

Isabel Mesquita de Oliveira

Modelos epidemiológicos SEIR



*Tese submetida à Faculdade de Ciências
da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Matemática*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2008

Reg. 509472
Tese N.º 371
Cota

Isabel Mesquita de Oliveira

Modelos epidemiológicos SEIR



*Tese submetida à Faculdade de Ciências
da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Matemática*

*Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
MATEMÁTICA*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2008

*O Presidente do juri,
António Radomar*

Tese realizada sob a orientação do
Professor Doutor Carlos Miguel Menezes

Agradecimentos

As minhas palavras de apreço a todas as pessoas que de alguma forma me apoiaram e contribuíram para a realização deste trabalho. Agradeço, em especial, ao Professor Doutor Carlos Menezes pelo seu profissionalismo, disponibilidade e dedicação durante a realização do mesmo.

Resumo

Nesta dissertação é apresentado um modelo epidemiológico MSEIRS que inclui fenómenos demográficos, morte pela doença, imunidade conferida pela doença e imunidade passiva. A partir deste modelo podem ser encontrados vários modelos epidemiológicos mais simples fazendo restrições aos parâmetros. É analisada a estabilidade dos pontos de equilíbrio dos modelos SIS e SIR. Para o estudo global da estabilidade do modelo SIRS é usado um resultado que generaliza o teorema de Dulac no plano, e a teoria de LaSalle. É realizada uma análise global do modelo SEIR com incidência standard e fenómenos demográficos e do modelo SEIR com incidência não linear do tipo $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$ com tamanho de população constante. São utilizados resultados da teoria de LaSalle, teoria de sistemas dinâmicos competitivos, matrizes compostas e persistência uniforme. São ainda apresentados resultados de estabilidade local para o modelo SEIRS com fenómenos demográficos.

Abstract

In this dissertation we present a MSEIRS epidemiological model, which includes demographic effects, disease-related death, acquired and passive immunity. From this model we can find other simpler epidemiological models, by restricting some parameters. It is analyzed the stability of equilibrium points for SIS and SIR models. For the global study stability of SIRS model we use a generalization of Dulac theorem on the plane and LaSalle theory. A global analysis of SEIR model with standard incidence and demographic effects and SEIR's model with non linear incidence of $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$ with constant population size is made. For that we use results of LaSalle theory, competitive dynamic systems theory, compound matrices and uniform persistency. We also present results on local stability for SEIRS model with demographic effects.

Résumé

Dans cette dissertation est présenté un modèle épidémiologique MSEIRS qui inclue phénomènes démographiques, mort par maladie, immunité conférée par la maladie et immunité passive. À partir de ce modèle on peut rencontrer différents modèles épidémiologiques plus simples faisant des restrictions aux paramètres. La stabilité des points d'équilibres des modèles SIS et SIR est analysée. Pour l'étude globale de la stabilité du modèle SIRS on utilise une généralisation du théorème de Dulac dans le plan, et la théorie de LaSalle. On fait une analyse globale du modèle SEIR avec une incidence standard et des phénomènes démographiques et du modèle SEIR avec une incidence non linéaire du type $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$ avec une taille de population constante. On utilise des résultats de la théorie de LaSalle, théorie de systèmes dynamiques compétitifs, matrices composés et persistance uniforme. Des résultats de stabilité locale sont aussi présentés pour le modèle SEIRS avec des phénomènes démographiques.

Conteúdo

Introdução	ix
1 O modelo geral MSEIRS	1
1.1 Descrição do modelo geral	1
1.2 Do modelo geral aos modelos mais simples: do MSEIRS aos modelos SEI, SEIS, SIS, SIR, SIRS, SEIR, SEIRS, MSEIR . . .	7
1.3 Parâmetros limite nos modelos epidemiológicos	9
2 O modelo SIS	13
2.1 Modelo SIS endémico	13
2.2 Modelo SIS epidémico	17
3 O modelo SIR epidémico	23
4 O modelo SIRS	29
4.1 Modelo geral	29
4.2 Modelo SIRS sem morte pela doença	42
4.3 Modelo SIRS com $\alpha = \lambda$	45
4.4 Implicações do modelo	49
5 O modelo SEIR	51
5.1 Existência e unicidade do ponto de equilíbrio endémico P^* . .	62
5.2 Estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio endé- mico P^*	65
5.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico P^* . . .	70
6 O modelo SEIRS não linear	81
6.1 Existência de pontos de equilíbrio endémicos	93
6.2 Estabilidade assintótica local dos pontos de equilíbrio en- démicos	98
6.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico P^* para $\delta = 0$	101

A Resultados sobre sistemas dinâmicos	109
A.1 Discos de Geršgorin	109
A.2 Matrizes compostas aditivas	110
A.3 Noções de estabilidade	114
A.4 Teorema de LaSalle	120
A.5 Generalização do teorema de Dulac	122
A.6 Sistemas dinâmicos competitivos	126
Bibliografia	133

Listas de Figuras

2.1	Modelo SIS endémico: comportamento de $i(t)$ para $\theta > 1$. . .	17
2.2	Modelo SIS endémico: comportamento de $i(t)$ para $\theta \leq 1$. . .	18
3.1	Modelo SIR: comportamento de $s(t)$ e $i(t)$ sob a condição $R > 1$. .	27
4.1	Região em análise para o modelo SIRS com o sistema reduzido a duas equações.	32
4.2	Modelo SIRS: não existência de pontos de equilíbrio endémicos para $\theta < 1$	34
5.1	Modelo SEIR: existência do ponto de equilíbrio endémico para $\theta > 1$	65
5.2	Discos de Geršgorin: valores próprios com parte real negativa. .	67
6.1	Modelo SEIRS não linear: existência de ponto de equilíbrio endémico para $0 < p < 1$	96
6.2	Modelo SEIRS não linear: existência de ponto de equilíbrio endémico para $p = 1$, dadas várias possibilidades para $f(i)$. . .	97
6.3	Modelo SEIRS não linear: existência de ponto(s) de equilíbrio endémico(s) para $p > 1$	97

Introdução

A história mostra que, ao longo dos tempos, as doenças infecciosas têm afectado a população humana. De acordo com [25], são relatados episódios de doenças infecciosas desde a antiguidade, nomeadamente na Grécia (em 429 a.C. doenças infecciosas dizimaram um terço da população) e no império romano (em vários períodos). Já no século XIV, a peste negra matou cerca de um quarto da população da Europa, com consequências a nível social, religioso e económico. A China, entre 1200 (d.C.) e 1393, viu também drasticamente diminuída a sua população devido à guerra com a Mongólia, mas também devido à peste. São relatados episódios de varíola (que foi erradicada nos anos 70 do século passado, ou seja, foi eliminada no mundo inteiro) um pouco por todo o mundo: China (49 d.C.), Roma (165 d.C.), Chipre (251-266 d.C.), Grécia (312 d.C.), Japão (552 d.C.), Europa (700-800 d.C.) e Suécia (no século XVIII foi responsável por vinte por cento da mortalidade), entre outros. Quando da colonização espanhola no México, devido à varíola transmitida involuntariamente pelos colonizadores, foram atingidos mortalmente cerca de 3,5 milhões de indígenas. Situação semelhante com a varíola e sarampo teve lugar com os nativos norte americanos, o que reduziu a sua população em cerca de 90 por cento. O vírus influenza no período 1918-1919 foi responsável pela morte de 20 milhões de pessoas em todo o mundo. Já em 1957 e 1968 o mesmo causou 98000 mortes nos Estados Unidos, com graves efeitos económicos e sociais. Estes são apenas alguns exemplos de períodos e locais em que as doenças infecciosas atingiram significativamente a população humana.

Não obstante os progressos ao nível dos cuidados sanitários e da medicina (nomeadamente em termos de vacinação e cura através de antibióticos), continuam a emergir surtos de doenças infecciosas por todo o mundo, por exemplo, e entre muitas outras, o vírus HIV (à escala mundial), o ébola, o vírus hanta e lassa, e o dengue. Recentemente foram identificadas novas doenças infecciosas como a doença de Lyme (1975), o síndrome *toxic shock* (1978), a hepatite C (1989) e hepatite E (1990). Existem também doenças cujos agentes infecciosos criaram resistência aos fármacos como a tuberculose (que se tornou um problema de saúde pública em Portugal), estafilococos, estreptococos; ou hospedeiros que criaram resistência aos in-

secticidas (o mosquito responsável pela malária, por exemplo), tornando mais difícil a cura e o controlo da transmissão da doença. De acordo com [11], a transmissão de doenças pode ser agravada pela maior, mais fácil e mais rápida mobilidade das populações que se verifica actualmente, pela invasão de novos ecossistemas, pela degradação ambiental e pelo aquecimento global. A nível económico é feito um grande investimento na cura e na prevenção de algumas destas doenças, fundamentalmente aquelas que afectam os países desenvolvidos.

O objectivo dos modelos matemáticos epidemiológicos é compreender melhor todo o processo de transmissão e propagação da doença, quer em pequenas comunidades, assim como em regiões ou países, para que se possam propor medidas que levem a um decrescimento na transmissão da doença. Com efeito, como se refere em [11], estes modelos são usados para ajudar em programas de detecção e controlo, planeamento, prevenção e terapia. Através destes modelos podem fazer-se estimativas de parâmetros que envolvam a doença e fazer também previsões. De notar a evolução e complexidade dos modelos matemáticos recentemente apresentados, os quais envolvem os conceitos de imunidade passiva, vacinação (e gradual perda de imunidade), estádios de infecção, transmissão da doença através da mãe para filho (transmissão vertical), doenças transmitidas através de vectores (hospedeiros que transportam os agentes infecciosos em longas distâncias, como a mosca tsetse para a tripanossomíase ou o mosquito anófeles para a malária), imunidade adquirida pela doença, microparasitas (agentes infecciosos como vírus, bactérias e fungos) e macroparasitas (agentes infecciosos como parasitas intestinais e outros vermes), podendo ainda considerar-se vários estádios de infecção, desenvolvimento espacial da doença, quarentena e quimioterapia, entre outros.

Em [11], Hethcote refere que um modelo para a varíola foi formulado e analisado por Daniel Bernoulli ainda em 1760, mas refere também que os modelos determinísticos só começaram a ser usados no início do século XX e tiveram depois uma grande expansão nos meados desse século. Assim, em 1906, Hamer formulou um modelo para o sarampo. Tratava-se de um modelo discreto cujo objectivo era perceber a recorrência dos surtos desta doença. Foi este o primeiro modelo em que se admitia que a incidência (número de novos casos por unidade de tempo) dependia do produto das densidades dos susceptíveis e dos infectados. Uns anos mais tarde, em 1911, Ross estudando a incidência e o controlo da malária formulou um modelo que envovia equações diferenciais. Hethcote refere ainda que neste âmbito foram realizados outros trabalhos por Ross, Ross e Hudson, Martini, e Lotka. O trabalho relevante que se segue é o de Kermack e McKendrick (desde 1926), já que foram os primeiros a desenvolver o conceito de parâmetro limite, ou seja, descobriram uma condição necessária e suficiente sobre os parâmetros

para que a epidemia ocorra. Já em meados do século XX, como já referimos, ocorreu uma grande explosão ao nível da formulação e análise de novos modelos epidemiológicos, com aplicações a novas doenças. O principal impulsionador deste crescimento foi Bailey, com o lançamento de um livro em 1957.

Os modelos matemáticos que vamos tratar neste trabalho são do tipo compartmental. Assim, apresentam uma descrição da população que engloba classes de indivíduos que estão infectados pela doença e a podem transmitir (os indivíduos infecciosos, classe I), aqueles que são susceptíveis (os indivíduos que até ao momento ainda não foram infectados, mas não têm qualquer tipo de imunidade, classe S), e podem englobar indivíduos que estão num período de latência (que foram infectados mas ainda não estão capazes de transmitir a doença, classe E), e também os indivíduos que recuperaram da doença ou possuem algum tipo de imunidade (classe R). O tamanho da população é designado por N . Nestes modelos usaremos a lei de acção de massas λSI , ou uma sua generalização $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$, para modelar o número de novas infecções supondo o contacto entre os indivíduos susceptíveis e infectados. É assumido neste trabalho que o contacto entre os vários indivíduos da população é homogéneo. Contudo, a hipótese de que os indivíduos da população entram em contacto de forma homogénea e uniforme não é totalmente realista, pois os contactos podem depender da faixa etária, do grupo social e económico, da região e do tipo de contacto a que se refere a doença (aéreo, sexual, ambiental, entre outros).

Algumas das doenças infecciosas são epidémicas (por exemplo, as febres hemorrágicas), ou seja, decorrem em surtos, de período muito mais rápido que os efeitos demográficos que afectam uma população (natalidade, morte natural e emigração). Na análise matemática de doenças com este comportamento são ignorados estes efeitos. É o caso dos modelos na secção 2.2 e no capítulo 3, que dizem respeito aos modelos SIS e SIR, respectivamente.

Já em relação a doenças como o HIV ou as doenças de infância, os efeitos demográficos podem influenciar a propagação da doença, tratando-se assim de modelos endémicos, como são os modelos analisados na secção 2.1 e nos capítulos 4, 5 e 6 que correspondem respectivamente aos modelos SIS, SIRS, SEIR e SEIRS. As doenças de infância já não são causa de morte nos países desenvolvidos, mas o mesmo ainda não acontece nos países em desenvolvimento. Estas doenças também se caracterizam pelo padrão periódico com que ocorrem (Hethcote, Levin, [12]). Sendo estas doenças endémicas, o tempo entre dois surtos é chamado **período interepidémico**.

No primeiro capítulo é apresentado um modelo geral que inclui fenómenos demográficos naturais (natalidade, morte natural e emigração), imunidade

conferida pela doença (que pode ser temporária ou permanente) e morte pela doença. São ainda considerados nascimentos de bebés com imunidade passiva, ou sem imunidade, dependendo se as progenitoras já tiveram contacto com a doença e transmitiram os seus anticorpos ao bebé. A forma de incidência considerada, ou seja, a fórmula pela qual se supõe ser adequado calcular o número de novos casos, é aqui geral, sendo particularizadas posteriormente várias formas de incidência. A partir deste modelo podem tomar-se restrições nos parâmetros envolvidos e desta forma são encontrados vários modelos mais simples, alguns dos quais serão analisados nos capítulos seguintes, dos mais simples para os mais complexos.

São admitidas algumas hipóteses para cada modelo, nomeadamente se o modelo é endémico ou epidémico (se são considerados os fenómenos demográficos ou não), se existe morte relacionada com a doença e se a doença confere imunidade (que pode ser total ou parcial). Estamos interessados em encontrar condições que permitam determinar quando a doença desaparece (isto é, quando a fracção de indivíduos infectados (infecciosos e latentes) tende para 0) ou permanece endémica (ou seja, a fracção de indivíduos infectados permanece positiva). Assim, para cada um dos modelos é apresentado um parâmetro-limite com o qual podemos prever se a doença pode invadir a população ou não. Este parâmetro-limite é em alguns modelos o número de contacto, que tem o significado de ser o número de novos casos de doença provocados por um infectado que invade uma população de susceptíveis. Noutros modelos, o parâmetro limite é o número de contacto modificado. A forma de incidência utilizada que, tal como já foi referido anteriormente, representa o número de novos casos de infecção por unidade de tempo também varia nos vários modelos. Várias expressões matemáticas podem ser utilizadas para modelar a incidência. No capítulo 1 serão mostrados vários tipos de incidência frequentemente usados na literatura. Utilizaremos nos capítulos 2, 3, 4 e 5 a incidência standard e no último capítulo um tipo de incidência não linear.

No capítulo 2, relativo ao modelo SIS (que corresponde a um sistema de equações diferenciais de dimensão dois) são identificados um ponto de equilíbrio da não doença, ou seja, aquele a que corresponde uma situação em que não existem infectados, e um ponto de equilíbrio endémico (que corresponde à situação contrária). A estabilidade global de cada um dos pontos de equilíbrio (dada uma condição do parâmetro limite) é provada por análise directa das equações diferenciais que compõem o sistema e é encontrado o número de contacto, o parâmetro limite para o modelo epidémico e o número de contacto modificado para o modelo endémico. No capítulo 3, o modelo epidémico SIR é analisado de forma semelhante ao modelo epidémico SIS.

No capítulo 4, em que analisamos o modelo SIRS, é provada a estabilidade

global do ponto de equilíbrio de não doença através da teoria de LaSalle e do ponto de equilíbrio endémico através da aplicação de um teorema que generaliza o teorema de Dulac e que desta forma exclui as órbitas periódicas, os laços homoclínicos e os polígonos de fase orientados. São ainda analisados casos particulares correspondentes a restrições nos parâmetros.

No capítulo 5, onde é estudado o modelo SEIR com incidência standard, com base no artigo [14], de Li, Graef, Wang e Karsai, são encontrados dois pontos de equilíbrio: o ponto de equilíbrio da não doença e o ponto de equilíbrio endémico. A estabilidade global do ponto de equilíbrio da não doença é provada usando a teoria de Lyapunov. Em relação à estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico, são usadas as matrizes compostas aditivas. É provado que o sistema em causa é competitivo e para a estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico são usados resultados de sistemas competitivos e a noção de persistência uniforme (para excluir a existência de órbitas periódicas).

No capítulo 6, é estudado um modelo SEIRS com incidência não linear, com base no trabalho de Liu, Hethcote e Levin [16], sendo utilizada uma forma de incidência não linear do tipo $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$. É provada a estabilidade global do ponto de equilíbrio da não doença usando a teoria de LaSalle. Prova-se a existência de um ponto de equilíbrio endémico para $0 < p < 1$ e para $p = 1$ (mediante uma condição do número de contacto modificado) e a existência de um, dois ou nenhum pontos de equilíbrio endémicos para $p > 1$. No caso de haver dois pontos de equilíbrio endémicos, um destes pontos de equilíbrio é instável e são estudadas condições suficientes para a estabilidade local do outro ponto de equilíbrio. Finalmente, na última secção deste capítulo, com base no artigo [15], de Li e Muldowney, é feita a restrição a este modelo considerando que há imunidade permanente após a doença (modelo SEIR), que a taxa de natalidade é igual à taxa de mortalidade natural, e supondo ainda que não há morte pela doença (isto significa que o tamanho da população permanece constante). Assim, existe apenas um ponto de equilíbrio endémico e a sua estabilidade global é provada de forma análoga à usada para o modelo SEIR com incidência standard.

No apêndice são apresentados alguns resultados que vão ser úteis na análise dos vários modelos epidemiológicos tratados nos capítulos anteriores. Os primeiros resultados dizem respeito a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e a propriedades ao nível da estabilidade de sistemas de equações diferenciais não autónomos ou autónomos, ou seja, que dependem do tempo ou não, respectivamente. São também apresentados os sistemas competitivos que permitem um resultado para sistemas competitivos no espaço tridimensional que generaliza o teorema de Poincaré-Bendixson. Apresentamos ainda alguns resultados da teoria de LaSalle, que nos vão

permitir provar a estabilidade global do ponto de equilíbrio da não doença. Resultados auxiliares sobre matrizes compostas (aditivas e multiplicativas) também são apresentados, pois irão permitir analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas apresentados com mais facilidade do que se fosse feita a análise da matriz jacobiana do sistema nos pontos de equilíbrio. Neste apêndice também é apresentado uma condição suficiente para que uma órbita periódica de um sistema autônomo seja assintoticamente orbitalmente estável com fase assintótica. É ainda apresentado e demonstrado um resultado devido a Busenberg e van den Driessche [5], que generaliza o teorema de Dulac na exclusão da existência de órbitas periódicas para um sistema de equações diferenciais no plano.

Capítulo 1

O modelo geral MSEIRS

Neste trabalho vamos considerar um modelo epidemiológico MSEIRS que generaliza vários modelos mais simples e, como tal, serve para modelar as mais variadas doenças infecciosas.

1.1 Descrição do modelo geral

Considere-se as seguintes classes epidemiológicas, nas quais uma população se pode dividir num dado instante $t \geq 0$:

M é a classe dos recém nascidos em que as progenitoras lhes forneceram imunidade passiva, por já terem sido infectadas algum momento anterior da sua vida;

S é a classe de todos os indivíduos susceptíveis de contrair a doença;

E é a classe dos indivíduos expostos, isto é, que já estão infectados mas ainda não infecciosos, ou seja, não têm ainda a capacidade de transmitirem a doença; observemos que não se deve confundir período de latência com período de incubação, sendo este o intervalo de tempo que existe entre o instante em que ocorreu a infecção e o aparecimento de sintomas, período geralmente mais longo do que o período de latência;

I é a classe dos indivíduos infecciosos, ou seja, daqueles que transmitem a doença a indivíduos susceptíveis, através de várias formas de contacto;

R é a classe dos indivíduos recuperados, ou seja, que após estarem infectados adquirem imunidade à doença (esta imunidade pode ser temporária ou permanente);

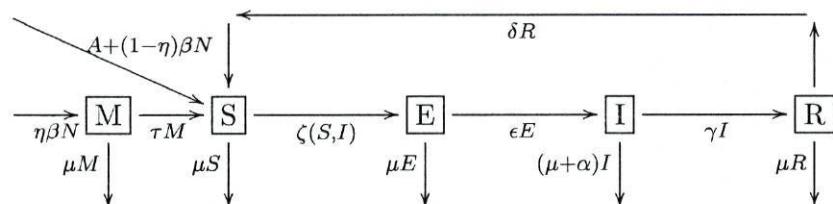
N é o número total de indivíduos da população nesse instante t .

