69.04	67.66	48.59	58.31	57.11	40.93	40.36	39.79	28.15	100.60	98.27	70.97	79.32	77.88	55.61	48.26	47.45
	1	117.72	113.91	83.94	114.89	111.69	81.04	92.68	90.44	65.36	117.89	114.16	83.99	118.34	114.22	83.86	89.64	87.94
	1.1	88.91	86.92	62.78	103.94	101.35	73.61	119.84	115.85	85.71	84.89	82.97	59.74	102.45	99.65	72.19	114.33	111.24
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 100$	0.7	10.15	9.61	7.19	8.91	8.38	6.33	6.97	6.44	4.97	20.33	19.78	14.26	15.58	15.05	10.96	10.39	9.86
	0.8	24.72	24.17	17.34	21.07	20.50	14.80	15.45	14.91	10.87	45.91	45.14	32.13	34.28	33.61	24.01	21.40	20.84
	0.9	62.44	61.49	43.70	53.43	52.57	37.33	37.96	37.32	26.51	88.87	87.46	62.12	71.50	70.34	50.01	45.16	44.38
	1	105.50	103.81	73.99	103.56	101.86	72.54	85.67	84.46	59.88	105.19	103.40	73.74	105.64	103.92	74.12	83.91	82.96
	1.1	77.78	76.71	54.41	90.55	89.10	63.40	105.44	103.48	74.11	75.54	74.31	52.92	91.43	89.71	64.24	104.06	102.35
Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 200$	0.7	10.15	9.61	7.19	8.91	8.38	6.33	6.97	6.44	4.97	20.33	19.78	14.26	15.58	15.05	10.96	10.39	9.86
	0.8	24.72	24.17	17.34	21.07	20.50	14.80	15.45	14.91	10.87	45.91	45.14	32.13	34.28	33.61	24.01	21.40	20.84
	0.9	62.44	61.49	43.70	53.43	52.57	37.33	37.96	37.32	26.51	88.87	87.46	62.12	71.50	70.34	50.01	45.16	44.38
	1	105.50	103.81	73.99	103.56	101.86	72.54	85.67	84.46	59.88	105.19	103.40	73.74	105.64	103.92	74.12	83.91	82.96
	1.1	77.78	76.71	54.41	90.55	89.10	63.40	105.44	103.48	74.11	75.54	74.31	52.92	91.43	89.71	64.24	104.06	102.35
Valores Teóricos Case 1 $\phi = 75$ $\sigma = 1.37$ $\tau = 43.59$ $n = 200$	0.7	10.15	9.61	7.19	8.91	8.38	6.33	6.97	6.44	4.97	20.33	19.78	14.26	15.58	15.05	10.96	10.39	9.86
	0.8	24.72	24.17	17.34	21.07	20.50	14.80	15.45	14.91	10.87	45.91	45.14	32.13	34.28	33.61	24.01	21.40	20.84
	0.9	62.44	61.49	43.70	53.43	52.57	37.33	37.96	37.32	26.51	88.87	87.46	62.12	71.50	70.34	50.01	45.16	44.38
	1	105.50	103.81	73.99	103.56	101.86	72.54	85.67	84.46	59.88	105.19	103.40	73.74	105.64	103.92	74.12	83.91	82.96
	1.1	77.78	76.71	54.41	90.55	89.10	63.40	105.44	103.48	74.11	75.54	74.31	52.92	91.43	89.71	64.24	104.06	102.35

Table 7: Comparing the performance of the control charts - Case 2 - ARL 100

δ	Beta - True			U/Gamma			Simplex			U/Gamma - True			Beta			U/Gamma			Simplex - True									
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL							
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 25$	0.7	2.24	1.65	1.59	2.18	1.55	2.05	1.45	1.45	2.12	1.53	1.50	2.07	1.47	1.46	1.96	1.36	1.37	2.33	1.73	1.66	2.24	1.64	1.60	2.06	1.45	1.46	
	0.8	7.01	6.47	5.01	6.65	6.12	4.76	5.91	5.37	4.26	6.40	5.86	4.59	6.10	5.56	4.38	5.46	4.92	3.95	10.05	9.51	7.11	9.27	8.73	6.56	7.76	7.23	5.53
	0.9	43.31	42.38	30.38	39.90	39.20	27.79	32.75	32.02	22.88	39.65	39.02	27.59	36.42	35.87	25.37	30.18	29.45	21.24	77.89	72.59	56.51	68.79	65.46	49.30	52.96	51.12	37.77
	1	190.53	174.27	140.38	191.65	171.44	143.11	173.08	159.53	126.93	192.52	177.13	141.69	191.52	176.17	141.30	174.95	167.58	125.45	223.62	198.60	169.50	226.33	197.08	174.18	207.30	184.70	156.38
	1.1	61.39	57.62	43.63	63.38	61.96	44.43	69.28	67.14	49.42	61.76	59.60	43.83	65.99	64.07	46.83	71.76	69.20	51.04	42.58	41.23	30.09	45.03	43.55	31.95	48.13	46.69	33.98
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 50$	1.2	10.92	10.42	7.72	11.50	10.98	8.12	12.35	11.83	8.72	11.25	10.69	7.94	11.85	11.35	8.36	12.69	12.17	8.94	8.43	7.90	5.99	8.76	8.23	6.23	9.22	8.69	6.55
	1.3	3.39	2.84	2.51	3.50	2.95	2.59	3.66	3.10	2.69	3.38	2.82	2.50	3.49	2.94	2.67	3.65	3.10	2.67	3.07	2.51	2.29	3.14	2.58	2.34	3.25	2.69	2.40
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	2.07	1.48	1.48	2.03	1.44	1.44	1.93	1.34	1.34	1.98	1.39	1.39	1.94	1.35	1.35	1.86	1.26	1.26	2.04	1.45	1.46	1.99	1.39	1.40	1.87	1.27	1.30
	0.8	5.87	5.34	4.20	5.65	5.12	4.05	5.14	4.61	3.71	5.45	4.91	3.92	5.26	4.72	3.79	4.81	4.28	3.47	7.33	6.80	5.22	6.96	6.43	4.96	6.14	5.61	4.40
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 100$	0.9	30.16	29.60	21.15	28.41	27.83	19.90	24.56	23.99	17.25	28.49	27.79	20.01	26.90	26.28	18.85	23.31	22.74	16.34	45.29	44.57	31.63	41.86	41.19	29.31	34.76	34.12	24.35
	1	128.41	125.30	91.25	127.45	124.56	90.35	118.80	116.34	83.52	127.63	125.36	89.67	127.05	124.68	89.27	119.25	116.85	84.01	135.22	131.90	95.72	135.15	131.63	96.04	127.25	124.69	89.81
	1.1	36.07	35.32	25.33	38.19	37.37	26.83	41.12	40.28	28.86	36.26	35.56	25.45	38.37	37.63	26.90	41.30	40.53	28.93	26.84	26.17	18.86	28.14	27.47	19.77	29.90	29.14	21.03
	1.2	7.79	7.26	5.55	8.12	7.58	5.77	8.58	8.05	6.10	7.84	7.31	5.59	8.17	7.64	5.82	8.64	8.11	6.14	6.34	5.81	4.53	6.55	6.02	4.67	6.84	6.30	4.88
	1.3	2.79	2.22	2.11	2.86	2.30	2.16	2.96	2.40	2.22	2.72	2.15	2.05	2.79	2.23	2.10	2.89	2.33	2.17	2.59	2.02	1.98	2.64	2.08	2.02	2.71	2.15	2.07
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$ $n = 200$	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	1.99	1.40	1.42	1.95	1.36	1.37	1.87	1.27	1.26	1.92	1.32	1.33	1.89	1.29	1.28	1.81	1.21	1.19	1.93	1.34	1.36	1.89	1.29	1.31	1.79	1.18	1.20
	0.8	5.39	4.86	3.88	5.20	4.67	3.75	4.79	4.25	3.41	4.90	4.37	3.54	4.75	4.22	3.43	4.40	3.87	3.20	6.24	5.71	4.47	5.98	5.44	4.29	5.40	4.86	3.89
	0.9	24.85	24.25	17.43	23.62	23.03	16.57	20.90	20.34	14.67	23.34	22.77	16.37	22.23	21.67	15.59	19.70	19.14	13.83	34.27	33.61	23.98	32.17	31.52	22.51	27.72	27.09	19.45
	1	103.37	101.49	72.39	102.92	101.09	72.09	97.45	95.88	68.22	103.61	101.77	72.59	103.42	101.50	72.46	98.05	96.29	68.55	107.89	105.79	75.65	108.09	106.01	75.82	103.34	101.44	72.39
Valores Teóricos Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$	1.1	28.50	27.91	19.96	29.94	29.32	20.97	32.04	31.41	22.45	28.88	28.29	20.23	30.36	29.75	21.25	32.43	31.81	22.71	21.91	21.35	15.37	22.82	22.25	16.01	24.15	23.58	16.94
	1.2	6.73	6.20	4.81	6.97	6.45	4.98	7.33	6.81	5.23	6.77	6.25	4.84	7.03	6.50	5.01	7.38	6.86	5.26	5.63	5.10	4.04	5.79	5.26	4.16	6.03	5.50	4.32
	1.3	2.57	2.00	1.99	2.63	2.06	2.02	2.71	2.15	2.05	2.50	1.94	1.95	2.56	2.00	1.98	2.64	2.08	2.02	2.42	1.85	1.94	2.46	1.90	1.96	2.53	1.96	1.98
	δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
	0.7	1.96	1.37	0.97	1.86	1.27	0.9	1.76	1.15	0.82	1.95	1.36	0.97	1.85	1.26	0.89	1.75	1.14	0.82	1.96	1.37	0.97	1.83	1.24	0.88	1.7	1.09	0.78
Case 2 $\phi = 150$ $\sigma = 0.38$ $\tau = 96.75$	0.8	5.19	4.66	3.24	4.71	4.18	2.9	4.2	3.67	2.55	5.18	4.66	3.23	4.7	4.17	2.9	4.2	3.66	2.95	6.71	6.19	4.29	5.9	5.37	3.73	5.07	4.55	3.16
	0.9	23.83	23.33	16.17	20.56	20.05	13.9	17.26	16.76	11.62	25.12	24.62	17.07	21.56	21.05	14.59	18.03	17.52	12.14	38.67	38.17	26.46	32.04	31.54	21.86	25.69	25.18	17.46
	1	100	99.5	68.97	86.87	86.37	59.87	75.47	74.97	51.96	115.38	114.88	79.63	100	99.5	68.97	86.88	86.38	59.88	132.6	132.1	91.56	132.6	132.1	91.56	99.86	99.35	68.87
	1.1	27.47	26.97	18.69	25.92	25.42	17.62	25.64	25.14	17.42	30.69	30.18	20.92	28.91	28.4	19.69	28.63	28.12	19.49	24.39	23.89	16.56	24.39	23.89	16.56	22.89	22.39	15.52
	1.2	6.62	6.1	4.23	6.36	5.84	4.05	6.33	5.81	4.03	7.13	6.61	4.59	6.83	6.31	4.38	6.8	6.28	4.36	6.01	5.49	3.81	6.01	5.49	3.81	5.77	5.25	3.64
1.3	2.55	1.99	1.39	2.49	1.92	1.35	2.48	1.91	1.34	2.6	2.04	1.43	2.53	1.97	1.38	2.52	1.96	1.37	2.51	1.94	1.36	2.51	1.94	1.36	2.44	1.88	1.32	