É ainda necessário compreender que a dinâmica entre estas classes é realizada da seguinte forma:

- A entrada de indivíduos na população por imigração é notada por A e considera-se constante ao longo do tempo, sendo estes indivíduos

susceptíveis, com $A \geq 0$ (taxa de imigração per capita por unidade de tempo);

- A taxa de natalidade per capita por unidade de tempo nesta população é proporcional ao tamanho da população e independente da idade dos indivíduos, ou seja, é da forma βN , per capita, por unidade de tempo, $\beta \geq 0$. Um indivíduo nasce susceptível (se a progenitora nunca esteve infectada) ou com imunidade passiva (classe M) quando a mãe já esteve alguma vez infectada e portanto lhe transmitiu anticorpos durante a gravidez. Temos assim que considerar a fracção η de nascimentos que ocorre na classe M e $(1 - \eta)$ que ocorre na classe dos susceptíveis. Os indivíduos da classe M transitam para a classe S a uma taxa constante de τ por unidade de tempo. O tempo médio de permanência nesta classe M é assim de $\frac{1}{\tau + \mu}$;
- A taxa de mortalidade natural per capita por unidade de tempo é constante em todas as classes e igual a $\mu \geq 0$ pois considera-se que não há grande variação desta taxa nas várias classes. A morte pela doença só acontece na classe dos infecciosos, à taxa constante de $\alpha \geq 0$ per capita por unidade de tempo;
- Os indivíduos susceptíveis tornam-se expostos através do contacto com um infeccioso e passam para a classe E ;
- Os indivíduos expostos (ou latentes) ingressam na classe dos infecciosos a uma taxa de $\epsilon > 0$ por unidade de tempo. O tempo médio de latência é assim de $\frac{1}{\epsilon + \mu}$;
- Os indivíduos infecciosos recuperam (adquirindo algum tipo de imunidade à doença) a uma taxa de $\gamma \geq 0$ por unidade de tempo;
- Por hipótese, a imunidade pode ser temporária, e os indivíduos recuperados passarem a ser susceptíveis a uma taxa de $\delta \geq 0$ per capita por unidade de tempo;
- Os indivíduos infectados são constituídos pelos indivíduos expostos e pelos infecciosos.



Os parâmetros de transferência entre classes são assim os seguintes:

- η é a fracção de nascimentos que ocorrem na classe M, per capita, por unidade de tempo, $\eta \geq 0$;
- β é a taxa de natalidade, per capita, por unidade de tempo, $\beta \geq 0$;
- τ é a taxa de perda de imunidade passiva pelos recém-nascidos que passam a susceptíveis, per capita, por unidade de tempo, $\tau \geq 0$;
- A é a taxa constante de emigração, per capita, por unidade de tempo, $A \geq 0$;
- μ é a taxa de mortalidade (natural) per capita, por unidade de tempo, $\mu \geq 0$;
- α é a taxa de mortalidade dos infecciosos devida à doença per capita, por unidade de tempo, $\alpha \geq 0$;
- ϵ é a taxa a que os indivíduos expostos se tornam infecciosos per capita, por unidade de tempo, $\epsilon > 0$;
- γ é a taxa de recuperação dos indivíduos infecciosos per capita, por unidade de tempo, $\gamma \geq 0$;
- δ é a taxa a que os indivíduos recuperados voltam a tornar-se susceptíveis per capita, por unidade de tempo, $\delta \geq 0$;

Falta ainda definir os parâmetros a que os indivíduos susceptíveis se tornam expostos, ou seja, definir as taxas de contacto, contacto adequado e incidência.

Definição 1.1.1 *Contacto adequado* é o contacto suficiente entre dois indivíduos para que se efectue a transmissão da doença, caso este contacto se realize entre um susceptível e um infeccioso.

Definição 1.1.2 *Taxa de contacto* é o número de pessoas per capita que um indivíduo contacta por unidade de tempo, sendo este contacto adequado para a transmissão da doença, caso o contacto aconteça entre um susceptível e um infeccioso.

Para o modelo definimos λ como a taxa de contactos adequados de um qualquer indivíduo, per capita, por unidade de tempo, $\lambda > 0$.

Definição 1.1.3 *Incidência num modelo epidemiológico* é a taxa pela qual os susceptíveis se tornam infectados, ou seja, é o número de novas infecções por unidade de tempo.

Há duas formas de incidência distintas: vertical e horizontal. A primeira ocorre quando uma mãe infecciosa transmite a doença ao seu filho durante a gravidez (esta hipótese não vai ser estudada neste trabalho) e a segunda entre indivíduos infecciosos e susceptíveis através dos contactos adequados. Para a mesma doença podem ocorrer as duas formas de incidência.

Matematicamente, a incidência pode ser modelada de várias formas, algumas das quais serão descritas a seguir.

Incidência Standard

Seja λ o número médio de contactos adequados de um qualquer indivíduo per capita por unidade de tempo, tal como foi definido anteriormente.

Desta forma:

- $\lambda \frac{I}{N}$ é o número médio de contactos adequados de um susceptível com indivíduos infecciosos por unidade de tempo;
- $\lambda \frac{IS}{N}$ é o número de novos casos de indivíduos expostos (infectados mas não infecciosos) por unidade de tempo (no caso de um modelo que inclua o período de latência) ou o número de novos casos de infecciosos (caso contrário).

Segundo [14], esta quantidade foi denominada de várias formas: por Busenberg e van den Driessche, [5], foi designada de *mixing proportionate*, um termo que estes atribuem a Nold; Mena-Lorca e Hethcote, em [18], atribuem o nome de *incidência standard*; e Jong e al., designa-a por *true mass-action incidence*.

Incidência de Acção de Massa Simples

Definimos $\beta'IS$ como a incidência de acção de massa simples, que por de Jong é chamada de *incidência de pseudo acção de massa*.

Em [18], β' é designado o *coeficiente de transmissão*. Quando comparado com a incidência standard, a incidência de acção de massa simples implica que $\beta' = \frac{\lambda}{N}$, o que tem como consequência que a taxa de contacto λ é proporcional ao tamanho da população. Isto é realista se S , I e N são densidades por unidade de área, por unidade de tempo, de tal forma que duplicando a densidade N é duplicada a taxa de contacto λ . No caso das populações humanas pensa-se que esta taxa é fracamente dependente do tamanho da população visto que, quer em cidades, quer em comunidades mais pequenas, o número de contactos (diários, por exemplo) são semelhantes, mesmo considerando diferentes regiões.

Incidência de saturação

A terceira incidência é a incidência de saturação da forma $\frac{\lambda SI}{H+S}$, onde H é uma constante. Quando o número S de susceptíveis é grande comparado com H , esta incidência é aproximadamente λI . Isto pode corresponder a uma doença rara numa população grande com maioria de indivíduos susceptíveis tal que a transmissão depende primariamente do número de infectados. Esta incidência para uma população saturada com susceptíveis foi proposta por May e Anderson, [17].

Incidência não linear

Um quarto tipo de incidência é a incidência não linear, usada em [16], e a sua expressão é $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$. Este tipo de incidência permite maior abrangência de comportamentos dinâmicos do que a incidência bilinear de acção de massa simples. Estes comportamentos são determinados por p e λ , e secundariamente por q , como veremos no capítulo 6.

Em [16] temos outras formas gerais de incidência, como $\lambda \frac{I^p S^q}{N^{p+q}} \frac{1}{1+\nu \frac{I}{N}^{p-1}}$.

Podemos fazer algumas considerações acerca dos vários tipos de incidência, considerando alguns estudos. Em [18], Mena-Lorca e Hethcote analisaram incidências da forma $\lambda N^a XY$, usando os dados de Anderson [2], relativamente a doenças humanas. Os valores obtidos para a variam entre $-0,93$ e $-0,97$ para 5 doenças humanas em comunidades de tamanhos entre 1000 e 400000. Isto sugere fortemente que a incidência standard (que corresponde a $a = -1$) é muito mais realista para doenças humanas do que a acção de massa simples βXY , que corresponde a $a = 0$.

Relativamente a outras experiências feitas com ratos em laboratório, de acordo com [18], Anderson e May, [1], usaram os modelos SIRS com incidência de acção de massas simples βXY para modelarem dados em duas doenças nestas populações. Este tipo de incidência parece ajustar-se bem aos dados e as previsões com estes dados são consistentes com os dados experimentais.

Definimos agora também o conceito de força da infecção.

Definição 1.1.4 Designa-se **força da infecção** a quantidade $\lambda \frac{I(t)}{N(t)}$ onde λ é a taxa de contactos adequados per capita de indivíduos infectados. Esta quantidade traduz o número médio de novos casos de infectados por indivíduo infectado até esse instante.

Vamos agora introduzir os conceitos de ponto de equilíbrio endémico e de

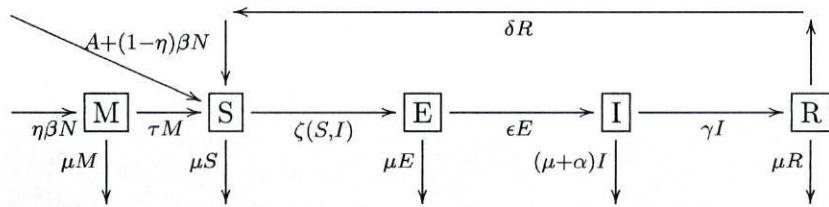
ponto de equilíbrio da não doença:

Definição 1.1.5 Considerando um sistema de equações diferenciais na região Γ , diz-se que P , um ponto de equilíbrio deste sistema, é um **ponto de equilíbrio da não doença** se corresponder a um número nulo de indivíduos infeciosos (ou à fracção correspondente nula).

Definição 1.1.6 Considerando um sistema de equações diferenciais na região Γ , diz-se que P , um ponto de equilíbrio deste sistema, é um **ponto de equilíbrio endémico** se estiver em Γ° , o interior de Γ .

Modelo Geral

Repetimos agora o esquema que mostra a dinâmica do modelo geral.



Notemos que para este modelo geral designamos a incidência de uma forma geral $\zeta(S, I)$.

As equações diferenciais que descrevem o modelo geral são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dM}{dt} & = & \eta\beta N - (\mu + \tau)M \\ \frac{dS}{dt} & = & A + \tau M + (1 - \eta)\beta N - \mu S - \zeta(S, I) + \delta R \\ \frac{dE}{dt} & = & \zeta(S, I) - (\mu - \epsilon)E \\ \frac{dI}{dt} & = & \epsilon E - (\mu I + \alpha I) - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} & = & \gamma I - (\mu - \delta)R \end{array} \right. \quad (1.1)$$

com condições iniciais:

$$M(0) = M_0 \geq 0, \quad S(0) = S_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0,$$

$$I(0) = I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0$$

e a condição

$$N(t) = M(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

Assim,

$$\frac{dN}{dt} = \beta N - \mu N - \alpha I + A = (\beta - \mu)N - \alpha I + A.$$

A região em análise é a seguinte:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{(M, S, E, I, R, N) : M(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t) &= N(t) \\ M(t), S(t), E(t), I(t), R(t), N(t) &\geq 0\}.\end{aligned}$$

1.2 Do modelo geral aos modelos mais simples: do MSEIRS aos modelos SEI, SEIS, SIS, SIR, SIRS, SEIR, SEIRS, MSEIR

Nesta secção vamos mostrar que a partir de um modelo MSEIRS podemos encontrar vários modelos epidemiológicos mais simples, casos particulares deste.

Como exemplo, para transformarmos um modelo geral MSEIRS definido anteriormente num modelo SEIRS sem imigração tomamos $A = 0$, $M(0) = 0$, $\eta = 0$ e $\tau = 0$, mantendo-se os outros parâmetros definidos anteriormente. Vamos agora expôr os casos em que passamos de um modelo SEIRS para os modelos SIRS e SIR. Para o modelo SIRS tomamos $\epsilon \rightarrow \infty$ em todas as equações diferenciais e para o modelo SIR tomamos adicionalmente a condição $\delta = 0$. Note-se que neste caso vamos usar a incidência standard nos dois modelos. A interpretação dada é a de que a classe dos infectados (I) e dos latentes (E) passam a ser a mesma, já que o período de latência passa a ser irrelevante. No limite temos então $e = 0$ (e é a fracção dos indivíduos expostos) e $\frac{de}{dt}$ vai contribuir para $\frac{di}{dt}$ (i é a fracção dos indivíduos infeciosos).

Vamos centrar-nos então nas equações diferenciais que compõem o sistema SEIRS com incidência standard:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta N - \mu S - \lambda \frac{IS}{N} + \delta R \\ \frac{dE}{dt} = \lambda \frac{IS}{N} - (\mu + \epsilon) E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu + \alpha + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta) R \end{cases} \quad (1.2)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0 \\ I(0) &= I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0 \quad e \\ N(t) &= S(t) + E(t) + I(t) + R(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu)N - \alpha I.$$

Façamos as seguintes mudanças de variáveis (que correspondem a considerar densidades das populações em vez de quantidades absolutas) que denotam as novas fracções das classes da população:

$$s = \frac{S}{N} \quad \text{e analogamente} \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N} \quad \text{e} \quad r = \frac{R}{N}.$$

Temos assim o novo sistema de equações diferenciais em s, e, i e r

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \beta(1-s) - \lambda is + \alpha is + \delta r \\ \frac{de}{dt} = \lambda is - (\epsilon + \beta)e + \alpha ie \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2 \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \beta)r + \alpha ir \end{cases} \quad (1.3)$$

sujeito às restrições

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1,$$

$$s(t) \geq 0, \quad e(t) \geq 0, \quad i(t) \geq 0 \quad e \quad r(t) \geq 0.$$

Assim, a região em estudo será

$$\Gamma = \{(s(t), e(t), i(t), r(t)) : s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1,$$

$$s(t) \geq 0, e(t) \geq 0, i(t) \geq 0, r(t) \geq 0\}.$$

Notemos que observando as condições acima podem deduzir-se as equações diferenciais relativas ao modelo SIRS, resultando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \beta(1-s) - \lambda is + \alpha is + \delta r \\ \frac{di}{dt} = \lambda is - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2 \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \beta)r + \alpha ir \end{cases} \quad (1.4)$$

sujeito às restrições

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1, \quad s(t) \geq 0, \quad i(t) \geq 0 \quad e \quad r(t) \geq 0.$$

Neste modelo, a região a analisar será

$$\Gamma = \{(s, i, r) : s(t) + i(t) + r(t) = 1, \quad s(t) \geq 0, \quad i(t) \geq 0, \quad r(t) \geq 0\}.$$

Para obtermos as equações diferenciais relativas ao modelo SIR bastará considerar em (1.2) a restrição $\delta = 0$.

Assim, do modelo MSEIRS, procederíamos de maneira análoga à descrita para obter os modelos SEI, SEIS, SIS, SEIR e MSEIR.

Note-se que todos os resultados obtidos para um modelo mais geral podem ser aplicados aos seus submodelos.

1.3 Parâmetros limite nos modelos epidemiológicos

Para introduzirmos novas definições de parâmetros limite vamos supor que num dado instante inicial existe apenas um indivíduo infectado que entra na população (constituída apenas por indivíduos susceptíveis) e mistura-se de forma homogénea com os seus elementos (de forma igual a qualquer outro indivíduo suscetível).

Definição 1.3.1 *Seja R_0 , designado por **número de reprodução básico**, o número médio de infecções secundárias (novos indivíduos infectados) que ocorrem aquando da introdução de um indivíduo infectado numa população composta apenas por susceptíveis.*

Segundo [11], esta designação é devida a Dietz, [8]. É também designado *basic reproduction ratio* (Diekmann, Heesterbeek e Metz, em [7]) ou taxa de reprodução (Anderson e May, [3]).

Assim, este parâmetro está definido apenas no momento da invasão e é usado para determinar quando uma doença pode invadir uma população causando uma epidemia.

Definição 1.3.2 Seja σ , designado por **número de contacto**, o número médio de contactos adequados de um infeccioso durante o período de infecção.

Este parâmetro está definido em todos os instantes.

Observação:

Para alguns modelos a estabilidade dos pontos de equilíbrio não é decidida usando o número de contacto, mas o número de contacto modificado. Este novo parâmetro-limite surge quando substituimos o parâmetro relativo à mortalidade natural, μ , pelo parâmetro relativo à natalidade, β , na expressão do parâmetro limite. Trivialmente, tal só pode acontecer nos modelos em que são considerados os fenómenos demográficos naturais. Este parâmetro é denotado por θ .

Definição 1.3.3 Seja R , designado por **número de substituição**, o número médio de infecções secundárias devidas a um infeccioso durante todo o período de infecção (número de reprodução não é adequado para não confundir com R_0).

Este parâmetro também está definido em todos os instantes.

Notas:

- R_0 , σ e R são iguais no início do desenvolvimento da doença infecciosa, quando a população é composta apenas por susceptíveis excepto o invasor infeccioso.

No instante inicial t_0 :

$$R_0 = \sigma = R.$$

- Para muitos modelos o número de contacto σ permanece constante, ou seja, é sempre igual a R_0 . Desta forma, os teoremas podem ser expressos usando uma ou outra constante. Há casos em que isto não se passa, por exemplo, para os modelos de tosse convulsa, ([11]), o número de contacto torna-se menor do que o número de reprodução básico R_0 depois da invasão porque depois desta aparecem novas classes de infectados com menor infectividade.
- O número de substituição R é o número de casos secundários actuais de um infeccioso depois da infecção invadir a população e de já não ser toda a gente susceptível. R é sempre menor do que o número de reprodução básico R_0 . Isto porque depois da invasão a fracção de susceptíveis é menor do que 1.

- Depois da invasão observa-se $R_0 = \sigma$ ou $\sigma > R$ para muitos modelos.

De acordo com [18], em Anderson, [2], mostra-se que para doenças como sarampo, tosse convulsa, varicela, difteria, escarlatina, os números de contacto (aqui designadas por taxas de reprodução básicas) são bastante consistentes em várias áreas. Não variam, dentro da mesma doença por um factor mais do que 1,5 para áreas rurais ou urbanas ou para comunidades pequenas ou grandes. Anderson concluiu que os números de contacto (que ele chamou taxas de reprodução básicas) são fracamente dependentes em relação ao tamanho da comunidade. Schenzle e Dietz, [22], também concluem que as taxas de contacto e os números de reprodução são essencialmente independentes do tamanho da população, para doenças humanas. Logo, a incidência standard parece melhor do que a incidência de acção de massas simples.

O objectivo destes parâmetros-limite é permitir saber quando uma doença desaparece (a fracção i da população tende para 0) ou invade a população (a fracção de infectados permanece positiva), tornando-se uma doença endémica. Note-se que o número de infecciosos I pode tender para infinito mesmo que a fracção i tenda para zero. Basta que o tamanho da população, N , cresça mais depressa do que I . De forma semelhante, I pode tender para zero mesmo que i permaneça positiva, se o tamanho da população decrescer para zero ([18] e [10]). No nosso trabalho centramo-nos na definição de erradicação dada por $i \rightarrow 0$. Veremos posteriormente que, se estes parâmetros não ultrapassarem 1 a doença desaparece e invade a população caso contrário.

Em relação à **vacinação**, temos que ter em conta que não é possível vacinar toda a população, quer por motivos económicos, quer por envolver meios logísticos incompatíveis. Através do número de contacto, é possível encontrar qual a fracção da população de susceptíveis que deve ser vacinada. Se num dado instante o número de contacto é σ então um indivíduo infeccioso tem σ contactos adequados com susceptíveis durante o período de infecção. O número de substituição, σs (sendo s a fracção de susceptíveis da população), deve ser menor do que 1 para que um indivíduo infeccioso não possa transmitir a doença e esta não se propague de forma a gerar uma epidemia. Isto significa que s tem que ser menor do que $\frac{1}{\sigma}$, logo a fracção imune (a vacinar) deve ser maior do que $1 - \frac{1}{\sigma}$.

Capítulo 2

O modelo SIS

Consideremos agora o modelo epidemiológico mais simples, caso particular do MSEIRS, o modelo geral descrito anteriormente.

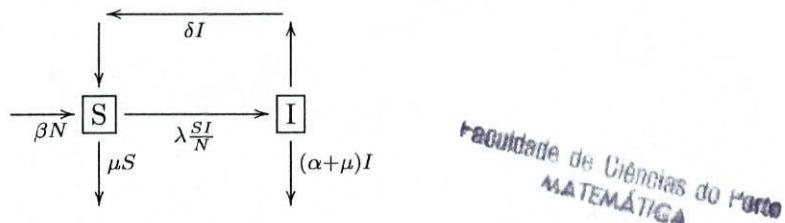
O **dengue** é uma das doenças infecciosas cujo processo epidemiológico pode ser modelado pelo modelo SIS, que vai ser apresentado de seguida.

2.1 Modelo SIS endémico

Vamos agora considerar um modelo SIS que abrange fenómenos demográficos (natalidade e mortalidade natural) e morte pela doença, ou seja, um modelo endémico. A incidência considerada é a incidência standard.

Tratando-se de um modelo muito simples, serve apenas para introduzir alguns dos conceitos epidemiológicos e fazer uso de alguns conceitos da teoria de estabilidade de equações diferenciais.

Apresentamos agora o diagrama de transferência entre as classes S (indivíduos susceptíveis) e I (infecciosos), onde estão representadas também as taxas de transferência entre as classes consideradas, observando as considerações acima referidas:



Assim, analisando o esquema acima, encontramos as seguintes equações

diferenciais do modelo endémico SIS endémico:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} + \delta I - \mu S + \beta N \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - (\alpha + \delta + \mu) I \end{cases}, \quad (2.1)$$

tendo como condições iniciais $S(0) = S_0 \geq 0$ e $I(0) = I_0 \geq 0$ e como condições adicionais $\lambda > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\mu \geq 0$, $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $N(t) = S(t) + I(t)$, para $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Desta última condição temos que $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu)N - \alpha I,$$

que pode ser positivo, negativo ou nulo. A quantidade $r = \beta - \mu$ é designada por **crescimento líquido da população**.

Temos os casos particulares em que $\beta = \mu$ e $\alpha = 0$, donde $\frac{dN}{dt} = 0$ e então $N(t) \equiv N = N(0)$, ou seja, o tamanho da população permanece constante; e $\beta = \mu = \alpha = 0$, o modelo epidémico que vamos analisar na secção seguinte.

A região em análise no modelo apresentado é o quadrante:

$$T = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0\}. \quad (2.2)$$

Vamos agora provar que o sistema (2.1) sujeito à restrição $S(t) + I(t) = N(t)$ é positivamente invariante (definição A.3.7) e também que está definido para todo o instante $t \in \mathbb{R}_0^+$. Assim, está bem definido matematicamente e biologicamente.

Vamos então analisar o comportamento das órbitas positivas deste sistema na fronteira, que designaremos por ∂T .

Primeiro notemos que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema (2.1).

Consideremos um ponto arbitrário no eixo positivo dos S' s, $(S, 0)$, para $S(t) \geq 0$.

Temos que $\frac{dS}{dt} = (\beta - \mu)S$ e $\frac{dI}{dt} = 0$. Assim, vemos que o eixo positivo dos S' s é uma órbita (o seu sentido depende do sinal de $\beta - \mu$).

Tomemos um ponto arbitrário do eixo positivo dos I' s, $(0, I)$, para $I(t) \geq 0$.