Table 8: Comparing the performance of the control charts - Case 3 - ARL 100

δ	Beta - True			UGamma			Simplex			Beta			UGamma - True			Simplex			UGamma			Simplex - True			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 3 $\phi = 100$ $\sigma = 0.39$ $\tau = 51.64$ $n = 25$	0.7	1.57	0.93	1.12	1.36	0.92	1.11	1.54	0.90	1.10	1.50	0.85	1.07	1.49	0.84	1.06	1.48	0.82	1.05	1.46	0.79	1.07	1.45	0.78	1.06
	0.8	4.27	3.72	3.09	4.19	3.64	3.03	4.07	3.52	2.96	3.57	3.01	2.60	3.51	2.96	3.57	3.01	2.60	3.51	2.96	4.02	3.47	2.90	3.91	3.36
	0.9	28.07	27.29	19.85	27.11	26.31	19.22	25.67	24.91	18.08	21.71	21.08	15.29	21.01	20.40	14.80	20.11	14.15	14.15	30.16	29.49	21.16	29.10	28.39	20.44
	1	171.95	165.57	124.35	172.03	164.64	125.25	154.35	149.17	111.39	182.92	169.95	134.24	180.77	168.52	132.29	163.74	155.01	117.86	212.44	191.91	160.28	210.60	192.21	158.43
	1.1	28.99	28.39	20.25	29.77	29.19	20.81	26.41	25.83	18.53	34.65	34.03	24.35	35.63	35.05	25.00	31.43	30.75	22.13	29.81	28.81	21.06	30.60	29.60	26.33
	1.2	4.34	3.79	3.13	4.41	3.86	3.18	4.14	3.59	2.99	4.56	4.04	3.28	4.63	4.09	3.33	4.32	3.77	3.11	4.15	3.60	2.99	4.22	3.67	3.41
	1.3	1.59	0.95	1.12	1.60	0.96	1.13	1.56	0.91	1.10	1.46	0.80	1.08	1.47	0.81	1.09	1.43	0.76	1.07	1.47	0.81	1.07	1.48	0.82	1.08
δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 3 $\phi = 100$ $\sigma = 100$ $\tau = 51.64$ $n = 50$	0.7	1.47	0.82	1.03	1.46	0.81	1.03	1.45	0.80	1.02	1.42	0.76	1.01	1.41	0.76	1.01	1.41	0.75	1.01	1.36	0.69	1.01	1.35	0.68	1.01
	0.8	3.57	3.02	2.62	3.53	2.97	2.58	3.46	2.90	2.54	3.09	2.53	2.30	3.05	2.40	2.21	2.96	2.41	2.45	3.26	2.37	3.31	2.76	2.44	
	0.9	19.49	18.96	13.65	18.96	18.44	13.29	18.33	17.82	12.86	15.68	15.16	11.02	15.31	14.78	10.77	14.90	14.37	10.49	19.29	18.76	13.52	18.76	18.25	
	1	118.78	114.27	84.28	118.23	113.76	83.88	107.97	105.42	76.14	116.93	112.27	83.46	116.19	111.65	82.95	106.67	103.99	75.65	130.56	126.09	93.96	130.07	125.66	
	1.1	19.73	19.17	13.88	20.17	19.62	14.16	18.54	17.99	13.04	21.64	21.05	15.16	22.12	21.55	15.50	20.35	19.77	14.25	19.09	18.53	13.40	19.53	18.97	
	1.2	3.59	3.04	2.62	3.63	3.08	2.65	3.47	2.92	2.54	3.56	3.01	2.61	3.61	3.06	2.64	3.44	2.89	2.53	3.34	2.78	2.46	3.38	2.83	
	1.3	1.47	0.82	1.04	1.48	0.83	1.04	1.45	0.80	1.03	1.34	0.66	1.01	1.35	0.67	1.02	1.32	0.64	1.01	1.36	0.68	1.01	1.36	0.69	
δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 3 $\phi = 100$ $\sigma = 0.39$ $\tau = 51.64$ $n = 100$	0.7	1.46	0.81	1.01	1.45	0.80	1.01	1.44	0.79	1.00	1.41	0.76	1.00	1.41	0.75	1.00	1.40	0.74	1.00	1.34	0.67	1.00	1.33	0.66	
	0.8	3.47	2.92	2.53	3.42	2.88	2.50	3.37	2.82	2.46	3.03	2.48	2.32	3.00	2.44	2.21	2.96	2.41	2.19	3.23	2.68	2.37	3.19	2.64	
	0.9	18.03	17.50	12.65	17.60	17.08	12.35	17.12	16.60	12.02	14.67	14.13	10.32	14.37	13.83	10.11	14.04	13.50	9.88	17.43	16.91	12.24	17.02	16.50	
	1	105.61	103.89	74.08	105.34	103.57	73.88	98.11	96.45	68.82	105.81	104.06	74.17	105.62	103.91	74.10	98.83	97.16	69.31	113.56	111.60	79.60	113.31	111.40	
	1.1	17.89	17.35	12.57	18.26	17.73	12.83	16.99	16.45	11.97	19.68	19.15	13.80	20.13	19.59	14.10	18.68	18.15	13.11	17.28	16.74	12.15	17.65	17.11	
	1.2	3.46	2.91	2.53	3.50	2.96	2.55	3.36	2.81	2.45	3.42	2.88	2.50	3.47	2.92	2.53	3.32	2.77	2.44	3.22	2.67	2.36	3.26	2.71	
	1.3	1.45	0.81	1.00	1.46	0.82	1.01	1.44	0.79	1.00	1.33	0.65	1.00	1.33	0.66	1.00	1.31	0.63	1.00	1.34	0.67	1.00	1.35	0.68	
δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 3 $\phi = 100$ $\sigma = 0.39$ $\tau = 51.64$ $n = 200$	0.7	1.45	0.81	1.00	1.45	0.80	1.00	1.44	0.79	1.00	1.41	0.76	1.00	1.40	0.75	1.00	1.40	0.74	1.00	1.34	0.67	1.00	1.33	0.66	
	0.8	3.44	2.90	2.49	3.40	2.85	2.45	3.35	2.80	2.42	3.01	2.46	2.18	2.98	2.42	2.15	2.94	2.39	2.14	3.20	2.65	2.31	3.16	2.61	
	0.9	17.54	17.01	12.31	17.14	16.61	12.03	16.71	16.19	11.74	14.34	13.82	10.10	14.05	13.54	9.90	13.76	13.24	9.69	16.92	16.39	11.88	16.54	16.01	
	1	103.37	101.49	72.40	103.15	101.28	72.28	96.31	94.69	67.29	103.57	101.71	72.57	103.35	101.46	72.39	97.01	95.39	67.85	110.79	108.71	77.72	110.57	108.40	
	1.1	17.41	16.85	12.25	17.76	17.20	12.49	16.58	16.03	11.68	19.03	18.51	13.36	19.44	18.92	13.64	18.14	17.62	12.72	16.78	16.23	11.82	17.13	16.58	
	1.2	3.43	2.88	2.48	3.47	2.92	2.52	3.33	2.79	2.41	3.39	2.84	2.45	3.43	2.88	2.48	3.29	2.74	2.39	3.19	2.64	2.31	3.22	2.67	
	1.3	1.45	0.81	1.00	1.46	0.81	1.00	1.43	0.79	1.00	1.32	0.65	1.00	1.33	0.66	1.00	1.31	0.63	1.00	1.34	0.67	1.00	1.35	0.68	
δ	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Valores Teóricos Case 3 $\phi = 100$ $\sigma = 0.39$ $\tau = 51.64$	0.7	1.45	0.81	0.59	1.38	0.72	0.54	1.38	0.72	0.53	1.47	0.83	0.61	1.4	0.75	0.56	1.4	0.75	0.55	1.4	0.75	0.55	1.33	0.67	
	0.8	3.4	2.85	1.99	3.03	2.48	1.73	3.01	2.46	1.72	3.3	2.75	1.92	2.96	2.41	1.68	2.94	2.39	1.67	3.55	3.01	2.09	3.13	2.58	
	0.9	16.89	16.39	11.36	13.87	13.36	9.26	13.68	13.17	9.13	16.71	16.21	11.24	13.72	13.21	9.16	13.53	13.02	9.03	19.77	19.26	13.35	15.91	15.4	
	1.0	100	99.5	68.97	77	76.5	53.03	73.45	72.95	50.57	132.15	131.65	91.25	100	99.5	68.97	94.94	94.43	65.46	141.31	140.81	97.6	141.31	140.81	
	1.1	16.89	16.39	11.36	14.4	13.89	9.63	13.68	13.17	9.13	22.33	21.83	15.13	18.61	18.1	12.55	17.54	17.03	11.81	19.77	19.26	13.35	19.77	19.26	
	1.2	3.4	2.85	1.99	3.1	2.55	1.78	3.01	2.46	1.72	3.76	3.22	2.24	3.37	2.82	1.97	3.25	2.7	1.88	3.55	3.01	2.09	3.55	3.01	
	1.3	1.45	0.81	0.59	1.39	0.74	0.55	1.38	0.72	0.53	1.38	0.72	0.54	1.32	0.65	0.49	1.3	0.63	0.47	1.4	0.75	0.55	1.4	0.75	

Table 9: Comparing the performance of the control charts - Case 4 - ARL 100

	δ	Beta - True			UGamma			Simplex			Beta			UGamma - True			Simplex			Beta			UGamma			Simplex - True		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 25$	0.7	1.52	0.87	1.11	1.52	0.86	1.11	1.59	0.95	1.15	1.62	0.98	1.12	1.61	0.98	1.12	1.68	1.05	1.16	1.62	0.98	1.13	1.61	0.98	1.13	1.68	1.05	1.17
	0.8	3.80	3.24	2.77	3.77	3.21	2.74	4.22	3.66	3.30	3.73	2.78	2.44	3.31	2.75	2.43	3.60	3.05	2.64	3.43	2.87	2.51	3.41	2.85	2.49	3.68	3.12	2.69
	0.9	22.90	22.23	16.14	22.55	21.88	15.89	27.30	26.62	19.20	15.75	15.16	11.12	15.54	14.97	10.96	18.16	17.60	12.79	15.24	14.68	10.74	15.05	14.50	10.62	17.23	16.66	12.12
	1	136.28	127.44	98.99	136.39	126.96	99.92	107.58	102.13	76.86	138.94	127.98	102.37	139.03	128.06	102.28	107.86	103.04	77.15	167.98	152.74	125.26	166.05	153.18	123.30	137.20	126.42	100.84
	1.1	14.71	14.17	10.34	14.86	14.33	10.44	10.15	9.63	7.18	28.49	27.77	19.99	28.87	28.12	20.31	16.79	16.20	11.87	49.74	44.50	36.80	50.72	45.57	37.60	21.50	20.88	15.03
	1.2	2.18	1.59	1.57	2.19	1.60	1.58	1.90	1.30	1.35	2.73	2.14	1.97	2.75	2.16	1.99	2.14	1.53	1.54	2.99	2.40	2.16	3.02	2.43	2.19	2.12	1.52	1.53
	1.3	1.09	0.29	1.00	1.09	0.29	1.00	1.06	0.25	1.00	1.02	0.11	1.00	1.02	0.11	1.00	1.01	0.08	1.00	1.01	0.05	1.00	1.01	0.05	1.00	1.00	0.03	1.00
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 50$	0.7	1.50	0.85	1.04	1.49	0.85	1.04	1.56	0.93	1.08	1.61	0.98	1.07	1.60	0.97	1.06	1.67	1.05	1.11	1.60	0.97	1.07	1.59	0.97	1.07	1.66	1.03	1.11
	0.8	3.56	3.01	2.61	3.53	2.98	2.59	3.92	3.38	2.86	3.24	2.69	2.39	3.22	2.67	2.37	3.42	2.95	2.56	3.31	2.75	2.43	3.29	2.73	2.42	3.54	2.99	2.56
	0.9	18.89	18.34	13.24	18.64	18.10	13.07	22.29	21.73	15.60	14.01	13.48	9.86	13.86	13.32	9.76	16.06	15.54	11.28	13.47	12.93	9.49	13.33	12.79	9.40	15.16	14.61	10.67
	1	117.82	113.50	83.54	117.67	113.25	83.60	95.95	94.00	67.23	118.07	113.74	83.80	117.74	113.40	83.58	94.90	93.06	66.84	140.97	135.15	100.45	140.08	134.35	99.96	116.91	112.74	82.81
	1.1	13.11	12.57	9.26	13.22	12.67	9.33	9.61	9.08	6.82	22.12	21.46	15.59	22.30	21.68	15.67	14.59	14.04	10.28	32.30	31.50	22.70	32.86	32.04	23.10	17.82	17.26	12.55
	1.2	2.15	1.56	1.56	2.15	1.57	1.57	1.90	1.30	1.31	2.51	1.93	1.85	2.53	1.95	1.86	2.06	1.46	1.47	2.62	2.05	1.91	2.64	2.07	1.93	2.03	1.43	1.45
	1.3	1.09	0.30	1.00	1.09	0.30	1.00	1.06	0.25	1.00	1.01	0.11	1.00	1.02	0.11	1.00	1.01	0.07	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.02	1.00
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 100$	0.7	1.48	0.84	1.01	1.48	0.83	1.01	1.55	0.91	1.03	1.60	0.97	1.02	1.59	0.97	1.01	1.66	1.04	1.04	1.59	0.96	1.02	1.58	0.96	1.02	1.65	1.03	1.05
	0.8	3.45	2.90	2.52	3.43	2.88	2.50	3.79	3.25	2.76	3.18	2.63	2.31	3.16	2.61	2.30	3.42	2.88	2.49	3.24	2.69	2.36	3.22	2.67	2.35	3.47	2.92	2.53
	0.9	17.42	16.80	12.23	17.21	16.69	12.08	20.41	19.87	14.31	13.17	12.63	9.28	13.04	12.50	9.19	15.02	14.47	10.58	12.74	12.21	8.99	12.62	12.09	8.90	14.31	13.78	10.08