Temos $\frac{dS}{dt} = (\beta + \delta)I \geq 0$ e $\frac{dI}{dt} = -(\alpha + \delta + \mu)I \leq 0$. Assim, nenhuma órbita do sistema 2.1 ultrapassa o eixo dos I' s.

Com estas considerações provámos que o espaço de fase SI é positivamente invariante.

Fazemos agora as mudanças de variáveis $s = \frac{S}{N}$ e $i = \frac{I}{N}$, em que passamos a considerar a fracção de susceptíveis da população, s , e a de infecciosos, i . Temos assim que

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dS}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} s(t) \\ &= -\lambda si + \delta i - \mu s + \beta - ((\beta - \mu)N - \alpha I) \frac{1}{N(t)^2} S \\ &= (\alpha - \lambda)si + \beta(1 - s) + \delta i\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{dI}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} i(t) \\ &= \lambda si - \delta i - \mu i - \alpha i - ((\beta - \mu)N - \alpha I) \frac{1}{N(t)^2} I \\ &= \lambda si - (\alpha + \beta + \delta)i + \alpha i^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

com as condições $s \geq 0$, $i \geq 0$ e $s + i = 1$.

De (2.3) e (2.4) temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} &= (\alpha - \lambda)si + \beta(1 - s) + \delta i \\ \frac{di}{dt} &= \lambda si - (\alpha + \beta + \delta)i + \alpha i^2 \end{cases}.\tag{2.5}$$

A região em análise é o segmento de recta $\Gamma = \{(s, i) : s \geq 0, i \geq 0, s + i = 1\}$.

Observemos ainda que $s + i = 1$, nos permite efectuar a substituição $s = 1 - i$ na primeira equação de (2.5):

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (\alpha - \lambda)(1 - i)i + \delta i - \beta(1 - i) + \beta \\ &= (\alpha - \lambda)i - (\alpha - \lambda)i^2 + \delta i - \beta + \beta i + \beta \\ &= -(\alpha - \lambda)i^2 + (\alpha - \lambda + \delta + \beta)i\end{aligned}\tag{2.6}$$

e de forma análoga, na segunda equação de (2.5), de forma a ficarmos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -(\alpha - \lambda) i^2 + (-\lambda + \alpha + \beta + \delta) i \\ \frac{di}{dt} = (\alpha - \lambda) i^2 - (-\lambda + \alpha + \beta + \delta) i \end{cases}. \quad (2.7)$$

Observemos que $\frac{ds}{dt} = -\frac{di}{dt}$. Analisando os pontos de equilíbrio deste sistema (2.1) no segmento de recta $\Gamma = \{i \in [0, 1]\}$, encontramos os pontos de equilíbrio do sistema (2.1). Verificamos que são os pontos $P_0 = (1, 0)$, **o ponto de equilíbrio da não doença** e $P^* = \left(\frac{\delta+\beta}{\lambda-\alpha}, 1 - \frac{\delta+\beta}{\lambda-\alpha}\right)$, **o ponto de equilíbrio endémico**. As condições para que o ponto de equilíbrio endémico exista são $\lambda > \alpha$ e $\delta + \beta < \lambda - \alpha$. No caso de se tomar a igualdade para qualquer uma das desigualdades, encontramos o ponto de equilíbrio da não doença.

Analisemos agora o comportamento de $i(t)$, podendo depois concluir sobre o comportamento de $s(t)$.

Podemos reescrever a expressão de $\frac{di}{dt}$ da seguinte forma:

$$\frac{di}{dt} = -(-\lambda + \alpha + \beta + \delta) i \left[1 - \frac{i}{\frac{-\lambda+\alpha+\beta+\delta}{\alpha-\lambda}} \right].$$

Vamos definir as constantes $r_* = -(-\lambda + \alpha + \beta + \delta)$ e $i_* = \frac{-\lambda+\alpha+\beta+\delta}{\alpha-\lambda}$ e temos a seguinte expressão para $i(t)$:

$$\frac{di}{dt} = r_* i \left(1 - \frac{i}{i_*} \right).$$

Pela análise da expressão de $\frac{di}{dt}$, quando $r_* > 0$, conclui-se que para cada instante t :

- $i(t)$ decresce se $i < i_*$;
- $i(t)$ cresce se $i > i_*$;
- $i(t)$ é constante se $i = i_*$,

podendo fazer-se uma análise análoga quando $r_* < 0$. A equação diferencial (2.1) é uma equação logística, com solução:

$$i(t) = \frac{i_0 i_*}{i_0 + (i_* - i_0) e^{-r_*(t-t_0)}}.$$

Notemos que o número de contacto, σ , é $\frac{\lambda}{\alpha+\mu+\delta}$ (multiplicamos a taxa de contactos adequados pelo tempo médio de infecção), logo o número de contacto modificado, θ , é $\frac{\lambda}{\alpha+\beta+\delta}$.

Observando as equivalências $r_* > 0 \Leftrightarrow \lambda > \alpha + \beta + \delta \Leftrightarrow \theta > 1$, independentemente do número inicial de infectados (não nulo) i_0 , e de $r_* > 0$, o tamanho da população infectada aproxima-se de i_* quando $t \rightarrow \infty$.

Acabámos de provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1 *Seja $(s(t), i(t))$ uma solução do sistema (2.5):*

1. *Se $\theta > 1$ então a órbita tende para o ponto de equilíbrio endémico $P^* = \left(\frac{\delta+\beta}{\lambda-\alpha}, 1 - \frac{\delta+\beta}{\lambda-\alpha}\right)$, excepto o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0)$.*
2. *Se $\theta \leq 1$ temos $r_* \leq 0$ o que implica que $i(t) \rightarrow 0$, ou seja, a órbita tende para o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0)$.*

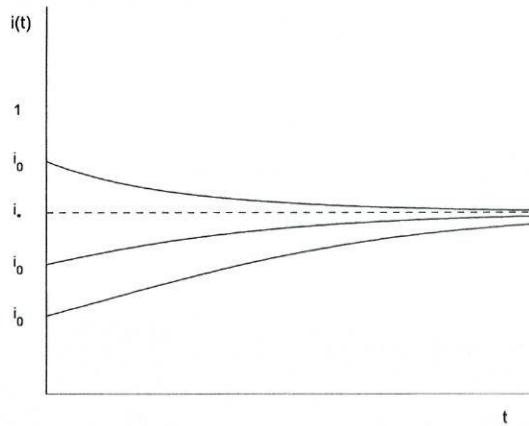


Figura 2.1: Modelo SIS endémico: comportamento de $i(t)$ para $\theta > 1$.

2.2 Modelo SIS epidémico

Neste modelo epidémico não serão considerados os efeitos demográficos e neste caso também vamos considerar que não há morte pela doença. É um caso particular do modelo SIS endémico acrescentando as condições $\beta = \mu = \alpha = 0$.

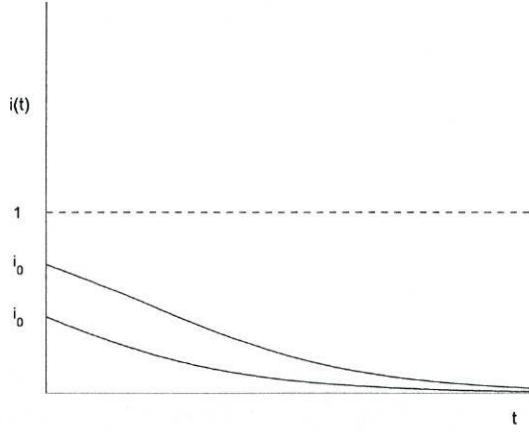
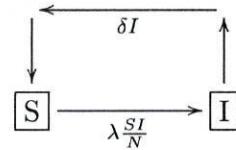


Figura 2.2: Modelo SIS endémico: comportamento de $i(t)$ para $\theta \leq 1$.

O diagrama de transferência entre as classes S (indivíduos susceptíveis) e I (infecciosos) é o seguinte:



As equações diferenciais do modelo SIS epidémico são as seguintes:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} + \delta I \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - \delta I \end{cases}, \quad (2.8)$$

tendo como condições iniciais

$$S(0) = S_0 \geq 0 \quad e \quad I(0) = I_0 \geq 0$$

e como condições adicionais

$$\lambda > 0, \quad \delta \geq 0, \quad S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0 \quad e \quad N(t) = S(t) + I(t), \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Desta última condição temos que $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, ou seja, $\frac{dN}{dt} = 0$, isto é, o tamanho da população mantém-se constante.

A região em análise no modelo apresentado é o quadrante:

$$T = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0\}.$$

Tal como o modelo endémico, a prova da invariância positiva é feita da mesma forma, sendo o eixo não negativo dos S 's constituído apenas por pontos de equilíbrio.

Fazemos agora as mudanças de variáveis $s = \frac{S}{N}$ e $i = \frac{I}{N}$, em que passamos a considerar a fracção de susceptíveis da população, s , e a de infecciosos, i . Temos assim que

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dS}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} s(t) \\ &= -\lambda si + \delta i,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{dI}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} i(t) \\ &= \lambda si - \delta i\end{aligned}\tag{2.10}$$

com as condições $s \geq 0$, $i \geq 0$ e $s + i = 1$.

De (2.9) e (2.10) temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda si + \delta i \\ \frac{di}{dt} = \lambda si - \delta i \end{cases}.\tag{2.11}$$

A região em análise é o segmento de recta $\Gamma = \{(s, i) : s \geq 0, i \geq 0, s + i = 1\}$.

Observemos ainda que $s + i = 1$ nos permite efectuar a substituição $s = 1 - i$ na primeira equação de (2.11):

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\lambda(1 - i)i + \delta i \\ &= -\lambda i + \lambda i^2 + \delta i \\ &= \lambda i^2 - (\lambda - \delta) i\end{aligned}$$

e de forma análoga, na segunda equação de (2.11) de forma a ficarmos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \lambda i^2 - (\lambda - \delta) i \\ \frac{di}{dt} = -\lambda i^2 + (\lambda - \delta) i \end{cases}. \quad (2.12)$$

Observemos que $\frac{ds}{dt} = -\frac{di}{dt}$. Analisando os pontos de equilíbrio deste sistema (2.12) no segmento de recta $\Gamma = \{i \in [0, 1]\}$, encontramos os pontos de equilíbrio do sistema (2.12). Verificamos que são os pontos $P_0 = (1, 0)$, o ponto de equilíbrio da não doença e $P^* = (\frac{\delta}{\lambda}, 1 - \frac{\delta}{\lambda})$, o ponto de equilíbrio endémico. A condição para que o ponto de equilíbrio endémico exista é $\lambda > \delta$. Caso se verifique $\lambda = \delta$ encontramos o ponto de equilíbrio da não doença.

Analisemos agora o comportamento de $i(t)$, podendo depois concluir sobre o comportamento de $s(t)$.

Podemos reescrever a expressão de $\frac{di}{dt}$ da seguinte forma:

$$\frac{di}{dt} = -(-\lambda + \delta)i \left[1 - \frac{i}{\frac{\delta-\lambda}{-\lambda}} \right]. \quad (2.13)$$

Vamos definir as constantes $r_* = -(-\lambda + \delta)$ e $i_* = \frac{\delta-\lambda}{-\lambda}$ e temos a seguinte expressão para $i(t)$:

$$\frac{di}{dt} = r_* i \left(1 - \frac{i}{i_*} \right).$$

Tal como no modelo endémico, a equação diferencial (2.13) é uma equação logística, com solução:

$$i(t) = \frac{i_0 i_*}{i_0 + (i_* - i_0) e^{-r_*(t-t_0)}}.$$

Independentemente do número inicial de infectados (não nulo) i_0 , temos

$$r_* > 0 \Leftrightarrow \lambda > \gamma,$$

e então o tamanho da população infectada aproxima-se de i_* quando $t \rightarrow \infty$. Isto significa que estamos sob a condição $\sigma > 1$, pois o número de contacto é $\frac{\lambda}{\delta}$ (produto da taxa de contactos adequados pelo tempo médio da infecção). Observámos ainda que sob a condição $\sigma < 1$ o ponto de equilíbrio endémico não existe em Γ .

Acabámos de provar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 Seja $(s(t), i(t))$ uma solução do sistema (2.12) em Γ .

1. Se $\sigma > 1$ então a órbita tende para $P^* = \left(\frac{\delta}{\lambda}, 1 - \frac{\delta}{\lambda}\right)$, o ponto de equilíbrio endémico, excepto o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0)$.
2. Se $\sigma \leq 1$ temos $r_* \leq 0$ o que implica que $i(t) \rightarrow 0$, ou seja, a órbita tende para o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0)$.

Capítulo 3

O modelo SIR epidémico

Este modelo SIR, sendo mais abrangente e mais complexo do que o anterior, será analisado apenas na sua forma epidémica, como em [11]. A forma endémica, mais complexa, poderá ser analisada como um caso particular do modelo SIRS, tratado no capítulo 4. Vamos usar a forma de incidência standard.

Consideramos um modelo epidémico, em que não se consideram os fenómenos de natalidade e mortalidade, já que as hipóteses são que o processo relativo a certas doenças se desenvolve muito rapidamente em comparação com os fenómenos demográficos. Note-se que neste caso a doença confere imunidade permanente.

Vamos considerar neste modelo a incidência standard e, por simplicidade, que não há morte pela doença. Assim, não havendo fenómenos demográficos naturais nem morte pela doença, o tamanho da população permanecerá constante, como se poderá concluir pelo sistema de equações diferenciais que será descrito posteriormente.

Neste modelo a população é dividida em três classes, S , I e R , susceptíveis, infecciosos e recuperados, respectivamente.

O diagrama de transferência relativo a este modelo é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{S} & \xrightarrow{\lambda \frac{SI}{N}} & \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R} \end{array}$$

O sistema de equações diferenciais é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{array} \right. \quad (3.1)$$

com a restrição

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t),$$

e as condições iniciais

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad e \quad R(0) = R_0 \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Notemos que o tamanho da população, $N(t)$, é constante pois

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t),$$

o que implica que $\frac{dN}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$ e assim temos $\frac{dN}{dt} = 0$, logo

$$N(t) \equiv N = N(0) = N_0.$$

Dividindo as equações por N (tamanho constante da população) e sendo s , i e r as frações das populações de susceptíveis, infeciosos e recuperados:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} &= -\lambda is \\ \frac{di}{dt} &= \lambda is - \gamma i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i \end{cases}$$

com $s(t) \geq 0$, $i(t) \geq 0$, $r(t) \geq 0$ e $s(t) + i(t) + r(t) = 1$. Assim, podemos reescrever a equação $r(t) = 1 - s(t) - i(t)$, sendo necessário trabalhar apenas com o sistema

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} &= -\lambda is \\ \frac{di}{dt} &= \lambda is - \gamma i \end{cases}. \quad (3.2)$$

Temos o triângulo Γ como espaço de fase de si dado por:

$$\{(s, i) : s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

que vamos de seguida provar ser positivamente invariante.

Trivialmente verifica-se que $P = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio do sistema 3.2.

Analisemos o comportamento das órbitas positivas deste sistema em $\partial\Gamma$:

- na aresta $s = 0$ (correspondente ao eixo dos i 's) temos as seguintes condições: $\frac{ds}{dt} = 0$ e $\frac{di}{dt} = -\gamma i$, o que significa que esta aresta é uma órbita que se aproxima do ponto de equilíbrio $P = (0, 0)$;
- na aresta com a condição $i = 0$ todos os pontos são pontos de equilíbrio;
- na aresta com a condição $s + i = 1$ temos $\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} = -\gamma i < 0$, o que implica que a órbita entra no interior de Γ (atinge a igualdade apenas no ponto de equilíbrio $P = (0, 0)$).

Provámos desta forma que a região Γ é positivamente invariante.

O número de contacto é, neste caso, $\sigma = \frac{\lambda}{\gamma}$ pois é o produto do período médio de infecção, $\frac{1}{\gamma}$, pela taxa de contactos adequados per capita, λ .

Teorema 3.0.2 *Seja $(s(t), i(t))$ uma solução do sistema (3.2) em Γ e relembremos $R = \frac{\lambda s}{\gamma}$, o número de substituição.*

1. (a) *Se $R \leq 1$ então $i(t)$ decresce para 0 quando $t \rightarrow \infty$.*
- (b) *Se $R > 1$ então $i(t)$ primeiro cresce até ao seu valor máximo $i_{max} = i_0 + s_0 - \frac{1}{\sigma} - \frac{\log \sigma}{\sigma}$ e depois decresce até 0 quando $t \rightarrow \infty$.*
2. *A fracção de susceptíveis $s(t)$ é uma função decrescente e tem uma assíntota horizontal de equação $s = s_\infty$, sendo s_∞ a única raiz da equação $i_0 + s_0 - s_\infty + \frac{\log(\frac{s_\infty}{s_0})}{\sigma} = 0$ em $]0, \frac{1}{\sigma}[$.*

Prova. Para a prova deste teorema vamos analisar o comportamento de $\frac{i'(t)}{s'(t)}$. Ora,

$$\frac{i'(t)}{s'(t)} = \frac{\lambda i s - \gamma i}{-\lambda i s} = -1 + \frac{\gamma}{\lambda s},$$

resultando assim que

$$\frac{di}{ds} = -1 + \frac{\gamma}{\lambda s}.$$

Integrando em ambos os membros desta igualdade vem:

$$\int_{i_0}^i di = \int_{s_0}^s \left(-1 + \frac{\gamma}{\lambda s} \right) ds \Leftrightarrow i - i_0 = -s + s_0 + \frac{\gamma}{\lambda} \log \frac{s}{s_0}. \quad (3.3)$$

Vamos calcular agora os pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} -\lambda i s = 0 \\ \lambda i s - \gamma i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = 0 \\ s \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}.$$

Assim, os pontos de equilíbrio deste sistema formam um linha de equilíbrios, nos pontos do eixo dos s 's que estão em Γ , ou seja, $\{(s, 0) : 0 \leq s \leq 1\}$. Não existe assim nenhum ponto de equilíbrio endémico.

Para estudar o comportamento assintótico, vamos estudar a matriz Jacobiana no ponto genérico (s, i) :

$$J = \begin{bmatrix} -\lambda i & -\lambda s \\ \lambda i & \lambda s - \gamma \end{bmatrix}.$$

Sendo a Jacobiana nos pontos de equilíbrio

$$J_e = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda s \\ 0 & \lambda s - \gamma \end{bmatrix}.$$

A equação característica é $-k(\lambda s - \gamma - k) = 0$, logo os valores próprios são $k = 0$ e $k = \lambda s - \gamma$. Introduzimos agora a definição de ponto de equilíbrio neutralmente estável ou instável, quando um dos valores próprios é nulo e o outro tem respectivamente parte real negativa ou parte real positiva. Precisamos então apenas de saber (quando há um valor próprio nulo) se o outro valor próprio tem parte real negativa ou positiva, respectivamente.

No eixo dos s , para $s < \frac{1}{\sigma}$ os pontos de equilíbrio são neutralmente estáveis e para $s > \frac{1}{\sigma}$ são neutralmente instáveis. Notemos ainda que para qualquer ponto de Γ se observa a condição $\frac{ds}{dt} = -\lambda i s \leq 0$ e que, por essa razão, não há órbitas periódicas. Assim, aplicando o teorema de Poincaré-Bendixson (teorema A.5.7), para qualquer órbita do sistema (3.2) temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \in [0, \frac{1}{\sigma}],$$

já que as órbitas positivas vão tender para algum ponto de equilíbrio (os pontos de equilíbrio neutralmente estáveis).

Para $R = 1$ temos a condição $\frac{di}{dt} = \gamma i(s - 1) \leq 0$, logo $i(t)$ é decrescente.

Para conseguirmos provar a segunda proposição do teorema observemos que $\frac{ds}{dt} \leq 0$ e designando por $s_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$ temos que

$$i_0 + s_0 - s_\infty + \frac{\gamma}{\lambda} \log \frac{s_\infty}{s_0} = 0, \quad (3.4)$$

pois pelo que já havíamos concluído $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$. Fazendo-nos ver apenas que s_∞ , a solução desta equação, se encontra no intervalo $[0, \frac{1}{\sigma}]$. De facto, tínhamos visto anteriormente que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \in [0, \frac{1}{\sigma}]$ e a relação (3.4) implica que $s_\infty > 0$. O comportamento das funções $s(t)$ e $i(t)$ sob a condição $\sigma > 1$ pode ser observado na figura 3.

Vamos agora estudar, a partir das conclusões já tiradas, qual a dinâmica da fração dos indivíduos recuperados. Relembrando a relação

$$r(t) = 1 - i(t) - s(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1 - s_\infty,$$

concluimos o seguinte resultado para $r(t)$:

- se $R \leq 1$ como $i(t)$ decresce para 0 e $s(t)$ é decrescente até $s_\infty \Rightarrow r(t)$ também é crescente (tem uma assíntota horizontal como $s(t)$).

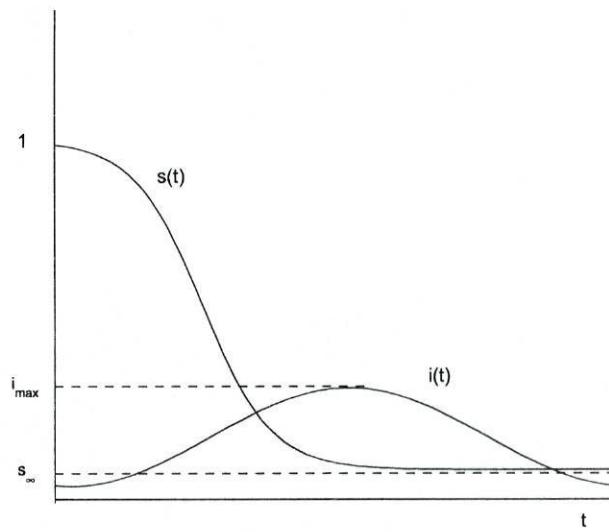


Figura 3.1: Modelo SIR: comportamento de $s(t)$ e $i(t)$ sob a condição $R > 1$.

- se $R > 1$ inicialmente $r(t)$ decresce (em princípio a fracção de indivíduos susceptíveis será maior do que a fracção de indivíduos infeciosos) e depois cresce até à assímptota já referida.