	1	105.56	103.86	74.03	105.36	103.62	73.93	88.50	87.35	61.81	105.70	103.91	74.17	105.54	103.85	74.02	88.29	86.99	61.76	123.12	121.12	86.23	122.60	120.66	85.84	105.16	103.33	73.84
	1.1	12.21	11.69	8.61	12.31	11.79	8.68	9.22	8.70	6.54	19.88	19.35	13.93	20.09	19.57	14.08	13.70	13.18	9.64	26.53	25.91	18.59	26.91	26.29	18.86	16.15	15.61	11.38
	1.2	2.11	1.53	1.59	2.12	1.54	1.59	1.88	1.29	1.27	2.42	1.85	1.82	2.43	1.86	1.83	2.02	1.43	1.45	2.48	1.90	1.85	2.49	1.92	1.86	1.98	1.39	1.41
	1.3	1.08	0.30	1.00	1.08	0.30	1.00	1.06	0.25	1.00	1.01	0.10	1.00	1.01	0.10	1.00	1.01	0.07	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.02	1.00
Case 4 $\phi = 50$ $\sigma = 0.7$ $\tau = 14.36$ $n = 200$	0.7	1.48	0.84	1.00	1.47	0.83	1.00	1.54	0.91	1.01	1.59	0.97	1.00	1.59	0.97	1.00	1.65	1.04	1.01	1.59	0.96	1.00	1.58	0.96	1.00	1.64	1.03	1.01
	0.8	3.42	2.87	2.47	3.40	2.85	2.46	3.76	3.21	2.73	3.16	2.61	2.26	3.14	2.59	2.25	3.41	2.86	2.45	3.23	2.68	2.31	3.21	2.66	2.29	3.46	2.91	2.50
	0.9	16.92	16.40	11.89	16.73	16.21	11.76	19.78	19.23	13.89	12.92	12.40	9.11	12.80	12.28	9.03	14.73	14.21	10.37	12.50	11.97	8.82	12.39	11.86	8.74	14.03	13.50	9.89
	1	103.35	101.48	72.39	103.16	101.31	72.23	87.01	85.56	60.84	103.52	101.65	72.51	103.36	101.47	72.39	86.84	85.59	60.69	119.43	117.45	83.61	118.82	116.76	83.26	103.14	101.28	72.26
	1.1	11.96	11.43	8.45	12.05	11.52	8.52	9.11	8.58	6.46	19.11	18.59	13.41	19.31	18.78	13.54	13.41	12.89	9.45	25.00	24.43	17.53	25.34	24.76	17.76	15.68	15.13	11.05
	1.2	2.10	1.52	1.64	2.11	1.53	1.65	1.88	1.28	1.22	2.39	1.82	1.86	2.40	1.83	1.87	2.01	1.42	1.46	2.43	1.86	1.87	2.45	1.88	1.96	1.37	1.39	1.39
	1.3	1.08	0.30	1.00	1.08	0.30	1.00	1.06	0.26	1.00	1.01	0.10	1.00	1.01	0.10	1.00	1.01	0.07	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.04	1.00	1.00	0.02	1.00
Valores Teóricos	0.7	1.47	0.83	0.61	1.5	0.87	0.63	1.56	0.94	0.68	1.56	0.94	0.68	1.59	0.97	0.7	1.64	1.03	0.74	1.54	0.91	0.66	1.57	0.95	0.68	1.62	1.01	0.72
	0.8	3.37	2.83	1.97	3.52	2.98	2.08	3.83	3.29	2.29	3.03	2.48	1.73	3.13	2.58	1.8	3.34	2.79	1.95	3.06	2.52	1.75	3.17	2.63	1.83	3.39	2.84	1.98
	0.9	16.28	15.77	10.93	17.55	17.04	11.82	20.13	19.62	13.6	11.79	11.28	7.82	12.55	12.04	8.35	14	13.5	9.36	11.41	10.9	7.56	12.12	11.61	8.05	13.51	13.01	9.02
	1.0	100	99.5	68.97	113.57	113.07	78.37	91.08	90.57	62.78	88.36	87.86	60.9	100	99.5	68.97	80.5	80	55.45	102.53	102.03	70.72	102.53	102.03	70.72	100.07	99.56	69.01
	1.1	11.7	11.19	7.76	12.79	12.28	8.51	9.31	8.8	6.1	16.5	15.99	11.09	18.39	17.88	12.4	12.5	11.99	8.32	21.04	20.54	14.24	21.04	20.54	14.24	15.02	14.51	10.06
	1.2	2.1	1.52	1.07	2.18	1.61	1.13	1.9	1.31	0.93	2.24	1.66	1.17	2.36	1.79	1.26	1.95	1.36	0.96	2.25	1.67	1.18	2.25	1.67	1.18	1.93	1.33	0.93
	1.3	1.08	0.3	0.27	1.09	0.31	0.28	1.06	0.26	0.25	1.01	0.09	0.14	1.01	0.1	0.15	1	0.07	0.13	1	0.03	0.1	1	0.03	0.1	1	0.02	0.09