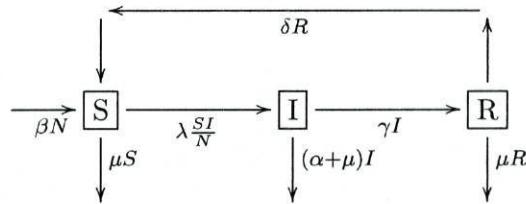
Capítulo 4

O modelo SIRS

4.1 Modelo geral

Vamos considerar um modelo geral de SIRS que inclui os parâmetros natalidade, morte natural e morte devida à doença.

O diagrama de transferência respectivo é:



As equações diferenciais deste modelo são :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\lambda SI}{N} - \mu S + \beta N + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\lambda SI}{N} - (\alpha + \mu + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta) R \end{cases} \quad (4.1)$$

com as condições

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0 \quad e \quad R(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

e a condição adicional

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Temos ainda a seguinte equação diferencial que diz respeito ao tamanho total da população:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu) N - \alpha I. \quad (4.2)$$

Procedamos agora à seguinte mudança de variáveis:

$s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$, o que implica a condição $s+i+r = 1 \Leftrightarrow r = 1-s-i$.

As equações diferenciais resultantes são:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dS}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} s(t) \\ &= -\lambda s i - \mu s + \beta + \delta r - (\beta - \mu) s + \alpha i s \\ &= (\alpha - \lambda) s i - \beta s + \beta + \delta (1 - s - i) \\ &= (\alpha - \lambda) s i - (\beta + \delta) s - \delta i + \beta + \delta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dI}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} i(t) \\ &= \lambda s i - (\mu + \alpha + \gamma) i - (\beta - \mu) i + \alpha i^2 \\ &= \lambda s i - (\beta + \alpha + \gamma) i + \alpha i^2 \\ &= i (\lambda s - (\beta + \alpha + \gamma) + \alpha i), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dR}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} r(t) \\ &= \gamma i - (\mu + \delta) r - (\beta - \mu) r + \alpha i r \\ &= \gamma i - (\beta + \delta) r + \alpha i r \\ &= \gamma i - (\beta + \delta) (1 - s - i) + \alpha i (1 - s - i) \\ &= (\alpha + \beta + \delta + \gamma) i + (\beta + \delta) s - \alpha i s - \alpha i^2 - (\beta + \delta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou seja, estamos na presença do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = (\alpha - \lambda) s i - (\beta + \delta) s - \delta i + \beta + \delta \\ \frac{di}{dt} = i (\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \\ \frac{dr}{dt} = (\alpha + \beta + \delta + \gamma) i + (\beta + \delta) s - \alpha i s - \alpha i^2 - (\beta + \delta) \end{cases}, \quad (4.6)$$

sujeito às condições $s(t) \geq 0$, $i(t) \geq 0$, $r(t) \geq 0$ e $s + i + r = 1$.

A região em análise é o triângulo

$$\Gamma = \{(s, i, r) : s(t) \geq 0, i(t) \geq 0, r(t) \geq 0, s + i + r = 1\}.$$

Vamos agora provar que Γ é positivamente invariante.

Consideremos os seguintes casos relativos à fronteira de Γ :

1. $i = 0$.

Temos as seguintes relações:

$$\frac{ds}{dt} = -(\beta + \delta)s + \beta + \delta = (\beta + \delta)(1 - s) \geq 0, \text{ pois } 0 \leq s \leq 1;$$

$$\frac{di}{dt} = 0;$$

$$\frac{dr}{dt} = (\beta + \delta)(s - 1) \leq 0 \text{ pois } 0 \leq s \leq 1.$$

Notemos ainda o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0, 0)$, um dos vértices da fronteira que estudaremos mais adiante (esta sub-região é positivamente invariante).

Notemos ainda que $\frac{ds}{dr} = -1$; logo esta região da fronteira é uma órbita que tende para o ponto de equilíbrio P_0 .

2. $s = 0$.

Temos a seguinte relação:

$\frac{ds}{dt} = \delta(1 - i) + \beta \geq 0$ pois $0 \leq i \leq 1$ e $\beta \geq 0$ (esta condição é suficiente para que as órbitas positivas que atingem esta região da fronteira regressem ao interior da região Γ).

3. $r = 0$.

Temos a seguinte relação:

$\frac{dr}{dt} = \gamma i \geq 0$ pois $0 \leq i \leq 1$ (esta condição é suficiente para que as órbitas positivas que atingem esta região da fronteira regressem ao interior da região Γ).

Provamos desta forma que o conjunto Γ é positivamente invariante.

Na fronteira apenas existe o ponto de equilíbrio já referido, $P_0 = (1, 0, 0)$, já que:

- para $s = 0$, usando a expressão $\frac{ds}{dt} = -\delta i + \beta + \delta$, não é possível a existência de um ponto de equilíbrio com coordenada $i = 1 + \frac{\beta}{\delta}$, pois $0 \leq i \leq 1$;

- para $i = 0$ encontramos o ponto de equilíbrio da não doença, através da expressão $\frac{ds}{dt} = -(\beta + \delta)s + \beta + \delta$, pois implica um ponto de equilíbrio com coordenada $s = 1$;
- para $r = 0$ temos que $\frac{dr}{dt} = \gamma i$, ou seja, só temos um ponto de equilíbrio se $i = 0$, que já vimos ser o ponto de equilíbrio da não doença.

Notemos ainda que nas duas primeiras equações diferenciais do sistema (4.6) apenas figuram as variáveis s e i . Assim, depois de determinado o comportamento destas variáveis, dada a relação

$$s + i + r = 1,$$

o comportamento de r ficará também completamente determinado. Temos assim o sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = (\alpha - \lambda)s - (\beta + \delta)s - \delta i + \beta + \delta \\ \frac{di}{dt} = i(\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \end{cases}. \quad (4.7)$$

A região em análise é o triângulo

$$\Gamma' = \{(s, i) : s(t) \geq 0, i(t) \geq 0, 0 \leq s + i \leq 1\},$$

representado na figura 4.1.

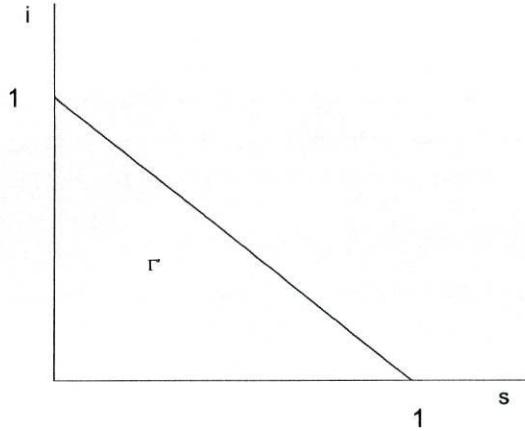


Figura 4.1: Região em análise para o modelo SIRS com o sistema reduzido a duas equações.

Estudemos a existência dos pontos de equilíbrio através da equação (4.4):

$$\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow i = 0 \vee i = \frac{-\lambda s + (\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha}. \quad (4.8)$$

A condição $i = 0$ implica a existência do ponto de equilíbrio da não doença, P_0 , que pertence à fronteira de Γ . Aquando da prova de invariância positiva de Γ verificou-se que não existe outro ponto de equilíbrio na fronteira além de P_0 .

Vamos agora analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio da não doença e mais tarde analisaremos a segunda condição de (4.8).

Estabilidade do ponto de equilíbrio da não doença

Vamos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio $P'_0 = (1, 0)$ da região Γ' , a que corresponderá o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0, 0)$ em Γ .

Usando o sistema (4.7), para um ponto qualquer $(s, i) \in \Gamma'$, temos a matriz Jacobiana :

$$J(s, i) = \begin{bmatrix} (\alpha - \lambda) i - (\beta + \delta) & (\alpha - \lambda)s - \delta \\ \lambda i & \lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\alpha i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e no ponto P'_0 temos a seguinte matriz jacobiana:

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} -(\beta + \delta) & (\alpha - \lambda) - \delta \\ 0 & \lambda - (\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Analizando a matriz jacobiana no ponto P'_0 temos que os seus valores próprios são $k_1 = -(\beta + \delta)$ e $k_2 = \lambda - (\alpha + \beta + \gamma)$. Trivialmente, porque β e δ são constantes positivas, temos que k_1 tem parte real negativa. A condição para k_2 ter parte real negativa é $\theta = \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \gamma} < 1$, em que θ é o número de contacto modificado deste modelo. Assim, P'_0 é assintoticamente estável se $\theta < 1$.

Trivialmente, se tivermos a condição $\theta > 1$, verificamos que P_0 é instável.

Necessitamos de provar agora que sob a condição $\theta \leq 1$ os possíveis pontos de equilíbrio endémicos não pertencem à região Γ e, assim, concluir que não há nenhum ponto de equilíbrio endémico no sistema (4.6) sob a condição $\theta \leq 1$.

A segunda condição de (4.8),

$$\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i = 0,$$

caso se verifique, diz respeito a ponto(s) de equilíbrio endémico(s), $P^* = (s_*, i_*)$, tal que $i_* = \frac{-\lambda s_* + (\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha}$.

Assim, analisando esta condição temos

$$i_* = \frac{-\lambda s_* + (\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha} = -\frac{\lambda}{\alpha} s_* + 1 + \frac{\beta + \gamma}{\alpha}.$$

Estudemos a posição desta recta em relação à região Γ' .

A ordenada na origem desta recta é $i = 1 + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} > 1$, logo não pertence à região Γ' relativa ao sistema (4.7). O mesmo vai acontecer com a intersecção da recta com o eixo dos s 's, já que temos o ponto de abcissa $s = \frac{1}{\theta} \geq 1$ dada a condição $\theta < 1$. De notar que, quando $\theta = 1$, o ponto de equilíbrio encontrado por esta condição é P'_0 .

A figura 4.2 ilustra a situação.

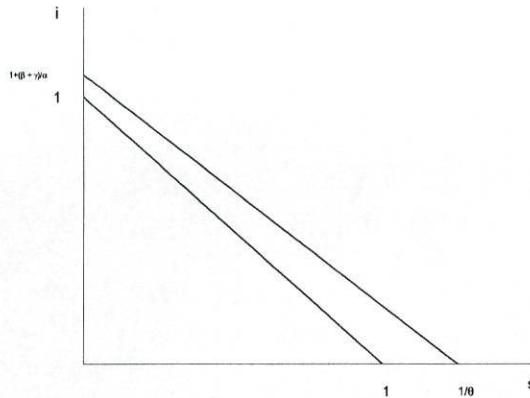


Figura 4.2: Modelo SIRS: não existência de pontos de equilíbrio endémicos para $\theta < 1$.

Provámos que sob a condição $\theta \leq 1$ não há pontos de equilíbrio endémicos em Γ' , o que implica a sua não existência em Γ .

Estabilidade global de P_0 pela teoria de LaSalle

Continuamos ainda com a condição $\theta \leq 1$. Relembramos que já foi provada a estabilidade local do ponto de equilíbrio P_0 .

Consideremos a função de Lyapunov $L = i$. Relativamente à sua derivada ao longo de uma solução do sistema (4.7), observemos o seguinte resultado, usando os factos $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq s + i \leq 1$ e $\theta \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \beta + \alpha + \gamma$:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= i(\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \\ &\leq \lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma)s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma)s - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)i \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(s + i - 1) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Analizando o subconjunto de Γ' onde se verifica $\frac{dL}{dt} = 0$ temos as seguintes condições:

$$i = 0 \quad \vee \quad \lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i = 0.$$

Provámos anteriormente nesta secção (aquando da prova da inexistência de pontos de equilíbrio endémico) que a segunda condição não é verificada em Γ' para $\theta < 1$ (e $\theta = 1$ correspondia ao ponto de equilíbrio da não doença). Assim, vamos apenas analisar o conjunto

$$M = \{(s, 0) : s \in]0, 1]\},$$

que corresponde a um segmento de recta no semi-eixo não negativo dos s' s. Vamos encontrar o maior subconjunto invariante de M .

Neste conjunto M temos que

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad e \quad \frac{ds}{dt} = -(\beta + \delta)s + \beta + \delta = (\beta + \delta)(1 - s) \geq 0 \quad \text{pois } 0 \leq s \leq 1.$$

Este conjunto M é positivamente invariante, sendo constituído por uma semi-órbita positiva e pelo ponto de equilíbrio $P'_0 = (1, 0)$. Com efeito, o maior subconjunto invariante de M é o conjunto singular constituído pelo ponto $P'_0 = (1, 0)$.

Pelo princípio de invariância de LaSalle (teorema A.4.4) temos que todas as órbitas positivas tendem para $P'_0 = (1, 0)$ e isto implica que qualquer órbita do sistema (4.6) tende para o ponto de equilíbrio da não doença, $P_0 = (1, 0, 0)$.

Assim, acabámos de provar o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 *Sob a condição $\theta \leq 1$, o ponto de equilíbrio da não doença P_0 é globalmente assintoticamente estável.*

Existência de pontos de equilíbrio endémicos

Sob a condição $\theta > 1$ observemos que, como $0 \leq i \leq 1$, temos a seguinte condição para haver equilíbrio endémico:

$$\frac{\beta + \gamma}{\lambda} < s < \frac{\beta + \gamma + \alpha}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\beta + \gamma}{\lambda} < s < \frac{1}{\theta}. \quad (4.10)$$

Analisando o ponto de intersecção da recta

$$i_* = -\frac{\lambda}{\alpha}s_* + 1 + \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$$

com a região Γ' , temos que:

$$\frac{\beta + \gamma}{\lambda - \alpha} < s < \frac{1}{\theta},$$

uma condição mais forte do que (4.10).

Existência, unicidade e estabilidade do ponto de equilíbrio endémico

Vamos agora provar a existência e unicidade do ponto de equilíbrio endémico $P^* = (s_*, i_*, r_*)$.

Substituindo a expressão de i na equação (4.3) concluimos que s_* é solução da seguinte equação do segundo grau:

$$-\frac{\lambda(\alpha - \lambda)}{\alpha}s_*^2 + \left(\frac{(\alpha - \lambda)(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha} - (\beta + \delta) + \frac{\delta\lambda}{\alpha} \right)s_* - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha}\delta + \beta + \delta = 0$$

que quando multiplicada por $-\alpha$ se resume à seguinte equação quadrática:

$$\lambda(\alpha - \lambda)s_*^2 + [-(\alpha - \lambda)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\beta + \delta) - \delta\lambda]s_* + \delta(\alpha + \beta + \gamma) - \alpha(\beta + \delta) = 0. \quad (4.11)$$

Apresentamos de seguida um teorema que vai servir para provar quer a existência de um ponto de equilíbrio endémico, quer a estabilidade global deste.

Teorema 4.1.2 *No sistema (4.6) do modelo geral SIRS não existem soluções periódicas, ciclos homoclínicos ou polígonos de fase orientados dentro da região positivamente invariante Γ .*

Prova. Vamos provar este resultado usando o corolário A.5.5, um resultado que generaliza o teorema de Dulac.

Consideramos o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{ds}{dt} \\ f_2 = \frac{di}{dt} \\ f_3 = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad (4.12)$$

na região positivamente invariante Γ .

Mais especificamente, temos as seguintes funções retiradas do nosso sistema:

$$\begin{aligned} f_1(s, i, r) &= (\alpha - \lambda)si - (\beta + \delta)s - \delta i + \beta + \delta \\ f_2(s, i, r) &= i(\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \\ f_3(s, i, r) &= (\alpha + \beta + \delta + \gamma)i + (\beta + \delta)s - \alpha si - \alpha i^2 - (\beta + \delta) \end{aligned} . \quad (4.13)$$

Seja $f = (f_1, f_2, f_3)$. Consideremos um campo de vectores g de classe C^∞ em Γ° definido da seguinte forma:

$$g(s, i, r) = [f_3(s, i, r) - f_2(s, i, r), -f_3(s, i, r) + f_1(s, i, r), f_2(s, i, r) - f_1(s, i, r)] .$$

Vejamos que $g \cdot f = 0$ e $\text{rot } (g) \cdot (1, 1, 1) < 0$ em $\Gamma^\circ = \Gamma - \partial\Gamma$, onde $n = (1, 1, 1)$ é um vector normal à superfície Γ .

Com efeito

$$\begin{aligned} g \cdot f &= f_1(s, i, r)f_3(s, i, r) - f_1(s, i, r)f_2(s, i, r) - f_2(s, i, r)f_3(s, i, r) + \\ &\quad + f_2(s, i, r)f_1(s, i, r) + f_3(s, i, r)f_2(s, i, r) - f_3(s, i, r)f_1(s, i, r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \text{rot } g \cdot (1, 1, 1) &= -\frac{\gamma si + \beta s^2 + \delta s^2 - 2\delta i + 2\delta si + \delta i^2 - \beta i - 2\beta s - 2\delta s + \beta + \delta + \beta si}{s^2 (s - 1 + i)^2 i} \\ &= -\frac{\gamma si + \beta (s^2 - i - 2s + 1 + si) + \delta (s^2 - 2i + 2si + i^2 - 2s + 1)}{s^2 (s - 1 + i)^2 i}. \end{aligned}$$

O numerador desta fração é positivo pois

- $s^2 - i - 2s + 1 + si = (s-1)^2 + i(s-1) = (s-1)(s+i-1) > 0$ (quando $s = 1$ esta expressão é 0, o que é irrelevante para a demonstração porque estamos a estudar apenas o interior da região Γ).
- $s^2 - 2i + 2si + i^2 - 2s + 1 = (s+i-1)^2 > 0$ (quando $r = 0 \Leftrightarrow s+i = 1$ esta expressão é 0, o que é irrelevante para a demonstração porque estamos a estudar apenas o interior da região Γ).

Podemos então aplicar o corolário A.5.5 para concluir que não há soluções periódicas, ciclos homoclínicos ou polígonos de fase orientados na superfície Γ° .

Atendendo a que:

- Γ é positivamente invariante e
- $\frac{ds}{dt}(0, i, r) = -\delta i + \beta + \delta = \delta(1 - i) + \beta > 0$,

podemos concluir que as órbitas positivas abandonam a fronteira para o interior e portanto, $\partial\Gamma$ não é um polígono de fase orientado.

Assim, excluímos a existência de órbitas periódicas, ciclos homoclínicos ou polígonos de fase orientados na região positivamente invariante Γ .

Tal como foi analisado anteriormente, apenas poderão existir ponto(s) de equilíbrio endémico(s) em Γ se $\theta > 1$. Já vimos que, sob a condição $\theta > 1$, o ponto de equilíbrio da não doença é instável. Assim, já que não há outros pontos de equilíbrio em $\partial\Gamma$ a não ser P_0 , como Γ é um conjunto compacto (as suas órbitas são limitadas), e está excluída a existência de órbitas periódicas devido ao teorema 4.1.2, temos pelo teorema de Poincaré-Bendixson (teorema A.5.7), que tem de existir pelo menos um ponto de equilíbrio no interior de Γ' e portanto esta situação vai corresponder à **existência** de um ou mais pontos de equilíbrio endémicos em Γ .

Vamos agora provar a **unicidade** do ponto de equilíbrio endémico em Γ' , $P^{*} = (s_{*}, i_{*})$, analisando as soluções desta equação quadrática segundo as condições $\lambda < \alpha$, $\lambda = \alpha$ e $\lambda > \alpha$.

Sob a condição $\theta > 1$, as duas primeiras condições não são possíveis pois

$$\theta > 1 \Leftrightarrow \lambda > \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \lambda > \alpha.$$

Sob a condição $\alpha < \lambda$ a concavidade de (4.11) é voltada para baixo e o maximizante é positivo:

$$2\lambda(\alpha - \lambda)s + \alpha(\beta + \delta) - (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{-\alpha(\beta + \delta) + (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \lambda)}{2\lambda(\alpha - \lambda)} > 0.$$

Quanto à ordenada na origem temos:

$$-\alpha(\beta + \delta) + \delta(\alpha + \beta + \gamma) = \delta(\beta + \gamma) - \alpha\beta. \quad (4.14)$$

Discutimos agora o sinal da ordenada na origem:

- se $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ então a ordenada na origem é nula, logo existe uma raiz positiva ou uma raiz negativa, mas como o maximizante é positivo, temos que a raiz de (4.11) é positiva.
- se $\delta > \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ então a ordenada na origem é positiva, logo existe uma raiz positiva de (4.11).
- se $\delta < \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ então a ordenada na origem é negativa, logo existem duas raizes positivas ou duas negativas, sendo que a ultima hipótese é excluída porque o maximizante é positivo.

Notemos ainda que pelo teorema de Poincaré-Bendixson, (teorema A.5.7), o ponto de equilíbrio endémico existente nos dois primeiros casos tem que pertencer a Γ' . Mas vamos agora analisar mais pormenoradamente o comportamento do sistema no caso $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$.

A equação (4.11) resume-se a

$$\lambda(\alpha - \lambda)s_*^2 + (-(\alpha - \lambda)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\beta + \delta) - \delta\lambda)s_* = 0,$$

cujas soluções são

$$s_1 = 0 \text{ ou } s_2 = \frac{(\lambda - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\beta + \delta) - \delta\lambda}{\lambda(\lambda - \alpha)}.$$

Vamos agora provar que $0 < s_2 < 1$ ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned} & (\lambda - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\beta + \delta) - \delta\lambda < \lambda(\lambda - \alpha) \\ \Leftrightarrow & (\lambda - \alpha)(-\lambda + \alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\beta + \delta) - \delta\lambda < 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda - \alpha)(-\lambda + \alpha + \beta + \gamma) + \delta(-\lambda + \alpha + \beta + \gamma) < 0 \\ & \text{pois } \alpha(\beta + \delta) = \delta(\alpha + \beta + \gamma) \text{ por (4.14)} \end{aligned}$$

e estamos sob a condição $\theta > 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma < \lambda$, em particular, $\lambda > \alpha$.

Substituindo $s = 0$ em $\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i = 0$ (segunda condição de 4.8) vem

$$i = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + 1 > 1,$$

ou seja, não existe ponto de equilíbrio endémico em Γ' .

Substituindo na mesma equação s_2 na forma simplificada, ou seja,

$$s_2 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\lambda} + \frac{\delta(-\lambda + \alpha + \beta + \gamma)}{\lambda(\lambda - \alpha)}$$

vem

$$i = \frac{\delta(\lambda - (\alpha + \beta + \gamma))}{\alpha(\lambda - \alpha)}.$$

Substituindo $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ resulta

$$i = \frac{\beta(\lambda - (\alpha + \beta + \gamma))}{(\beta + \gamma)(\lambda - \alpha)},$$

e, dadas as condições $\lambda > \beta + \alpha + \gamma$, e em particular $\lambda > \alpha$, temos que $0 \leq i \leq 1$, ou seja, vai corresponder a um ponto de equilíbrio endémico em Γ' .