Table 10: MAPE - Mean Absolute Percentage Error - ARL 370

	Beta - True			UGamma			Simplex			Beta			UGamma - True			Simplex			Beta			UGamma			Simplex - True		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
n = 25	63.98	29.62	92.24	60.72	26.34	88.23	39.31	30.25	51.67	69.92	33.37	100.22	70.74	32.52	100.79	41.82	30.62	52.77	89.6	41.67	126.69	97.12	46.86	136.46	69.66	31.08	99.82
n = 50	34.77	15.46	50.17	32.4	14.42	47.35	18.86	16.22	21.27	33.14	15.51	48.84	34.02	15.24	49.87	20.01	16.18	23.18	47.79	25.55	67.69	54.99	30.24	75.65	32.77	14.78	47.78
n = 100	13.94	5.97	21.35	11.74	4.03	18.97	15.8	19.46	15.7	14.36	6.45	22	14.91	6.78	22.49	17.24	18.3	18.19	29.68	21.14	37.24	35.37	23.42	46.21	14.17	6.58	21.43
n = 200	7.79	2.16	13.64	5.53	1.9	11.24	19.48	22.75	16.39	6.85	2.23	12.77	7.82	2.19	13.68	18.89	22.13	15.88	23.38	18.03	28.9	25.25	17.4	32.94	7.58	1.92	13.46
global	30.12	13.3	44.35	27.6	11.67	41.45	23.36	22.17	26.26	31.07	14.39	45.96	31.87	14.18	46.71	24.49	21.81	27.51	47.61	26.6	65.13	53.18	29.48	72.81	31.05	13.59	45.62