Acabamos então de ver que para $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ temos apenas uma solução positiva para s , que pertence ao intervalo $]0, 1[$ e, que corresponde a um ponto de equilíbrio endémico (já vimos que $s = 0$ não implica um ponto de equilíbrio endémico e se $s = 1$ estamos na presença do ponto de equilíbrio da não doença).

Notemos que os coeficientes da equação (4.11) variam continuamente com δ e existem sempre duas raízes distintas. Assim, partindo da igualdade $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, ao fazer decrescer δ teremos duas raízes positivas e como para qualquer valor do parâmetro δ quando $s = 1$ a função quadrática subjacente a (4.11) toma um valor negativo, temos que ter as duas raízes no intervalo $]0, 1[$.

Observemos também que, quando δ decresce um ponto de equilíbrio poderia entrar em Γ' (o ponto de equilíbrio que corresponde a $s = 0$), mas isto apenas acontece se existir um ponto de equilíbrio em $\partial\Gamma'$, para algum valor $\delta < \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$. Mas, como já foi visto anteriormente, não há outro ponto de equilíbrio em Γ' a não ser P_0 . Dada esta contradição, podemos concluir que o ponto de equilíbrio endémico P^* é único.

Estabilidade local e global do ponto de equilíbrio endémico

Para provarmos a estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico, analisemos a equação $\frac{dr}{dt}$ e notemos ainda que $r = 1$ não corresponde a nenhum ponto de equilíbrio. Portanto basta considerar a condição $0 \leq r < 1$.

De (4.5) temos a seguinte condição para um ponto de equilíbrio endémico de (4.7):

$$\begin{aligned}
& \gamma i - (\beta + \delta)r + \alpha ir = 0 \\
\Rightarrow & r = \frac{\gamma i}{(\beta + \delta) - \alpha i} < 1 \\
\Rightarrow & \gamma i < \beta + \delta - \alpha i \\
\Leftrightarrow & \alpha i < \beta + \delta - \gamma i.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Da segunda condição de (4.8), temos

$$\begin{aligned}
& \lambda s - (\beta + \alpha + \gamma) + \alpha i = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda s - (\beta + \alpha + \gamma) = -\alpha i.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Usando (4.9), e sob a condição $\theta > 1$:

$$\begin{aligned}
tr(J(P^*)) &= (\alpha - \lambda)i - (\beta + \delta) + \lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\alpha i \\
&= -(\lambda - \alpha)i - (\beta + \delta) + \alpha i, \text{ por (4.16)} \\
&< -(\lambda - \alpha)i - (\beta + \delta) + (\beta + \delta) - \gamma i \text{ por (4.15)} \\
&= -(\lambda - \alpha)i - \gamma i < 0 \text{ pois } (\theta > 1 \Rightarrow \lambda > \alpha).
\end{aligned}$$

Em relação ao determinante temos por (4.9):

$$\begin{aligned}
\det(J(P^*)) &= [(\alpha - \lambda)i - (\beta + \delta)][\lambda s - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\alpha i] - \lambda i[(\alpha - \lambda)s - \delta] \\
&= [(\alpha - \lambda)i - (\beta + \delta)]\alpha i - \lambda i[(\alpha - \lambda)s - \delta] \text{ por (4.16)} \\
&= i[-(\lambda - \alpha)\alpha i - \alpha(\beta + \delta) + \lambda(\lambda - \alpha)s + \lambda\delta] \\
&= i[(\lambda - \alpha)(-\alpha i) - \alpha(\beta + \delta) + \lambda(\lambda - \alpha)s + \lambda\delta] \\
&> i[(\lambda - \alpha)(\gamma i - (\beta + \delta)) - \alpha(\beta + \delta) + \lambda(\lambda - \alpha)s + \lambda\delta] \text{ por (4.15)} \\
&= i[(\lambda - \alpha)\gamma i - \lambda\beta + \lambda s(\lambda - \alpha)] \\
&> i[(\lambda - \alpha)\gamma i - \lambda s\beta + \lambda s(\lambda - \alpha)] \text{ pois } (0 \leq s < 1) \\
&= i[(\lambda - \alpha)\gamma i + \lambda s(\lambda - \alpha - \beta)] > 0 \text{ pois } \theta > 1.
\end{aligned}$$

Como, sob a hipótese $\theta > 1$, $tr(J(P^*)) < 0$ e $\det(J(P^*)) > 0$, fica provada a estabilidade local assimptótica de P^* nesta situação.

Através da estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico $P'^* = (s_*, i_*)$ e uma vez que $r = 1 - s - i$, temos também que $P^* = (s_*, i_*, r_*)$ é um ponto de equilíbrio endémico assintoticamente estável.

Estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico P^*

Podemos então estabelecer a estabilidade global assintótica para P^* :

Teorema 4.1.3 Sob a condição $\theta > 1$, todas as órbitas positivas do sistema (4.6) tendem para o ponto de equilíbrio endémico P^* , excepto para as órbitas positivas da face $\{(s, 0, r) : s + r = 1, s \geq 0, r \geq 0\}$ do triângulo Γ , as quais tendem para o ponto de equilíbrio da não doença P_0 .

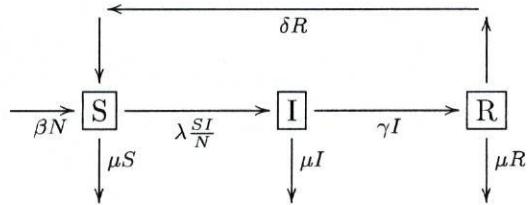
Prova.

Pelo teorema 4.1.2 não existem órbitas periódicas, ciclos homoclínicos ou polígonos de fase orientados em Γ , o que implica que em Γ' não existem órbitas periódicas. Assim, aplicando o teorema de Poincaré-Bendixson ao sistema (4.7) qualquer ω -limite é constituído apenas por um ponto de equilíbrio. O ω -limite de pontos do conjunto $\{(s, 0, r) : s + r = 1, s \geq 0, r \geq 0\}$ é o ponto de equilíbrio da não doença, $P_0 = (1, 0, 0)$. Para os outros pontos de Γ , o seu ω -limite é o ponto de equilíbrio endémico P^* .

4.2 Modelo SIRS sem morte pela doença

Vamos agora estudar em pormenor um submodelo de SIRS em que $\alpha = 0$, ou seja, quando não há morte pela doença. Consideraremos todas as outras hipóteses sobre os parâmetros como na secção anterior.

O modelo pode ser analisado através do seguinte esquema:



As equações diferenciais relativas a este modelo são :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\lambda SI}{N} - \mu S + \beta N + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\lambda SI}{N} - (\mu + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta) R \end{array} \right. \quad (4.17)$$

com as condições

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad R(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+,$$

e a condição adicional

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Temos ainda a seguinte equação diferencial que diz respeito ao tamanho total da população:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu) N, \quad (4.18)$$

que permite de imediato concluir o comportamento da função de $N(t)$ já que temos $N(t) = N_0 e^{t(\beta-\mu)}$. Logo o tamanho total da população pode ser constante, crescer ou decrescer exponencialmente dependendo se $\beta - \mu = 0$, $\beta - \mu > 0$ ou $\beta - \mu < 0$, respectivamente.

As equações diferenciais após a mudança de variáveis $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$ formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda s i - (\beta + \delta) s - \delta i + \beta + \delta \\ \frac{di}{dt} = i(\lambda s - (\beta + \gamma)) \\ \frac{dr}{dt} = (\delta + \beta)(s - 1) + (\delta + \beta + \gamma)i \end{cases}, \quad (4.19)$$

sujeito às restrições $s + i + r = 1$, $s \geq 0$, $i \geq 0$ e $r \geq 0$.

Vamos estudar apenas o sistema constituído pelas duas primeiras equações, sendo a região em análise o triângulo $\Gamma = \{(s, i) : 0 \leq s + i \leq 1, s \geq 0, i \geq 0\}$.

Os pontos de equilíbrio deste sistema são

$$P'_0 = (1, 0),$$

o ponto de equilíbrio da não doença, e o ponto de equilíbrio endémico

$$P'^* = (s_*, i_*) = \left(\frac{\beta + \gamma}{\lambda}, \frac{-\frac{(\beta+\delta)(\beta+\gamma)}{\lambda} + \beta + \delta}{\beta + \gamma + \delta} \right) = \left(\frac{1}{\theta}, \frac{(\beta + \delta)(\theta - 1)}{\lambda + \delta\theta} \right).$$

Este ponto de equilíbrio existe quando $\frac{\beta+\gamma}{\lambda} < 1$, o que é equivalente a $\theta > 1$. Note-se que quando tomamos a igualdade temos o ponto de equilíbrio da não doença. Prova-se ainda que $0 < i_* < 1$, sob a condição $\theta > 1$.

Estabilidade local do ponto de equilíbrio P'_0

Pelo sistema de equações diferenciais temos a seguinte matriz Jacobiana:

$$J(s, i) = \begin{bmatrix} -\lambda i - (\beta + \delta) & -\lambda s - \delta \\ \lambda i & \lambda s - (\beta + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Analisemos agora a matriz Jacobiana para o ponto de equilíbrio da não doença P'_0 :

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} -(\beta + \delta) & -\lambda - \delta \\ 0 & \lambda - (\beta + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Procuramos agora estabelecer a estabilidade local deste ponto de equilíbrio demonstrando que os valores próprios têm parte real negativa.

Trivialmente,

- $-(\beta + \delta) < 0$ e
- $\lambda - (\beta + \gamma) < 0 \Leftrightarrow \theta < 1$.

Notemos que a condição para que o ponto de equilíbrio da não doença seja assimptoticamente estável exclui a presença do equilíbrio endémico P'^* , pois

$$\theta < 1 \Leftrightarrow \lambda < \beta + \gamma \Rightarrow s_* = \frac{\beta + \gamma}{\lambda} > 1.$$

A estabilidade global de P'_0 resulta da aplicação do mesmo método que aplicamos no modelo geral SIRS, com $\alpha = 0$, ou seja, considerar uma função de Lyapunov $L = i$, e estudarmos o maior subconjunto invariante onde $\frac{dL}{dt} = 0$. Ora conclui-se, analogamente ao que foi feito para o modelo geral, que o conjunto onde $\frac{dL}{dt} = 0$ corresponde ao segmento de recta do eixo dos s' s e à recta $s = \frac{1}{\theta}$. Notemos que para $\theta < 1$ esta última região não intersecta a região admissível Γ' , logo analisamos apenas qual o maior subconjunto invariante no conjunto $M = \{(s, 0), s \in]0, 1[\}$ e concluimos que é o ponto de equilíbrio da não doença. Aplicando o teorema de LaSalle (teorema A.4.4), todas as trajectórias do sistema vão-se aproximar de P'_0 . Logo conclui-se a estabilidade global de P'_0 .

Agora vamos provar a estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico P'^* através da sua matriz Jacobiana:

$$J(s_*, i_*) = \begin{bmatrix} -\lambda \frac{(\beta+\delta)(\theta-1)}{\lambda+\delta\theta} - (\beta + \delta) & -(\beta + \gamma + \delta) \\ \lambda \frac{(\beta+\delta)(\theta-1)}{\lambda+\delta\theta} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Procuramos agora estabelecer a estabilidade local através da prova que os valores próprios têm parte real negativa. Basta mostrar que $\text{tr}(J(s_*, i_*))$ tem parte real negativa e que o determinante da mesma matriz tem parte real positiva.

Com efeito,

$$\text{tr}(J(s_*, i_*)) = -\lambda \frac{(\beta + \delta)(\theta - 1)}{\lambda + \delta\theta} - (\beta + \delta) < 0$$

e

$$\det(J(s_*, i_*)) = (\beta + \gamma + \delta) \lambda \frac{(\beta + \delta)(\theta - 1)}{\lambda + \delta\theta} > 0.$$

Desta forma fica provada a estabilidade local de P'^* e portanto do ponto de equilíbrio endémico P^* .

Estabilidade global do ponto de equilíbrio P^*

Se $\sigma > 1$ temos que P_0 é instável (provado anteriormente analisando os valores próprios da matriz Jacobiana).

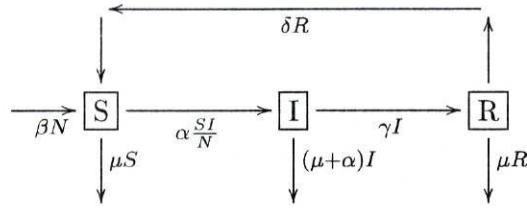
Queremos provar que, se $\theta > 1$ o ponto de equilíbrio P^* é globalmente assintoticamente estável. Ao ponto de equilíbrio P^* em Γ corresponde o ponto de equilíbrio endémico em Γ' .

A estabilidade global é obtida de forma semelhante ao modelo SIRS geral considerado anteriormente, usando o Teorema de Poincaré-Bendixson juntamente com o teorema 4.1.2.

4.3 Modelo SIRS com $\alpha = \lambda$

Vamos agora estudar mais pormenorizadamente o modelo SIRS em que se verifica a condição $\alpha = \lambda$.

O modelo pode ser analisado através do seguinte esquema:



As equações diferenciais deste modelo são :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha SI}{N} - \mu S + \beta N + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\alpha SI}{N} - (\mu + \alpha + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta) R \end{cases} \quad (4.21)$$

com as condições

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad R(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+,$$

e a condição adicional

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Temos ainda a seguinte equação diferencial que diz respeito ao tamanho total da população:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu) N - \alpha I. \quad (4.22)$$

As equações diferenciais depois da mudança de variáveis formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -(\beta + \delta)s - \delta i + \beta + \delta \\ \frac{di}{dt} = i(\alpha s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \\ \frac{dr}{dt} = (\alpha + \beta + \delta + \gamma)i + (\beta + \delta)s - \alpha i s - \alpha i^2 - (\beta + \delta), \end{cases} \quad (4.23)$$

sujeito às restrições $s + i + r = 1$, $s \geq 0$, $i \geq 0$ e $r \geq 0$.

Analizando a equação $\frac{di}{dt} = 0$ verificamos que neste modelo existe apenas

um ponto de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença, $P_0 = (1, 0, 0)$, que advém da condição $i = 0$. Da condição $\alpha s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i = 0$ vem

$$i = \frac{-\alpha s + \beta + \alpha + \gamma}{\alpha} \Leftrightarrow i = -s + 1 + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \Leftrightarrow i + s = 1 + \frac{\beta + \gamma}{\alpha},$$

o que é impossível porque $0 \leq s + i \leq 1$.

Estabilidade do ponto de equilíbrio da não doença

Pelo sistema de equações diferenciais temos a seguinte matriz Jacobiana:

$$J(s, i) = \begin{bmatrix} -(\beta + \delta) & -\delta \\ \alpha i & \alpha s - (\beta + \alpha + \gamma) + 2\alpha i \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Analisemos agora a matriz Jacobiana para o ponto de equilíbrio da não doença $P'_0 = (1, 0)$:

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} -(\beta + \delta) & -\delta \\ 0 & -(\beta + \gamma) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Para que P'_0 seja assintoticamente estável os valores próprios têm que ter parte real negativa.

Temos os seguintes valores próprios $k_1 = -(\beta + \delta) < 0$ e $k_2 = -(\beta + \gamma) < 0$, ou seja, têm sempre parte real negativa. Provamos assim a estabilidade local para quaisquer valor positivo dos parâmetros envolvidos.

Para provar a estabilidade global do equilíbrio da não doença P_0 vamos usar a função de Lyapunov $L = i$:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= i(\alpha s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i) \\ &\leq \alpha s - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i \\ &= \alpha(s + i) - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma)(s + i) - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{>0} \underbrace{(-1 + s + i)}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

já que $0 \leq s \leq 1$ e $0 \leq i \leq 1$.

Vamos agora estudar a região em que $\frac{dL}{dt} = 0$. Ora, esta condição verifica-se se:

$$i = 0 \quad \vee \quad s = \frac{1}{\theta} - i. \quad (4.27)$$

A segunda igualdade já vimos não ser possível.

Para aplicarmos o princípio de invariância de LaSalle vamos encontrar o maior subconjunto invariante em

$$M = \left\{ (s, i) \in \Gamma' : \frac{dL}{dt} = 0 \right\}.$$

Ora, o subconjunto de M em que $\frac{dL}{dt} = 0$ corresponde ao segmento do eixo não negativo dos s 's (que contém o ponto de equilíbrio P'_0 , que corresponde aos pontos de equilíbrio P_0 do sistema (4.23)).

Tomemos um ponto na semi-recta horizontal $i = 0$. Então,

$$\frac{ds}{dt} = -(\beta + \delta)s + \beta + \delta \geq 0$$

e apenas se atinge a igualdade no ponto de equilíbrio $(1, 0)$.

Analogamente

$$\frac{di}{dt} = 0.$$

O maior subconjunto invariante de M é então $\{P'_0\}$. Pelo princípio de invariância de LaSalle (teorema A.4.4) temos que todas as órbitas positivas tendem para P'_0 e, portanto, todas as órbitas positivas de (4.23) tendem para P_0 .

Concluimos assim o carácter estável global do ponto de equilíbrio da não doença P_0 .

4.4 Implicações do modelo

As implicações deste estudo são que o controlo da doença tem de ser feito através do controlo do número de contacto modificado,

$$\theta = \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \gamma},$$

que deve ser menor do que 1 para se poder controlar a epidemia. Isto poderá ser feito de várias formas: diminuir a taxa de contacto λ (por exemplo, através de quarentena ou isolamento); aumentar a taxa de natalidade (nesta perspectiva o controlo da doença será feito para doenças endémicas e supondo que não há transmissão entre mãe e filho, ou seja, não há transmissão vertical); ou, obviamente, aumentar a taxa de recuperação dos indivíduos infectados (através de novos medicamentos, por exemplo).

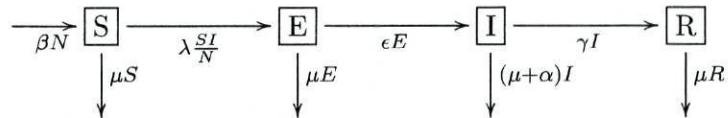
No caso de a doença em estudo não apresentar morte pela doença, ($\alpha = 0$), a situação é a mesma que a descrita anteriormente. Apenas o esforço para fazer diminuir o número de contacto modificado tem de ser feito sem o contributo da taxa de mortalidade da doença.

Capítulo 5

O modelo SEIR

O objectivo principal deste capítulo é analisar a estabilidade de um modelo SEIR, com a análise da estabilidade local e global dos seus dois pontos de equilíbrio, um ponto de equilíbrio da não doença e um ponto de equilíbrio endémico. A estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico é provada sob a hipótese $\alpha < \epsilon$, tal como em [14]. Neste modelo, além do que já foi considerado para o modelo SIRS, consideramos uma classe de indivíduos em que a doença está latente e consideramos ainda que a doença confere imunidade. É o caso, entre outras, das doenças de infância como a varicela, o sarampo, a rubéula, a papeira, a difteria, a poliomielite, a escarlatina e a tosse convulsa.

Tal como já foi visto anteriormente, partindo do modelo geral já definido pode chegar-se ao modelo SEIR. Como hipóteses do modelo consideramos a incidência standard, a inexistência de emigração ($A = 0$) e imunidade passiva, e a existência de morte pela doença ($\alpha > 0$) e dos fenómenos demográficos naturais (morte natural e natalidade). A doença confere ao doente imunidade permanente depois de recuperado ($\delta = 0$). Assim, o diagrama de transferência entre as várias classes é o seguinte:



e temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \beta N - \mu S - \lambda \frac{SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - (\mu + \epsilon) E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu + \alpha + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{array} \right. \quad (5.1)$$

com as condições iniciais:

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0$$

e

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Assim,

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu)N - \alpha I.$$

Façamos as mudanças de variáveis habituais:

$$s = \frac{S}{N} \text{ e analogamente } e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N} \text{ e } r = \frac{R}{N}.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dS}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} s(t) \\ &= -\lambda s i - \mu s + \beta - (\beta - \mu)s + \alpha i s \\ &= (\alpha - \lambda)i s - \beta s + \beta \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dE}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} e(t) \\ &= \lambda s i - (\mu + \epsilon)e - (\beta - \mu)e + \alpha i e \\ &= i(\lambda s + \alpha e) - (\epsilon + \beta)e, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dI}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} i(t) \\ &= \epsilon e - (\mu + \alpha + \gamma)i - (\beta - \mu)i + \alpha i^2 \\ &= \epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dR}{dt} - \frac{dN}{dt} \frac{1}{N(t)} r(t) \\ &= \gamma i - \mu r - (\beta - \mu)r + \alpha i r \\ &= \alpha i r + \gamma i - \beta r \end{aligned} \tag{5.5}$$

Temos assim o novo sistema de equações diferenciais em s , e , i e r fracções da população:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = (\alpha - \lambda)is - \beta s + \beta \\ \frac{de}{dt} = \lambda is - (\epsilon + \beta)e + \alpha ie \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2 \\ \frac{dr}{dt} = \alpha ir + \gamma i - \beta r \end{cases} \quad (5.6)$$

sujeito às restrições

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1, \quad s(t) \geq 0, \quad e(t) \geq 0, \quad i(t) \geq 0 \quad e \quad r(t) \geq 0.$$

Note-se que esta mudança de variáveis fez desaparecer a constante μ , relativa à taxa de mortalidade natural.

Como r não aparece nas três primeiras equações diferenciais vamos considerar apenas as três primeiras equações e obtemos r através da relação $r = 1 - s - e - i$, ou seja, estudamos apenas o sistema

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = (\alpha - \lambda)is - \beta s + \beta \\ \frac{de}{dt} = \lambda is - (\epsilon + \beta)e + \alpha ie \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2 \end{cases} \quad (5.7)$$

que está definido no seguinte conjunto:

$$\Gamma = \{(s, e, i) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq s + e + i \leq 1\}.$$

Provemos agora que Γ é positivamente invariante com respeito ao sistema anterior.

Vamos estudar o comportamento das trajectórias em $\partial\Gamma$, considerando as seguintes condições:

1. $i = 0$.

Temos as seguintes condições:

$$\frac{ds}{dt} = \beta(1 - s) \geq 0;$$

$$\frac{de}{dt} = -(\epsilon + \beta)e \leq 0;$$

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e \geq 0.$$

A igualdade em simultâneo nas três desigualdades acima só é atingida para o ponto de equilíbrio da não doença, $P_0 = (1, 0, 0)$. Estudamos primeiramente o comportamento das órbitas positivas cujo ponto inicial pertence às arestas desta face do tetraedro:

- segmento do eixo dos s' s:

temos

$$\frac{di}{dt} = \frac{de}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = \beta(1 - s) \geq 0$$

logo as órbitas positivas tendem para o ponto de equilíbrio com coordenadas $(s, e, i) = (1, 0, 0)$ e temos que o segmento de recta que está sobre este eixo é positivamente invariante. Note-se que o ponto $(0, 0, 0)$ pertence a este segmento;

- segmento do eixo positivo dos e' s:

no eixo dos e' s temos $\frac{de}{dt} = -(\epsilon + \beta)e \leq 0$ e $\frac{ds}{dt} = \beta \geq 0$ e $\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0$, logo as órbitas positivas entram em Γ , excepto o ponto $(0, 0, 0)$ que pertence à órbita do eixo dos s' s.

- quanto à aresta definida pelas condições $i = 0$ e $s + e = 1$ temos as seguintes desigualdades:

$$\frac{ds}{dt} = \beta(1 - s) = \beta(1 - 1 + e) = \beta e > 0;$$

$$\frac{de}{dt} = -(\epsilon + \beta)e < 0;$$

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0.$$

Notemos que $\frac{de}{dt} + \frac{ds}{dt} < 0$ (excluindo o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0, 0)$, analisado separadamente), o que implica que a órbita não permanece na aresta. Notemos ainda que permanece no plano $s + e + i = 1$ pois $(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}) \cdot (1, 1, 1) = 0$, mas não sai da fronteira de Γ pois $(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}) \cdot (0, 0, 1) = \epsilon e > 0$. Assim, de facto, para um primeiro instante a órbita entra na face $s + e + i = 1$, mas como veremos de seguida, quando atinge o interior da região o campo de vectores aponta para o interior do tetraedro, ou seja, a órbita vai entrar imediatamente no interior de Γ .

Para órbitas positivas cujos pontos iniciais são pontos do interior desta face do tetraedro, a desigualdade $\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0$ implica que as órbitas positivas que começam nesta região entram em Γ .

2. $s = 0$.

Temos as seguintes relações:

$$\frac{ds}{dt} = \beta \geq 0;$$

$$\frac{de}{dt} = -(\epsilon + \beta)e + \alpha ie;$$

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2;$$

Quanto aos pontos no interior desta face, quando supomos $\beta > 0$ a desigualdade estrita $\frac{ds}{dt} = \beta \geq 0$ verifica-se e é suficiente para garantir que as órbitas positivas entram no interior de Γ ; para $\beta = 0$, a face é positivamente invariante.

3. $e = 0$.

Vamos analisar de seguida o caso particular da aresta que corresponde a um segmento no eixo dos i 's (excepto o ponto $(0, 0, 0)$ já analisado):

São verificadas as seguintes relações:

$$\frac{ds}{dt} = \beta \geq 0;$$

$$\frac{de}{dt} = 0;$$

$\frac{di}{dt} = -(\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2 < 0$, e desta forma para pontos deste segmento (excepto para o ponto $(0, 0, 0)$), as órbitas positivas entram no interior da face $e = 0$ do tetraedro.

Em relação aos pontos do interior desta face do tetraedro temos a seguinte equação diferencial:

$\frac{de}{dt} = \lambda s i \geq 0$ pois $0 \leq i \leq 1$. Esta condição é suficiente para que as órbitas positivas que atingem esta região da fronteira regressem ao interior da região Γ .

4. $s + e + i = 1$.

Basta observar que sob esta condição temos que

$$\frac{ds}{dt} + \frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} = -\frac{dr}{dt} = -(\gamma i) \leq 0$$

pois neste plano $r = 1 - (s + e + i) = 0$. Assim,

$$\frac{ds}{dt} + \frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} \leq 0,$$

o que implica que as órbitas positivas dos pontos do interior desta face do tetraedro entram em Γ . Falta apenas analisar as seguintes arestas:

- $s = 0$ e $e + i = 1$.

Com as condições $\frac{ds}{dt} = \beta > 0$ e $(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}) \cdot (0, 1, 1) = -\beta - \gamma i < 0$, concluimos que as órbitas positivas cujos pontos iniciais se situam nesta aresta entram no interior de Γ .

- $e = 0$ e $s + i = 1$.

Com as condições

$$\frac{de}{dt} = \lambda is > 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt} \right) \cdot (1, 0, 1) = -\lambda(1 - i^2) - \gamma i < 0$$

(excepto para o ponto P_0 e o ponto $(0, 0, 1)$, já analisados anteriormente), concluimos que as órbitas positivas cujos pontos iniciais se situam nesta aresta entram no interior de Γ .

Provámos desta forma que o conjunto Γ é positivamente invariante.

Note-se ainda que na fronteira apenas existe o ponto de equilíbrio já referido, $P_0 = (1, 0, 0)$, o ponto de equilíbrio da não doença. Vamos de seguida provar a estabilidade global assintótica deste ponto de equilíbrio.

Lema 5.0.1 *Seja*

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$$

e

$$h(x, y) = (a_1 - b_1)x + (c_1 - b_1)y + b_1.$$

Então, para quaisquer constantes positivas a_1 , b_1 e c_1 :

$$\max_{(x,y) \in \Delta} h(x, y) = \max \{a_1, b_1, c_1\}.$$

Demonstração:

Como h é uma função afim o seu máximo no conjunto fechado Δ é atingido nos pontos críticos da fronteira de $\partial\Delta$. A prova resume-se agora à avaliação de h nos três vértices do triângulo Δ :

$$h(0, 0) = b_1, \quad h(1, 0) = a_1 \quad \text{e} \quad h(0, 1) = c_1,$$

e assim

$$\max_{(x,y) \in \Delta} h(x, y) = \max \{a_1, b_1, c_1\}.$$

Temos agora o seguinte teorema (em que usaremos o lema anterior).

Teorema 5.0.2 *O ponto de equilíbrio de não doença $P_0 = (1, 0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável em Γ se $\theta \leq 1$; é instável se $\theta > 1$ e as soluções do sistema (5.7) que começarem suficientemente perto de P_0 em Γ afastam-se de P_0 excepto aquelas que começam no eixo dos s (que é positivamente invariante) aproximando-se de P_0 ao longo deste eixo.*

Demonstração:

Consideremos a seguinte função de Lyapunov:

$$L = \epsilon e + (\epsilon + \beta)i.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \epsilon \frac{de}{dt} + (\epsilon + \beta) \frac{di}{dt} \\
&= \epsilon [\lambda i s - (\epsilon + \beta)e + \alpha ie] + (\epsilon + \beta) [\epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma)i + \alpha i^2] \\
&= i [\epsilon \lambda s + \epsilon \alpha e - \epsilon(\alpha + \beta + \gamma) - \beta(\alpha + \beta + \gamma) + \epsilon \alpha i + \beta \alpha i] - \epsilon(\epsilon + \beta)e + \epsilon e(\epsilon + \beta) \\
&\leq i [\epsilon \lambda(1 - e - i) + \epsilon \alpha e - \epsilon(\alpha + \beta + \gamma) - \beta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha(\epsilon + \beta)i] \\
&\quad (\text{pois } s = 1 - e - i - r) \\
&= i [\lambda \epsilon - \lambda \epsilon e - \lambda \epsilon i - (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha \epsilon e + \alpha(\epsilon + \beta)i] . \\
&= i [(\alpha \epsilon - \lambda \epsilon) e + (\alpha(\epsilon + \beta) - \lambda \epsilon) i + \lambda \epsilon - (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma)] .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Seja

$$h(e, i) = (\alpha \epsilon - \lambda \epsilon) e + (\alpha(\epsilon + \beta) - \lambda \epsilon) i + \lambda \epsilon.$$

Aplicando o lema 5.0.1 temos

$$\frac{dL}{dt} \leq i [\max \{\alpha \epsilon, \lambda \epsilon, \alpha(\epsilon + \beta)\} - (\epsilon + \beta)(\gamma + \alpha + \beta)].$$

Observemos que o número de contacto é o produto entre o período médio de infecção, a taxa de contacto, o período médio de latência e a taxa a que os expostos se tornam infecciosos. Note-se a desigualdade sob o número de contacto modificado:

$$\begin{aligned}
\theta \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{\lambda \epsilon}{(\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma)} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda \epsilon \leq (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma),
\end{aligned}$$

e a simplificação

$$\begin{aligned}
(\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) &= \epsilon \alpha + \epsilon \beta + \epsilon \gamma + \beta \alpha + \beta^2 + \beta \gamma \\
&= \alpha(\epsilon + \beta) + (\gamma + \beta)(\epsilon + \beta),
\end{aligned}$$

logo temos a condição

$$\alpha(\epsilon + \beta) \leq (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma).$$

Concluimos assim que sob a condição $\theta \leq 1$ temos $\frac{dL}{dt} \leq 0$.

Note-se que a condição

$$\max \{\alpha\epsilon, \lambda\epsilon, \alpha(\epsilon + \beta)\} = (\epsilon + \beta)(\gamma + \alpha + \beta)$$

não é suficiente para que se verifique $\frac{dL}{dt} = 0$.

Então $\frac{dL}{dt} = 0$ se e só se temos uma das seguintes condições:

1. $i = 0$;

ou

2. $\theta = 1$ e $s + e + i = 1 \Leftrightarrow r = 0$ (pois substituimos s por $1 - e - i$ em (5.8)).

Vamos agora encontrar o maior conjunto invariante em $\{(s, e, i) \in \Gamma : \frac{dL}{dt} = 0\}$.

Consideremos a condição $i = 0$, para a qual se observa:

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e \geq 0, \text{ (logo a invariância só se verifica se } e = 0\text{)};$$

$$\text{e } \frac{ds}{dt} = \beta(1 - s) \geq 0, \text{ (logo a invariância só se verifica se } s = 1\text{)}.$$

Concluimos que o maior subconjunto invariante é o ponto de equilíbrio da não doença $P_0 = (1, 0, 0)$.

Vamos agora estudar a invariância do fluxo no conjunto $\theta = 1$ e $s + e + i = 1$. Como foi referido anteriormente, esta última condição implica que $r = 0$ e temos

$$\frac{ds}{dt} + \frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} = -\gamma i < 0.$$

Como $\frac{dr}{dt} = \gamma i$, temos que acrescentar a condição $i = 0$ para que este subconjunto seja invariante. Assim, esta condição resume-se à anterior. O maior subconjunto invariante em $\{(s, e, i) \in \Gamma : \frac{dL}{dt} = 0\}$ é $P_0 = (1, 0, 0)$.

A estabilidade global de P_0 segue agora do princípio de invariância de LaSalle (teorema A.4.4).

Para finalizar a prova mostremos que, se $\theta > 1$ então P_0 é instável.

Para isso reescrevemos $\frac{dL}{dt}$ da seguinte forma

$$\frac{dL}{dt} = i [\epsilon \lambda s - (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha i (\epsilon + \beta) + \epsilon \alpha e]$$

e relembremos que

$$\theta > 1 \Leftrightarrow \lambda\epsilon > (\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma).$$

Assim, sob a condição $\theta > 1$ para toda a vizinhança U de P_0 , podemos tomar um ponto P , com coordenada s arbitrariamente próxima de 1, tal que $\frac{dL}{dt} > 0$. Então P_0 é instável pelo teorema A.3.11.

Observação:

De facto, a prova do teorema mostra que existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $p \in B(P_0, \epsilon) \cap \Gamma \setminus \{P_0\}$ (exceptuando também o eixo dos $s's$) temos $\frac{dL}{dt}(p) > 0$ e portanto a órbita de p sai de $B(P_0, \epsilon)$ em tempo finito.

Provámos assim que todas as soluções que começam perto de P_0 se afastam deste ponto de equilíbrio, à excepção daquelas que começam no eixo dos $s's$, pois já vimos que este eixo é positivamente invariante, e as suas órbitas positivas tendem para este ponto de equilíbrio.

Observação:

O teorema 5.0.2 determina completamente a dinâmica global de (5.7) em Γ para o caso $\theta \leq 1$. A sua implicação epidemiológica é que a fracção de infectados (a soma das fracções de latentes e de infecciosos) da população desaparece com o tempo e a doença extingue-se.

Veremos de seguida que quando $\theta > 1$ a doença persiste e torna-se endémica.

A noção de endemia de uma doença pode ser apreendida através da definição de **persistência uniforme**:

O sistema (5.7) diz-se **uniformemente persistente** se existe uma constante $0 < c < 1$ tal que qualquer solução $(s(t), e(t), i(t))$ com condições iniciais $(s(0), e(0), i(0)) \in \Gamma^\circ$ satisfaz

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} e(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} i(t) \right\} \geq c. \quad (5.9)$$

Se (5.7) é uniformemente persistente quer a fracção dos infecciosos, quer a fracção dos latentes persistem acima de um determinado nível e portanto a doença é endémica. Antes de provarmos a persistência uniforme do fluxo do nosso sistema vamos provar que sob a condição $\theta > 1$, o fluxo relativo a este sistema é dissipativo num dado subconjunto de Γ , segundo a definição A.3.8.

Teorema 5.0.3 *Sob a condição $\theta > 1$, existe $\delta' > 0$ tal que o fluxo deste sistema é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta'] \cap \Gamma^\circ$,*

$$S[\partial\Gamma, \delta'] = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \partial\Gamma) \leq \delta'\}.$$

Prova.

Sob a condição $\theta > 1$, vamos mostrar que existe um compacto $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \delta']$ tal que, para qualquer ponto $y \in S[\partial\Gamma, \delta'] \cap \Gamma^\circ$, existe $t(y) > 0$ tal que para qualquer $t > t(y)$, $\phi(y, t) \in N^\circ$. Foram feitas várias considerações aquando da prova da invariância positiva de Γ que vamos utilizar de seguida. Para cada um dos pontos de $\partial\Gamma$ (excepto a aresta contida no eixo dos $s's$ e a aresta de equações $i = 0$ e $s + e = 1$), o campo de vectores em cada um desses pontos é transversal a $\partial\Gamma$, e aponta para o interior de Γ ; logo as órbitas positivas com início nesses pontos entram imediatamente em Γ° . Desta forma, para cada ponto p neste subconjunto de $\partial\Gamma$, existe $\epsilon(p)$ tal que $B(p, \epsilon(p)) \cap \Gamma$ é ainda um conjunto de pontos tais que o campo de vectores se mantém transversal a $\partial\Gamma$ e aponta para o interior de Γ .

Dada a observação feita logo a seguir à demonstração do teorema 5.0.2, sobre a instabilidade de P_0 , existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer ponto que pertence à região $B(P_0, \epsilon) \cap \Gamma \setminus P_0$ abandona a $\overline{B}(P_0, \epsilon) \cap \Gamma$ em tempo finito.

Seja agora $Q = (1 - \frac{\epsilon}{2}, 0, 0)$. Definimos $B_1 = B(Q, \frac{\epsilon}{4})$ (esta bola aberta está contida em $B(P_0, \epsilon)$). Sabemos ainda que existe $t^* > 0$ tal que $\phi(0, t^*) = Q$, onde 0 representa a origem do referencial. Como ϕ é contínua, $\phi^{-1}(B_1(Q, \frac{\epsilon}{4}) \cap \Gamma)$ é uma vizinhança aberta de 0 em Γ , que denominamos B_0 . Então $(\phi(B_0, t))_{t \in [0, t^*]}$ é uma cobertura aberta do eixo dos $s's$, que é compacto. Logo, para todo o $p \in \bigcup_{t \in [0, t^*]} \phi(B_0, t)$ (que não pertença ao eixo dos $s's$) existe $t(p) > 0$ tal que $F(\phi(t(p), 0))$ é transversal a $\partial\overline{B}(P_0, \epsilon)$ e aponta para fora de $\overline{B}(P_0, \epsilon)$, para o interior de Γ , onde F é o campo de vectores do sistema.

Em relação à aresta definida pelas condições $i = 0$ e $s + e = 1$, aquando da prova da invariância positiva em Γ observámos que dada a condição

$$\left(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt} \right) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

a órbita positiva permanece no plano de equação $s + e + i = 1$. Provámos também que a aresta não é positivamente invariante e que

$$\left(\frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt} \right) \cdot (0, 0, 1) = ee > 0,$$

e portanto a órbita positiva entra no interior da face do tetraedro. Relembrando que no interior da face do tetraedro com condição $s + e + i = 1$, o campo de vectores é transversal à face, e podemos agora concluir que a semi-órbita positiva entra em Γ° . Portanto, para cada ponto p pertencente a esta aresta, existe $\epsilon(p) > 0$ tal que para qualquer ponto q pertencente a

$B(p, \epsilon(p)) \cap \Gamma$ a sua órbita positiva entra em Γ° .

O conjunto de todas as bolas ou vizinhanças de pontos de $\partial\Gamma$ que foram referidas acima constitui uma cobertura aberta de $\partial\Gamma$. Como $\partial\Gamma$ é compacto, existe $\epsilon^* > 0$ tal que qualquer que seja $p \in \partial\Gamma$ existe $q \in \partial\Gamma$, para o qual

$$B(p, \epsilon^*) \subset B(q, \epsilon(q)).$$

Consideremos agora o conjunto compacto $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}]$. Observemos que o campo de vectores avaliado num ponto de $S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}] \cap \Gamma$ é transversal a $\{x \in \Gamma : d(x, \partial\Gamma) = \epsilon^*\}$. Provámos desta forma que existe $\delta' > 0$ tal que o fluxo é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta']$.

Teorema 5.0.4 *O sistema (5.7) é uniformemente persistente em Γ° se e só se $\theta > 1$.*

Prova:

Suponhamos que (5.7) é uniformemente persistente em Γ° e que $\theta \leq 1$. Sob esta condição sobre θ , o ponto de equilíbrio da não doença é globalmente estável. Seja $x_1 \in \Gamma^\circ$. Sabemos que a sua órbita tende para $P_0 = (1, 0, 0)$ e isso implica que

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} e(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} i(t) \right\} = 0, \quad (5.10)$$

o que contraria a hipótese de que o sistema é uniformemente persistente.

Suponhamos agora que $\theta > 1$. Pelo teorema 5.0.3, existe um subconjunto compacto de Γ , $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}]$, positivamente invariante tal que todas as órbitas positivas de $\Gamma \setminus N$ atingem o conjunto

$$H\left[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}\right] \cap \Gamma^\circ = \left\{ x \in \Gamma^\circ : d(x, \partial\Gamma) = \frac{\epsilon^*}{2} \right\}.$$

O campo de vectores é transversal a $H\left[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}\right] \cap \Gamma^\circ$ em cada um dos pontos desse conjunto.

Assim, qualquer solução $(s(t), e(t), i(t))$ com $(s(0), e(0), i(0)) \in \Gamma^\circ$ satisfaz

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} e(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} i(t) \right\} \geq \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad (5.11)$$

e portanto o sistema (5.7) é uniformemente persistente.

Nota: O teorema 5.0.2 e a proposição 5.0.4 estabelecem o *número de contacto modificado* θ como um parâmetro limite; se $\theta \leq 1$ a doença extingue-se, se $\theta > 1$ a doença permanece endémica.

5.1 Existência e unicidade do ponto de equilíbrio endémico P^*

A estabilidade global de P_0 em Γ quando $\theta \leq 1$ exclui a existência de outro ponto de equilíbrio sem ser P_0 .

O estudo de um ponto de equilíbrio endémico é assim restringido ao caso $\theta > 1$.

Atendendo às equações do sistema (5.7), as coordenadas de um ponto de equilíbrio $P^* = (s^*, e^*, i^*)$ em Γ° satisfazem:

$$\beta - \beta s^* - \lambda i^* s^* + \alpha i^* s^* = 0 \quad (5.12)$$

$$\lambda i^* s^* - (\epsilon + \beta) e^* + \alpha i^* e^* = 0 \quad (5.13)$$

$$\epsilon e^* - (\alpha + \beta + \gamma) i^* + \alpha (i^*)^2 = 0 \quad (5.14)$$

e ainda $s^* > 0$, $e^* > 0$ e $i^* > 0$ (condições para a endemia).

Atendendo a que

$$\beta - \beta s - \lambda i s + \alpha i s = 0 \Rightarrow \lambda i s = \beta - \beta s + \alpha i s \quad (5.15)$$

$$\lambda i s - (\epsilon + \beta) e + \alpha i e = 0 \Rightarrow \epsilon e = \lambda i s - \beta e + \alpha i e \quad (5.16)$$

$$\epsilon e - (\alpha + \beta + \gamma) i + \alpha i^2 = 0 \Rightarrow \epsilon e = (\alpha + \beta + \gamma) i - \alpha i^2, \quad (5.17)$$

obtemos

$$\lambda i s - \beta e + \alpha i e - (\alpha + \beta + \gamma) i + \alpha i^2 = 0 \text{ por (5.16) e (5.17)}$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \beta s + \alpha i s) - \beta e + \alpha i e - (\alpha + \beta + \gamma) i + \alpha i^2 = 0 \text{ por (5.15)}$$

$$\Leftrightarrow \beta(1 - s - e - i) - \alpha i(-s + 1 - e - i) = \gamma i,$$

ou seja, para o ponto de equilíbrio endémico $P = (s^*, e^*, i^*)$ temos a condição

$$(\beta - \alpha i^*)(1 - s^* - e^* - i^*) = \gamma i^*.$$

Dado que $0 < i^* < 1$, $\gamma i^* > 0$ e $1 - s^* - e^* - i^* \geq 0$, temos o seguinte intervalo para i :

$$0 < i^* < \min \left\{ 1, \frac{\beta}{\alpha} \right\}. \quad (5.18)$$

Da equação (5.14) temos que

$$e^* = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*)i^*}{\epsilon}. \quad (5.19)$$

Escrevemos agora (5.14) de forma equivalente e usamos (5.19):

$$s^* = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*)(\epsilon + \beta - \alpha i^*)}{\lambda \epsilon}. \quad (5.20)$$

Escrevemos agora (5.13) de forma equivalente

$$\beta - \beta s^* - \lambda i^* s^* + \alpha i^* s^* = 0 \Leftrightarrow s^*(\beta + \lambda i^* - \alpha i^*) = \beta. \quad (5.21)$$

Usando (5.20)

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*)(\epsilon + \beta - \alpha i^*)}{\epsilon \lambda} (\beta + \lambda i^* - \alpha i^*) = \beta \\ \Leftrightarrow & (\alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*)(\epsilon + \beta - \alpha i^*)(\beta + (\lambda - \alpha)i^*) = \beta \epsilon \lambda \\ \Leftrightarrow & (\alpha + \beta + \gamma) \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\alpha + \beta + \gamma}\right) (\epsilon + \beta) \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\epsilon + \beta}\right) \beta \left(1 + \frac{(\lambda - \alpha)i^*}{\beta}\right) = \beta \epsilon \lambda \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\epsilon + \beta}\right) \left(1 + \frac{(\lambda - \alpha)i^*}{\beta}\right) = \frac{\epsilon \lambda}{(\alpha + \beta + \gamma)(\epsilon + \beta)} \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \left(1 - \frac{\alpha i^*}{\epsilon + \beta}\right) \left(1 + \frac{(\lambda - \alpha)i^*}{\beta}\right) = \theta. \end{aligned}$$

Assim, se fizermos

$$g(i) = \left(1 - \frac{\alpha i}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \left(1 - \frac{\alpha i}{\epsilon + \beta}\right) \left(1 + \frac{(\lambda - \alpha)i}{\beta}\right) \quad (5.22)$$

temos

$$g(i^*) = \theta. \quad (5.23)$$

O ponto de equilíbrio endémico $P^* = (s^*, e^*, i^*) \in \Gamma^\circ$ é solução de (5.23).