Table 11: MAPE - Mean Absolute Percentage Error - ARL 100

	Beta - True			UGamma			Simplex			Beta			UGamma - True			Simplex			Beta			UGamma			Simplex - True		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
n = 25	60.15	50.49	69.66	59.84	48.14	70.66	34.34	29.37	39.35	63.45	51.62	73.79	62.1	51.33	72.03	37.48	32.33	42.91	87.44	70.96	103.38	90.76	74.41	107.23	66.03	52.71	78.63
n = 50	25.3	20.83	29.88	24.24	19.84	28.69	10.42	8.66	12.01	25.35	20.55	30.25	25.15	20.25	29.84	11.04	9.28	13.01	37.35	31.48	43.61	39.89	34.58	45.93	24.06	19.28	28.91
n = 100	6.19	4.88	8.09	5.38	4.06	7.21	7.25	7.61	6.72	6.88	5.53	8.6	6.79	5.51	8.59	8.42	8.72	8.16	14.77	13.38	16.67	17.4	16.01	19.37	6.31	4.98	8.12
n = 200	3.36	1.98	4.91	2.64	1.35	4.18	8.77	9.81	7.54	3.41	2.16	4.91	3.38	1.98	4.96	8.9	9.9	7.72	10.29	8.93	11.93	12.99	11.44	14.88	3.21	1.83	4.78
global	23.75	19.55	28.13	23.03	18.35	27.68	15.2	13.86	16.41	24.77	19.96	29.39	24.36	19.77	28.86	16.46	15.06	17.95	37.46	31.19	43.9	40.26	34.11	46.85	24.9	19.7	30.11

4. Real data applications

Nessa sessão serão apresentados dois tipos de aplicações reais. A primeira aplicação é referente clima mensal em Wichita. O banco de dados possui 154 observações entre janeiro de 1980 e outubro de 1992. A variável monitorada é a proporção de cobertura média de nuvens na cidade. A segunda aplicação diz respeito ao clima de Sydney-AUS. São 333 observações e a variável monitorada é o percentual de humidade relativa no mês de setembro entre 2008 e 2019 às 3pm. Os dados das duas aplicações estão disponíveis no Software R-Studio. Para obtenção da primeira aplicação foi utilizado o pacote SPEI, enquanto para a segunda aplicação o pacote rattle.

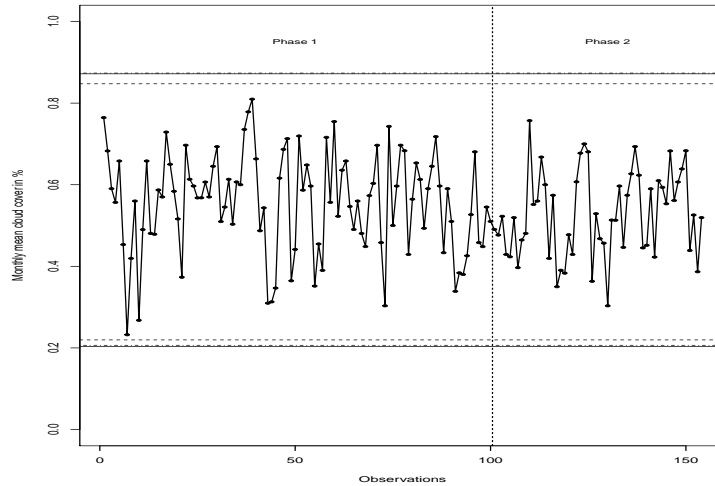


Figure 2: Fig. 2: Control chart of monthly mean cloud cover in Wichita

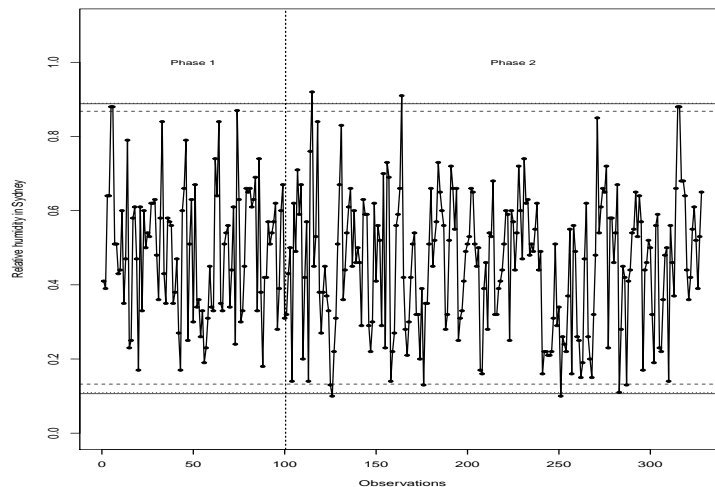


Figure 3: Fig. 3: Control chart of relative humidity in Sydney

Em todas as aplicações foram utilizadas as 100 primeiras observações para estimar os parâmetros e calcular os limites de controle (fase I). Na aplicação de Whichita foi utilizado

um alpha de 0.0027, enquanto na aplicação de Sydney foi utilizado um alpha de 0.01. As demais observações foram utilizadas na fase II do processo.