As três raízes da equação $g(i) = 0$ são:

$$i_1 = \frac{\epsilon + \beta}{\alpha}, \quad i_2 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} \quad e \quad i_3 = -\frac{\beta}{\lambda - \alpha}.$$

Quando $\theta > 1$:

- $i_1 = \frac{\epsilon + \beta}{\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$ ($\epsilon > 0$);
- $i_2 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$ ($\gamma, \alpha > 0$);
- $i_3 = -\frac{\beta}{\lambda - \alpha} < 0$ pois $\lambda - \alpha > 0$

o que implica que nenhuma das três raízes, i_1 , i_2 e i_3 pertence ao intervalo $]0, \frac{\beta}{\alpha}[$.

Vamos agora analisar o comportamento de $g(i)$ nos extremos deste intervalo.

É claro que $g(0) = 1$.

Analizando o valor da função no extremo superior deste intervalo:

- Se $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ temos:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) &= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon + \beta} \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\lambda - \alpha}{\beta} \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - \beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \left(\frac{\epsilon + \beta - \beta}{\epsilon + \beta}\right) \left(\frac{\alpha + \lambda - \alpha}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\gamma + \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{\epsilon}{\epsilon + \beta} \frac{\lambda}{\alpha} = \theta \frac{\gamma + \alpha}{\alpha} > \theta. \end{aligned}$$

- Se $\beta > \alpha$ então

$$\begin{aligned} g(1) &= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon + \beta}\right) \left(1 + \frac{\lambda - \alpha}{\beta}\right) \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{\epsilon + \beta - \alpha}{\epsilon + \beta} \frac{\beta + \lambda - \alpha}{\beta} \\ &= \frac{\gamma + \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{\epsilon + \beta - \alpha}{\epsilon + \beta} \frac{\beta + \lambda - \alpha}{\beta} \\ &\geq \frac{\epsilon \lambda (\gamma + \beta)}{(\alpha + \beta + \gamma)(\epsilon + \beta)\beta} \text{ (pois } \beta > \alpha, \beta - \alpha > 0) \\ &= \theta \frac{\gamma + \beta}{\beta} > \theta. \end{aligned}$$

Como a função $f(i)$ é monótona no referido intervalo, o seu gráfico só vai apresentar um ponto de intersecção com a recta $h(i) = \theta$, e portanto existe e é único o ponto de equilíbrio endémico, tal como se observa na figura 5.1.

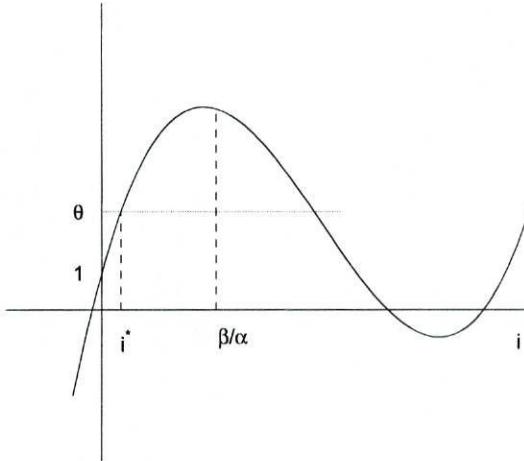


Figura 5.1: Modelo SEIR: existência do ponto de equilíbrio endémico para $\theta > 1$.

5.2 Estabilidade assimptótica local do ponto de equilíbrio endémico P^*

Nesta secção vamos usar o facto de que $\theta > 1 \Rightarrow \lambda > \alpha$.

Para estudar a estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico, começamos por calcular a matriz jacobiana de (5.7) no ponto arbitrário $P = (s, e, i) \in \Gamma$:

$$J(P) = \begin{pmatrix} -\beta - \lambda i + \alpha i & 0 & -\lambda s + \alpha s \\ \lambda i & -(\epsilon + \beta) + \alpha i & \lambda s + \alpha e \\ 0 & \epsilon & -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\alpha i \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Para determinar o carácter estável do ponto de equilíbrio vamos aplicar o mesmo critério do que em [14], já que as condições de Routh-Hurwitz não são fáceis de verificar dado que P^* não está definido explicitamente. Assim, vamos usar os resultados referentes a matrizes compostas aditivas que se encontra na secção A.2.

Já de seguida provemos que, se $\theta > 1$, então o sistema (5.7) tem um único ponto de equilíbrio P^* em Γ° e que P^* é assintoticamente estável, usando o lema A.2.11.

Pela proposição A.2.8 a segunda matriz composta aditiva $J^{[2]}(P)$ da matriz $J(P)$ é:

$$\begin{aligned} J^{[2]}(P) &= \\ &= \begin{pmatrix} -2\beta - \lambda i - \epsilon + 2\alpha i & \lambda s + \alpha e & \lambda s - \alpha s \\ \epsilon & -2\beta - \lambda i - \gamma - \alpha + 3\alpha i & 0 \\ 0 & \lambda i & -2\beta - (\epsilon + \gamma + \alpha) + 3\alpha i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para $P^* = (s^*, e^*, i^*)$ e a matriz diagonal $E = \text{diag}(i^*, e^*, s^*)$ (usando o facto de $s^* \neq 0$, $e^* \neq 0$ e $i^* \neq 0$) temos a seguinte matriz:

$$\begin{aligned} E J^{[2]}(P^*) E^{-1} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2\beta - \lambda i^* - \epsilon + 2\alpha i^* & \frac{(\lambda s^* + \alpha e^*)i^*}{e^*} & \frac{(\lambda s^* - \alpha s^*)i^*}{s^*} \\ \frac{e^*\epsilon}{i^*} & -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* & 0 \\ 0 & \frac{\lambda i^* s^*}{e^*} & -2\beta - (\epsilon + \gamma + \alpha) + 3\alpha i^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz $J^{[2]}(P^*)$ é estável se e só se $E J^{[2]}(P^*) E^{-1}$ é estável porque matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

Para provar a estabilidade de $E J^{[2]}(P^*) E^{-1}$ usamos o teorema A.1.1, relativo aos discos de Geršgorin de uma matriz complexa.

Começamos por definir:

$$G_1 := \left\{ k \in \mathbb{C} : |k - (-2\beta - \lambda i^* - \epsilon + 2\alpha i^*)| \leq \left| \frac{\lambda i^* s^*}{e^*} + \alpha i^* + \lambda i^* - \alpha i^* \right| \right\};$$

$$G_2 := \left\{ k \in \mathbb{C} : |k - (-2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^*)| \leq \left| \frac{\epsilon e^*}{i^*} + 0 \right| \right\} \text{ e}$$

$$G_3 := \left\{ k \in \mathbb{C} : |k - (-2\beta - \epsilon - \gamma - \alpha + 3\alpha i^*)| \leq \left| 0 + \frac{\lambda i^* s^*}{e^*} \right| \right\},$$

e pelo teorema A.1.1 sabemos que os valores próprios pertencem à reunião destes três discos.

Assim, provando que os elementos da diagonal têm parte real negativa e

que estes dominam as linhas, ou seja,

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 |a_{jk}|, \quad j = 1, 2, 3.$$

podemos concluir que os valores próprios de $E J^{[2]}(P^*) E^{-1}$ têm parte real negativa.

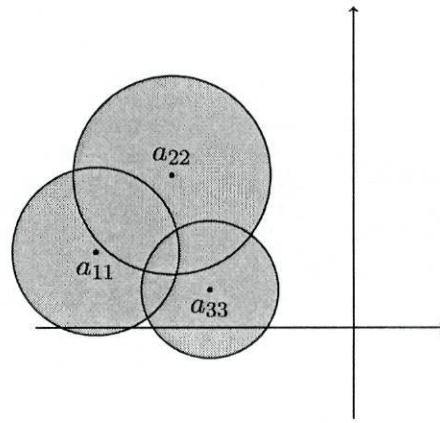


Figura 5.2: Discos de Geršgorin: valores próprios com parte real negativa.

Os elementos d_1 , d_2 e d_3 da diagonal da matriz $E J^{[2]}(P^*) E^{-1}$ são negativos pois, usando a relação $\lambda > \alpha$ e $i < \frac{\beta}{\alpha}$ e $0 < i^* \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} d_1 &= -2\beta - \lambda i^* - \epsilon + 2\alpha i^* \\ &= -2\beta - \lambda i^* + \alpha i^* + \alpha i^* - \epsilon \\ &< -2\beta - \lambda i^* + \frac{\alpha\beta}{\alpha} + \alpha i^* - \epsilon \\ &= -\beta - \lambda i^* + \alpha i^* - \epsilon < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* \\ &= -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + \alpha i^* + 2\alpha i^* \\ &< -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + \alpha i^* + 2\alpha \frac{\beta}{\alpha} \\ &= -\lambda i^* - \gamma - \alpha + \alpha i^* < 0, \end{aligned}$$

$$d_3 = -2\beta - \epsilon - \gamma - \alpha + 3\alpha i^*$$

$$\begin{aligned}
&= -2\beta - \epsilon - \gamma - \alpha + \alpha i^* + 2\alpha i^* \\
&< -2\beta - \epsilon - \gamma - \alpha + \alpha i^* + 2\alpha \frac{\beta}{\alpha} \\
&= -\epsilon - \gamma - \alpha(1 - i^*) < 0.
\end{aligned}$$

Vamos agora provar que os elementos da diagonal dominam as linhas. Note-se que em cada linha os elementos são não negativos com exceção dos elementos da diagonal. Basta provar que a soma dos elementos de cada linha é negativa.

Seja $\mu = \max \{g_1, g_2, g_3\}$ onde

$$\begin{aligned}
g_1 &= -2\beta - \lambda i^* - \epsilon + 2\alpha i^* + \frac{\lambda i^* s^*}{e^*} + \alpha i^* + \lambda i^* - \alpha i^* \\
&= -2\beta - \epsilon + 2\alpha i^* + \frac{\lambda i^* s^*}{e^*}. \\
g_2 &= \frac{\epsilon e^*}{i^*} - 2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* + 0 \\
&= -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* + \frac{\epsilon e^*}{i^*} \\
g_3 &= -2\beta - \epsilon - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* + \frac{\lambda i^* s^*}{e^*}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Assim, g_i é a soma de todos os elementos da i -ésima linha, $i = 1, 2, 3$.

As equações (5.13), (5.14) e (5.14) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{s^*} &= \beta + \lambda i^* - \alpha i^* \\
\frac{\lambda i^* s^*}{e^*} &= (\epsilon + \beta) - \alpha i^* \\
\frac{\epsilon e^*}{i^*} &= \alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Usando as duas últimas relações de (5.27) em (5.26) temos:

$$\begin{aligned}
g_1 &= -2\beta - \epsilon + 2\alpha i^* + \epsilon + \beta - \alpha i^* \\
&= -\beta + \alpha i^* \\
g_2 &= -2\beta - \lambda i^* - \gamma - \alpha + 3\alpha i^* + \alpha + \beta + \gamma - \alpha i^* \\
&= -\beta - \lambda i^* + 2\alpha i^* \\
g_3 &= -2\beta - \epsilon - \alpha - \gamma + 3\alpha i^* + \epsilon + \beta - \alpha i^* \\
&= -\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i^*.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Assim,

$$\mu = \max \{-\beta + \alpha i^*, -\beta - \lambda i^* + 2\alpha i^*, -\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i^*\}.$$

Queremos provar que $\mu < 0$ (usando a desigualdade (5.18) e a relação $\lambda > \alpha$).

De facto:

$$\begin{aligned} -\beta + \alpha i^* &< 0, \quad \text{porque } i^* < \frac{\beta}{\alpha}; \\ -\beta - \lambda i^* + 2\alpha i^* &< -\beta - \frac{\lambda\beta}{\alpha} + 2\frac{\alpha\beta}{\alpha} \\ &= -\beta - \frac{\lambda\beta}{\alpha} + 2\beta \\ &= \beta - \frac{\lambda\beta}{\alpha} + 2\beta \\ &= \beta - \frac{\lambda\beta}{\alpha} \\ &= \beta(1 - \frac{\lambda}{\alpha}) < 0; \\ -\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i^* &< -\beta - \gamma - \alpha + \min\{2\alpha, 2\beta\} \\ &\quad (\text{se } \beta > \alpha \text{ ou } \beta < \alpha \text{ respectivamente}) \\ &< \min\{-\gamma + (\alpha - \beta), -\gamma - (\alpha - \beta)\} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Vamos agora demonstrar que $(-1)^3 \det J(P)$.

Comecemos por mostrar que

$$\frac{\alpha i^*}{\epsilon e^*} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{\lambda s^*} < 1.$$

Temos

$$\alpha < \gamma + \alpha < \gamma + \alpha + \beta - \alpha i^*, \text{ pois } 0 < i^* < \min \left\{ 1, \frac{\beta}{\alpha} \right\}.$$

Usando a terceira condição de (5.27)

$$\frac{\alpha i^*}{\epsilon e^*} = \frac{\alpha}{\epsilon e^*/i^*} = \frac{\alpha}{\gamma + \alpha + \beta - \alpha i^*} < 1. \quad (5.29)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lambda s^* &= \frac{\lambda i^* s^* \epsilon e^*}{e^*} \frac{1}{i^*} \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{(\epsilon + \beta - \alpha i^*) (\alpha + \beta + \gamma - \alpha i^*)}{\epsilon} \text{ por (5.27)} \\
&= \frac{(\epsilon + \beta - \alpha i^*) \alpha + (\epsilon + \beta - \alpha i^*) (\gamma + \beta - \alpha i^*)}{\epsilon} \\
&= \alpha + \frac{(\beta - \alpha i^*) \alpha}{\epsilon} + \frac{(\epsilon + \beta - \alpha i^*) (\gamma + \beta - \alpha i^*)}{\epsilon} \\
&> \alpha, \text{ pois } i^* < \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta - \alpha i^* > 0,
\end{aligned}$$

logo temos

$$\lambda s^* > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda s^*} < 1. \quad (5.30)$$

Assim, usando (5.24) e (5.27) temos

$$\begin{aligned}
\det J(P^*) &= \begin{vmatrix} -\frac{\beta}{s^*} & 0 & \frac{\beta s^* - \beta}{i^*} \\ \lambda i^* & -\frac{\lambda i^* s^*}{e^*} & \lambda s^* + \alpha e^* \\ 0 & \epsilon & -\frac{\epsilon e^*}{i^*} + \alpha i^* \end{vmatrix} \\
&= -\lambda i^* \left(-\epsilon \frac{\beta s^* - \beta}{i^*} \right) - \frac{\lambda i^* s^*}{e^*} \left(-\frac{\beta}{s^*} \left(-\frac{\epsilon e^*}{i^* e^*} + \alpha i^* \right) \right) - (\lambda s^* + \alpha e^*) \left(-\frac{\beta}{s^*} \epsilon \right) \\
&= -\lambda \epsilon \beta (1 - s^*) + \lambda i^* \beta \frac{\alpha i^*}{e^*} - \frac{\lambda i^* \beta \epsilon e^*}{i^* e^*} + \lambda \beta \epsilon + \frac{\beta \alpha e^* \epsilon}{s^*} \\
&= -\lambda \epsilon (1 - s^*) + \lambda \beta i^* \frac{\alpha i^*}{e^*} - \lambda \beta \epsilon + \lambda \beta \epsilon + \frac{\beta \alpha e^*}{s^*} \\
&= -\lambda \epsilon \beta (1 - s^*) + \lambda \beta i^* \frac{\alpha i^*}{e^*} + \frac{\beta \alpha e^*}{s^*} \\
&= -\lambda \beta \epsilon (1 - s^*) + \lambda \beta \epsilon i^* \frac{\alpha i^*}{\epsilon e^*} + \lambda \beta \epsilon e^* \frac{\alpha}{\lambda s^*} \\
&\leq -\lambda \beta \epsilon (1 - s^*) + \lambda \beta \epsilon i^* + \lambda \beta \epsilon e^*, \text{ (por (5.29) e (5.30))} \\
&= -\lambda \beta \epsilon (1 - s^* - i^* - e^*) < 0. \quad (0 < s^* + e^* + i^* < 1)
\end{aligned}$$

Temos assim $(-1)^3 \det(J(P^*)) > 0$.

5.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico P^*

Para provar a estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico começemos por provar que o sistema (5.7) do modelo SEIR (incidência standard) é

competitivo em Γ . Dada a definição de sistema competitivo (A.6.4), para o modelo SEIR que estamos a considerar, vamos escolher a seguinte matriz diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando (5.24), a matriz $D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x) D$ (com os elementos fora da diagonal não positivos) é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} -\beta - \lambda i + \alpha i & 0 & -\lambda s + \alpha s \\ -\lambda i & -(\epsilon + \beta) + \alpha i & -(\lambda s + \alpha e) \\ 0 & -\epsilon & -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\alpha i. \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Assim, quando $\lambda > \alpha$ (o que se verifica quando $\theta > 1$), o sistema inicial (5.7) é competitivo.

O objectivo dos próximos resultados é provar que todas as soluções em Γ° convergem para P^* quando $\theta > 1$, o que em conjunto com a estabilidade local de P^* implicam que P^* é globalmente assintoticamente estável em Γ° . O próximo resultado é consequência imediata do teorema A.6.10.

Teorema 5.3.1 *Suponhamos que $\theta > 1$. Então qualquer conjunto ω -limite não vazio e compacto de (5.7) em Γ° é uma órbita fechada ou o ponto de equilíbrio endémico P^* .*

Prova:

Suponhamos que L é um conjunto ω -limite do sistema inicial (5.7) em Γ° e que este conjunto não contém o ponto de equilíbrio endémico P^* . Então, L não contém mais nenhum, pois o outro ponto de equilíbrio, P_0 , não pertence ao interior de Γ . Pelo teorema A.6.10, isto implica que L é uma órbita periódica.

Suponhamos agora que $P^* \in L$. Como P^* é localmente assintoticamente estável, qualquer órbita que se aproxime suficientemente perto deste ponto de equilíbrio, converge para P^* .

Assim, na ausência de órbitas fechadas em qualquer ω -limite em Γ° , por este teorema todas as órbitas em Γ° convergem para P^* quando $\theta > 1$.

Isto tem como consequência o seguinte resultado:

Corolário 5.3.2 Suponhamos que $\theta > 1$. Então o único ponto de equilíbrio endémico P^* é globalmente assimptoticamente estável em Γ° se (5.7) não tem soluções periódicas não constantes.

A chave para se verificar a estabilidade global de P^* é pôr de lado a existência de soluções periódicas. Isto é conseguido mostrando-se que qualquer solução periódica de (5.7) é assimptoticamente orbitalmente estável com fase assimptótica. Estamos de facto em condições de provar o seguinte resultado.

Proposição 5.3.3 Sob as condições $\alpha \leq \epsilon$ e $\theta > 1$ qualquer solução periódica não constante de (5.7), se existir, é assimptoticamente orbitalmente estável com fase assimptótica.

Prova:

Usando a matriz $J^{[2]}(P)$ calculada em (5.26) podemos escrever o segundo sistema composto aditivo para o sistema (5.7) com respeito à solução $(s(t), e(t), i(t))$ como:

$$\begin{cases} X' = -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i)X + (\lambda s + \alpha e)Y + (\lambda s - \alpha s)Z \\ Y' = \epsilon X - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i)Y \\ Z' = \lambda i Y - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i)Z. \end{cases} \quad (5.32)$$

Consideremos a seguinte norma em \mathbb{R}^3 :

$$\|(X, Y, Z)\| = \sup \{|X|, |Y| + |Z|\}.$$

Definimos de seguida a seguinte função

$$V(X, Y, Z, s, e, i) = \sup \left\{ |X|, \frac{e}{i} \left(|Y| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z| \right) \right\}.$$

Suponhamos que a solução $(s(t), e(t), i(t))$ é periódica de período mínimo $\rho > 0$ e que $(s(0), e(0), i(0)) \in \Gamma^\circ$. Então, porque o fluxo é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta'] \cap \Gamma^\circ$, a sua órbita \mathcal{O} encontra-se a uma distância positiva da fronteira $\partial\Gamma$, o que implica que a função V está bem definida.

Notemos agora que existe uma constante $c > 0$ definida por

$$c = \begin{cases} \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} & \text{se } c^* \geq 1 \\ \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} c^* & \text{se } c^* < 1, \end{cases}$$

onde $c^* = \min \left\{ \frac{e}{i} : (s, e, i) \in \mathcal{O} \right\}$, tal que

$$V(X, Y, Z, s, e, i) \geq c \|(X, Y, Z)\| \quad \forall (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \text{ e } (s, e, i) \in \mathcal{O}. \quad (5.33)$$

Demonstremos agora a desigualdade (5.33).