Na aplicação referente ao clima de Wichita, apresentada na Figura 2, o gráfico de controle beta obteve os limites de controle superior e inferior correspondentes a 0.8912 e 0.1857 respectivamente. Já o gráfico de controle gama unitária obteve 0.8930 como limite superior e 0.1883 como limite inferior. Por último, a carta de controle Simplex teve os limites superior e inferior iguais a 0.8636 e 0.2027. Nesse caso não foi detectado nenhum ponto fora de controle.

Para identificar a melhor carta de controle em cada caso, foi utilizado o teste Kolmogorov-Smirnov. Quando feito o teste, foi observado que o gráfico de controle baseado na distribuição beta obteve um p-valor de 0.7319, enquanto o valor da distribuição gama unitária foi de 0.7108 e o gráfico de controle simplex resultou em um p-valor de 0.7184. Dado que a distribuição beta foi a que apresentou o maior p-valor, com base nesse teste pode-se concluir que para a aplicação Whichita o gráfico de controle Beta foi o mais adequado para modelar os dados.

No gráfico de controle relativo à humidade relativa em Sydney, apresentado na Figura 3, os limites de controle baseados na distribuição beta foram de 0.888 o superior e 0.1064 o inferior. Já no gráfico de controle Gama Unitária, os limites superior e inferior foram de 0.8899 e 0.1102 respectivamente, enquanto a carta de controle Simplex, por sua vez, obteve os limites de controle iguais a 0.8681 e 0.1323. Nesse caso, alguns pontos fora de controle foram detectados na Fase II do processo.

Igualmente à aplicação anterior, foi feito o teste de Kolmogorov - Smirnov para saber qual distribuição tem o resultado mais satisfatório. Com base nesse teste, foi observado que o gráfico de controle baseado na distribuição beta obteve um p-valor de 0.6033, enquanto a distribuição gama unitária foi de 0.6218 e o gráfico de controle simplex por sua vez resultou em um p-valor de 0.3095. Quando analisados os pontos da Fase I, observa-se que há presença de observações fora de controle quando considerado os limites da distribuição simplex. Sendo assim, um fato que reflete a necessidade da utilização da distribuição correta. Dessa forma, a distribuição que apresentou o maior p-valor foi a gama unitária. Com isso, pode-se concluir que para a aplicação Sydney o gráfico de controle Gamma Unitária foi o mais adequado para modelar os dados.

5. Conclusion

Nesse projeto foi abordado o problema de monitorar dados duplamente limitados como taxas e proporções. Quando os dados não são oriundos de números contínuos, o gráfico p torna-se inadequado para modelar essas variáveis. O presente trabalho propõe três tipos de distribuições contínuas definidas entre o intervalo (0,1) que podem ser utilizadas para essa finalidade. Utilizou-se os gráficos de controle Beta, Gama Unitária e Simplex.

Para avaliação da performance dos gráficos de controle propostos, em que os parâmetros foram estimados na fase I, foram utilizadas as medidas de desempenho ARL, SDRL e MRL. Diversas simulações de Monte Carlo foram geradas no software R. Os resultados sugerem que o gráfico de controle Simplex é o que mais se aproxima do valor nominal das medidas de desempenho, sendo esse o mais apropriado para modelagem de dados restritos ao intervalo (0,1)

References

Barndorff-Nielsen, O. E., Jørgensen, B., 1991. Proper dispersion models.

- Bayer, F. M., Tondolo, C. M., Müller, F. M., 2018. Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions. *Computers & Industrial Engineering* 119, 416–426.
- Chakraborti, S., Human, S., Graham, M., 2008. Phase i statistical process control charts: an overview and some results. *Quality Engineering* 21 (1), 52–62.
- Ferrari, S., Cribari-Neto, F., 2004. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of applied statistics* 31 (7), 799–815.
- Lee Ho, L., Fernandes, F. H., Bourguignon, M., 2019. Control charts to monitor rates and proportions. *Quality and Reliability Engineering International* 35 (1), 74–83.
- Lima-Filho, L. M., Bourguignon, M., Ho, L. L., Fernandes, F. H., 2019. Median control charts for monitoring asymmetric quality characteristics double bounded. *Quality and Reliability Engineering International*.
- Lima-Filho, L. M., Pereira, T. L., Souza, T. C., Bayer, F. M., 2020. Process monitoring using inflated beta regression control chart. *Plos one* 15 (7), e0236756.
- Lima-Filho, L. M. A., Bayer, F. M., 2019. Kumaraswamy control chart for monitoring double bounded environmental data. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1–16.
- Lima-Filho, L. M. A., Pereira, T. L., de Souza, T. C., Bayer, F. M., 2019. Inflated beta control chart for monitoring double bounded processes. *Computers & Industrial Engineering* 136, 265–276.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., Dey, S., 2018. Improved maximum-likelihood estimators for the parameters of the unit-gamma distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 47 (15), 3767–3778.
- Montgomery, D. C., 2004. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. Vol. 4. LTC.
- Montgomery, D. C., 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. Vol. 6. Wiley.
- Oprime, P. C., Toledo, J. C. d., González, M. O. A., Chakraborti, S., 2016. Método de estimativa dos limites da carta de controle não paramétrica que monitora simultaneamente a média e variância. *Gestão & Produção* 23 (1), 146–164.
- Sant’Anna, Â. M. O., ten Caten, C. S., 2012. Beta control charts for monitoring fraction data. *Expert systems with applications* 39 (11), 10236–10243.