Temos

$$\begin{aligned}
V(X, Y, Z, s, e, i) &= \sup \left\{ |X|, \frac{e}{i} \left(|Y| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z| \right) \right\} \\
&= \sup \left\{ \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |X| + \frac{\alpha}{\lambda} |X|, \frac{e}{i} \left(|Y| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z| \right) \right\} \\
&\geq \sup \left\{ \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |X|, \frac{e}{i} \left(|Y| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z| \right) \right\} \\
&= \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \sup \left\{ |X|; \frac{e}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha} |Y| + |Z| \right) \right\}
\end{aligned}$$

Agora há dois casos a considerar:

- $c^* \geq 1$. Neste caso

$$\begin{aligned}
V(X, Y, Z, s, e, i) &\geq \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \sup \left\{ |X|; \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha} |Y| + |Z| \right) \right\} \\
&\geq \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \sup \{ |X|; |Y| + |Z| \} \\
&= \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \|(X, Y, Z)\|.
\end{aligned}$$

- $c^* < 1$. Neste caso

$$\begin{aligned}
V(X, Y, Z, s, e, i) &\geq \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} c^* \sup \left\{ |X| \frac{1}{c^*}; \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha} |Y| + |Z| \right) \right\} \\
&\geq \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} c^* \sup \{ |X|; (|Y| + |Z|) \} \\
&= \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} c^* \|(X, Y, Z)\|.
\end{aligned}$$

Seja então $(X(t), Y(t), Z(t))$ a solução de (5.32) e

$$V(t) = (X(t), Y(t), Z(t), s(t), e(t), i(t)).$$

Vamos agora encontrar desigualdades relativas à derivada à direita de $V(t)$, usando desigualdades que dizem respeito a $D_+ |X(t)|$, $D_+ |Y(t)|$ e $D_+ |Z(t)|$. Temos os seguintes resultados:

- Se $X(t) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
D_+ |X(t)| &= -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) X(t) + (\lambda s + \alpha e) Y(t) + (\lambda s - \alpha s) Z(t) \\
&\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) |X(t)| + (\lambda s + \alpha e) |Y(t)| + (\lambda s - \alpha s) |Z(t)|.
\end{aligned}$$

Se $X(t) < 0$:

$$\begin{aligned} D_+ |X(t)| &= -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i)(-X(t)) + (\lambda s + \alpha e)(-Y(t)) + (\lambda s - \alpha s)(-Z(t)) \\ &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i)|X(t)| + (\lambda s + \alpha e)|Y(t)| + (\lambda s - \alpha s)|Z(t)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_+ |X(t)| &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i)|X(t)| + (\lambda s + \alpha e)|Y(t)| + (\lambda s - \alpha s)|Z(t)| \\ &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i)|X(t)| + \left(\frac{\lambda s i}{e} + \alpha i\right)\frac{e}{i}|Y(t)| + (\lambda - \alpha)\frac{s i e}{e i}|Z(t)|. \end{aligned} \quad (5.34)$$

De forma análoga:

- Se $Y(t) \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_+ |Y(t)| &= \epsilon X(t) - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i) Y(t) \\ &\leq \epsilon |X(t)| - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Y(t)|. \end{aligned}$$

Se $Y(t) < 0$:

$$\begin{aligned} D_+ |Y(t)| &= \epsilon(-X(t)) - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i)(-Y(t)) \\ &\leq \epsilon |X(t)| - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Y(t)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$D_+ |Y(t)| \leq \epsilon |X(t)| - (2\beta + \lambda i + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Y(t)|. \quad (5.35)$$

- Por último,

Se $Z(t) \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_+ |Z(t)| &= \lambda i Y(t) - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i) Z(t) \\ &\leq \lambda i |Y(t)| - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Z(t)|. \end{aligned}$$

Se $Z(t) < 0$:

$$\begin{aligned} D_+ |Z(t)| &= \lambda i(-Y(t)) - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i)(-Z(t)) \\ &\leq \lambda i |Y(t)| - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Z(t)|. \end{aligned}$$

Então

$$D_+ |Z(t)| \leq \lambda i |Y(t)| - (2\beta + \epsilon + \gamma + \alpha - 3\alpha i) |Z(t)| \quad (5.36)$$

Usando as desigualdades (5.35) e (5.36), bem como as relações $\alpha \leq \epsilon$ e $i < 1$, temos:

$$\begin{aligned} & D_+ \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) \\ = & \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} \right) \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) + \frac{e}{i} D_+ \left(|Y(t)| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) \\ \leq & \frac{\epsilon e}{i} |X(t)| + \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i \right) \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z(t)| \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Vamos agora considerar as duas possibilidades para $V(t)$:

- $V(t) = |X(t)|$;

Assim, por (5.34),

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &= D_+ |X(t)| \\ &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) |X(t)| + \left(\frac{\lambda s i}{e} + \alpha i \right) \frac{e}{i} |Y(t)| + (\lambda - \alpha) \frac{s i}{e} \frac{e}{i} |Z(t)|. \end{aligned}$$

Pela definição de $V(t)$ temos que $|X(t)| \geq \frac{e}{i} \left(|Y| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z| \right)$, logo

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &= D_+ |X(t)| \\ &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) |X(t)| + \left(\frac{\lambda s i}{e} + \alpha i \right) \frac{e}{i} |Y(t)| + (\lambda - \alpha) \frac{s i}{e} \frac{e}{i} |Z(t)| \\ &= -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) |X(t)| + \frac{\lambda s i}{e} \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) + \frac{e}{i} \alpha i |Y(t)| \\ &\leq -(2\beta + \lambda i + \epsilon - 2\alpha i) |X(t)| + \frac{\lambda s i}{e} |X(t)| + \alpha i |X(t)| \\ &= - \left(2\beta + \lambda i + \epsilon - 3\alpha i - \frac{\lambda s i}{e} \right) |X(t)| \\ &= - \left(2\beta + \lambda i + \epsilon - 3\alpha i - \frac{\lambda s i}{e} \right) V(t). \end{aligned}$$

- $V(t) = \frac{e}{i} (|Y(t)| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z(t)|);$

Assim, por (5.37),

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &= D_+ \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) \\ &\leq \frac{\epsilon e}{i} |X(t)| + \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i \right) \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z(t)| \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Pela definição de $V(t)$ temos que $|X(t)| \leq \frac{e}{i} (|Y| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z|)$, logo

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &\leq \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i + \frac{\epsilon e}{i} \right) \frac{e}{i} \left(|Y(t)| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z(t)| \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i + \frac{\epsilon e}{i} \right) V(t). \end{aligned}$$

Vamos agora definir

$$g_1(t) = -2\beta - \lambda i - \epsilon + 3\alpha i + \frac{\lambda s i}{e}$$

e

$$g_2(t) = \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i + \frac{\epsilon e}{i}.$$

Podemos concluir desta forma que

1. se $V(t) = |X(t)|$ temos $D_+ V(t) \leq g_1(t)V(t);$
2. se $V(t) = \frac{e(t)}{i(t)} (|Y(t)| + \frac{\lambda-\alpha}{\lambda} |Z(t)|)$ temos $D_+ V(t) \leq g_2(t)V(t);$

ou seja, $D_+ V(t) \leq \max \{g_1(t), g_2(t)\} V(t).$

Vamos encontrar o máximo de $\{g_1(t), g_2(t)\}.$

Usamos agora a segunda e a terceira equações do sistema (5.7), reescrevendo-as da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda s i}{e} + \alpha i &= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} + \epsilon + \beta \\ \frac{\epsilon e}{i} + \alpha i &= \frac{1}{i} \frac{di}{dt} + \alpha + \beta + \gamma, \end{aligned}$$

vamos reescrever $g_1(t)$ e $g_2(t)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= -2\beta - \lambda i - \epsilon + 3\alpha i + \frac{\lambda s i}{e} \\
&= -2\beta - \lambda i - \epsilon + 2\alpha i + \frac{1}{e} \frac{de}{dt} + \epsilon + \beta \\
&= -\beta - \lambda i - \epsilon + 2\alpha i + \frac{1}{e} \frac{de}{dt},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i + \frac{\epsilon e}{i} \\
&= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + 2\alpha i + \frac{\epsilon e}{i} \\
&= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - 2\beta - \gamma - \alpha + \alpha i + \frac{1}{i} \frac{di}{dt} + \alpha + \beta + \gamma \\
&= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \beta + \alpha i.
\end{aligned}$$

Podemos então concluir que $g_2 \leq g_1(t)$, pois

$$g_1(t) - g_2(t) = -(\lambda - \alpha)i \leq 0 \text{ pois } \theta > 1.$$

Podemos concluir desta forma que

$$D_+ V(t) \leq \max \{g_1(t), g_2(t)\} V(t) = g_2(t)V(t). \quad (5.39)$$

Reescrevendo a equação (5.5), e para $r > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \gamma i - \beta r + \alpha i r \\
\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} &= \frac{\gamma i}{r} - \beta + \alpha i \\
\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} - \frac{\gamma i}{r} &= -\beta + \alpha i
\end{aligned}$$

valor que substituído em (5.39) nos dá

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \beta + \alpha i \\
&= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} - \frac{\gamma i}{r}.
\end{aligned} \quad (5.40)$$

Dada a periodicidade de $e(t)$ e $r(t)$ e usando esta expressão de $g_2(t)$ podemos encontrar o seguinte resultado:

$$\int_0^\rho g_2(t)dt \leq \log |e(t)|_0^\rho + \log |r(t)|_0^\rho - \int_0^\rho \frac{\gamma i(t)}{r(t)}dt = -\gamma C \quad (5.41)$$

onde $C = \int_0^\rho \frac{i(t)}{r(t)}dt > 0$.

Agora vamos provar que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$.

Por (5.39) temos que $D_+V(t) \leq g_2(t)V(t)$.

Tomemos a igualdade, para uma certa função V^+ :

$$\begin{aligned} DV^+(t) &= g_2(t)V^+(t) \\ \Leftrightarrow V^+(t) &= C_1 e^{\int_0^t g_2(s)ds}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Tomando $t = m\rho + t'$, onde $m \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq t' \leq \rho$ e temos

$$\begin{aligned} V^+(t) &= C_1 e^{\int_0^t g_2(s)ds} \\ &= C_1 e^{m \int_0^\rho g_2(s)ds} e^{\int_0^{t'} g_2(s)ds}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Tomemos agora $M = \max_{t' \in [0, \rho]} e^{\int_0^{t'} g_2(t)dt}$ e usando (5.41) temos

$$V^+(t) \leq C_1 e^{m(-\gamma C)} M,$$

logo,

$$|V^+(t)| \leq |C_1| e^{m(-\gamma C)} M \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0.$$

Podemos concluir então que $V(t) \leq C' |V'(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Por (5.33) temos também $(X(t), Y(t), Z(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Assim, pelo teorema A.3.18, o sistema (5.7) é assintoticamente estável e a solução periódica $(s(t), e(t), i(t))$ é assintoticamente orbitalmente estável com fase assintótica.

Finalmente, o teorema seguinte estabelece a estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico que procurávamos:

Teorema 5.3.4 Suponhamos que $\theta > 1$. Então, o único ponto de equilíbrio endémico P^* do sistema (5.7) é globalmente assimptoticamente estável em Γ° sob a condição $\alpha \leq \epsilon$. Mais do que isso, P^* atrai todas as trajectórias em Γ , excepto aquelas que começam no eixo dos s' s e que convergem para P_0 ao longo deste eixo.

Prova:

Foi provado no início do capítulo que qualquer órbita que comece na fronteira de Γ entra para o interior de Γ , excepto aquelas que começam no eixo dos s' s, porque este eixo é positivamente invariante. O que precisamos de provar é que P^* atrai todos os pontos em Γ° . Seja $U \subset \Gamma^\circ$ o conjunto dos pontos de Γ° que são atraídos por P^* (designado por base de atracção de P^* em Γ°). O resultado fica provado se a condição $\Gamma^\circ \subset U$ se verificar. Suponhamos que $\Gamma^\circ \not\subset U$.

De seguida são feitas algumas observações que são necessárias para esta prova.

- U é um conjunto aberto.

Pela estabilidade local assintótica de P^* existe ϵ_1 tal que a bola

$$B_1 = (P^*, \epsilon_1) \subset U$$

e para o semi-fluxo positivo do sistema, Φ , qualquer que seja o ponto $x \in B_1(P^*, \epsilon_1)$ temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(x, t) = P^*$. Seja $x_1 \in U$, qualquer. Pela definição de U existe $t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que, $\Phi(x_1, t_1) \in B_1$. Tomando ϵ_2 suficientemente pequeno de modo que a bola $B(x_1, \epsilon_2)$ esteja contida em B_1 , temos que $\Phi^{-1}(B(x_1, \epsilon_2), t_1)$ é um aberto pois Φ é contínuo. Logo U é a reunião de uma família de abertos, ou seja, um aberto.

- U é positivamente invariante.

Suponhamos que U não é positivamente invariante. Assim, existe um ponto $x_0 \in U$, qualquer, existe $t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $x_1 = \Phi(x_0, t_1) \in \Gamma \setminus U$.

Temos assim duas hipóteses:

1. $x_1 \in \Gamma^\circ$. Então, porque $x_0 \in U$, a órbita tem de voltar a entrar em U , e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(x, t) = P^*$. Por definição $x_1 \in U$;
2. $x_1 \in \partial\Gamma$. Sabemos que todas as órbitas positivas cujos pontos estão em $\partial\Gamma$ entram para Γ° (excepto o eixo dos s' s). Pelo teorema 5.0.3, existe $\epsilon > 0$ tal que o sistema é dissipativo em $S[\partial\Gamma; \epsilon] \cap \Gamma^\circ$, então não se pode verificar a hipótese $x_1 \in \Gamma^\circ$, pois existe $H[\partial\Gamma; \epsilon]$ tal que o campo de vectores é transversal aos pontos deste conjunto e que aponta para o interior de Γ .

- \bar{U} é positivamente invariante.

Já provámos que U é positivamente invariante. Seja $(x_n)_n$ uma sucessão de pontos de U que converge para $x \in \bar{U}$, qualquer. Pela definição dos elementos de U , $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, t) \in U$, ora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, t) = \Phi(x, t) \in \bar{U},$$

logo \bar{U} é positivamente invariante.

- U^c (complementar de U em Γ°) é positivamente invariante.

Suponhamos que U^c não é positivamente invariante. Então, existe $x_0 \in U^c$ e $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\Phi(x_0, t_0) \in U$, o que é uma contradição, pois, por definição, $x_0 \in U$.

- ∂U é positivamente invariante. ∂U é a intersecção de dois conjuntos positivamente invariantes, uma vez que $\partial U = \bar{U} \cap U^c$.

De facto, suponhamos que $\bar{U} \cap U^c$ não é positivamente invariante. Seja

$$x_1 \in \bar{U} \cap U^c \text{ e } t_1 \in \mathbb{R}^+$$

tal que $\Phi(x_1, t_1) \notin \bar{U} \cap U^c$, ou seja, $\Phi(x_1, t_1) \notin \bar{U}$ ou $\Phi(x_1, t_1) \notin U^c$, o que é um absurdo pois quer \bar{U} , quer U^c são positivamente invariantes.

Dada a hipótese $\Gamma^\circ \not\subseteq U$ podemos concluir que ∂U contém um conjunto ω -limite que está contido em Γ° . Pelo teorema 5.3.1 este ω -limite é um ponto de equilíbrio ou um órbita fechada. No interior de Γ apenas existe o ponto de equilíbrio endémico P^* , mas este está em U° e $U^\circ \cap \partial U = \emptyset$. Pela persistência uniforme (enunciada na proposição 5.0.4) esta órbita permanece a uma distância positiva de $\partial\Gamma$, logo P_0 não pertence a este conjunto ω -limite. Podemos concluir que este ω -limite é uma órbita periódica. Pela proposição 5.3.3 esta órbita periódica é assimptoticamente orbitalmente estável com fase assimptótica. Desta forma existem órbitas em U que tendem para a órbita periódica que pertence a ∂U , o que contraria a definição de U .

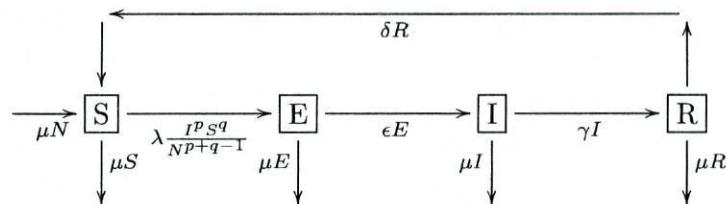
Capítulo 6

O modelo SEIRS não linear

Neste modelo SEIRS consideramos um tipo de incidência não linear e supomos que não há morte pela doença e que a taxa de natalidade e de mortalidade natural são iguais. Todos os outros parâmetros e hipóteses do modelo utilizados são os que foram utilizados anteriormente. É assim um modelo mais simples ao nível dos parâmetros, mas mais complexo no tipo de incidência considerada. Os resultados relativos à estabilidade global do(s) ponto(s) de equilíbrio endémico(s) vão ser apresentados apenas para o modelo SEIR (considerando assim que a doença confere imunidade total).

Vamos analisar neste capítulo a estabilidade dos pontos de equilíbrio em relação aos parâmetros $p > 0$ e $q > 0$, relativos ao tipo de incidência $\frac{\lambda I^p S^q}{N^{p+q-1}}$.

O diagrama de transferência é o seguinte:



As equações diferenciais correspondentes a este modelo são:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \lambda \frac{I^p S^q}{N^{p+q-1}} + \delta R \\ \frac{dE}{dt} = \lambda \frac{I^p S^q}{N^{p+q-1}} - (\mu + \epsilon)E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta)R \end{cases} \quad (6.1)$$

com as condições iniciais:

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0$$

e

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Assim,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0,$$

logo o tamanho da população, N , permanece constante.

Fazemos as seguintes mudanças de variáveis (que correspondem a considerar densidades em vez de quantidades absolutas) que denotam as novas fracções das classes da população:

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N} \quad \text{e} \quad r = \frac{R}{N},$$

e que permite ter a relação $s + e + i + r = 1$ e escrever uma das variáveis à custa das restantes.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dS}{dt} \\ &= -\lambda i^p s^q + \mu - \mu s + \delta r \\ &= -\lambda i^p (1 - e - i - r)^q + \mu - \mu (1 - e - i - r) + \delta r \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dE}{dt} \\ &= \lambda i^p s^q - (\mu + \epsilon) e \\ &= \lambda i^p (1 - e - i - r)^q - (\mu + \epsilon) e \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dI}{dt} \\ &= \epsilon e - (\mu + \gamma) i \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dR}{dt} \\ &= \gamma i - (\delta + \mu) r. \end{aligned} \quad (6.5)$$

O novo sistema de equações diferenciais em s , e , i e r fracções da população é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = -\lambda i^p (1 - e - i - r)^q + \mu - \mu (1 - e - i - r) + \delta r \\ \frac{de}{dt} = \lambda i^p (1 - e - i - r)^q - (\mu + \epsilon) e \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\gamma + \mu) i \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \mu) r \end{array} \right. \quad (6.6)$$

sujeito às restrições

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad \text{e} \quad s(t), e(t), i(t), r(t) \geq 0.$$

Como as equações diferenciais respeitantes a e , i e r estão escritas apenas em função destas três variáveis, considera-se apenas o sistema formado pelas três últimas equações de (6.6), já que o comportamento de s pode ser estudado a partir da relação já referida $s = 1 - e - i - r$.

Consideremos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = \lambda i^p (1 - e - i - r)^q - (\mu + \epsilon)e \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\gamma + \mu)i \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \mu)r \end{cases} \quad (6.7)$$

definido no seguinte compacto:

$$\Gamma = \{(e, i, r) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq e + i + r \leq 1\}.$$

De forma análoga ao que já foi provado anteriormente para outros modelos, vamos provar agora que Γ é positivamente invariante com respeito ao sistema (6.7).

Vamos estudar o comportamento das trajectórias na fronteira de Γ , $\partial\Gamma$, considerando os seguintes casos:

1. $e = 0$.

Temos as seguintes relações:

$$\frac{de}{dt} = \lambda i^p (1 - i - r)^q \geq 0;$$

$$\frac{di}{dt} = -(\gamma + \mu)i \leq 0;$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \mu)r.$$

Atinge-se a igualdade nas três equações se $e = 0$, $i = 0$ e $r = 0$, ou seja, se estivermos na presença do ponto de equilíbrio $P_0 = (0, 0, 0)$.

Na primeira equação atinge-se a igualdade apenas se $i = 0$ (segmento de recta no eixo dos r' s) ou $i + r = 1$ (aresta do tetraedro), que analisaremos de seguida:

- $i = 0$.

Se um ponto está no segmento do eixo dos r' s temos as condições

$$\frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0 \quad e \quad \frac{dr}{dt} = -(\delta + \mu)r < 0,$$

o que implica que estes pontos constituem uma semi-órbita que tende para o ponto de equilíbrio $P_0 = (0, 0, 0)$. Assim, esta aresta é positivamente invariante.

- $i + r = 1$ (aresta do tetraedro).

Para estes pontos temos $\frac{de}{dt} = 0$ (logo as órbitas positivas permanecem no plano $e = 0$), $\frac{di}{dt} = -(\gamma + \mu)i < 0$ (a igualdade só é atingida para o ponto $(0, 0, 1)$ que já foi analisado anteriormente como fazendo parte do eixo dos r' s) e $\frac{dr}{dt} = \gamma i - (\delta + \mu)(1 - i)$. Observando que $\frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = -\mu i - (\delta + \mu)(1 - i) < 0$, concluimos que órbitas positivas permanecem em Γ , mais concretamente na face $e = 0$.

- Analisamos ainda a aresta que está sobre o eixo dos i' s:

As desigualdades correspondentes são:

$$\frac{de}{dt} = \lambda i^p (1 - i)^q \geq 0 \quad e \quad \frac{di}{dt} = -(\gamma + \mu)i \leq 0 \quad e \quad \frac{dr}{dt} = \gamma i \geq 0.$$

Trivialmente, a igualdade nas três expressões só é atingida no ponto de equilíbrio da não doença. Quanto à primeira desigualdade pode atingir a igualdade no ponto $(0, 1, 0)$, em que as condições $\frac{de}{dt} = 0$ e $\frac{de}{dt} + \frac{dr}{dt} < 0$ garantem que as órbitas positivas entrem no interior de Γ .

Para os pontos do interior desta face a desigualdade relativa à primeira equação diferencial implica que as órbitas positivas que intersectam esta região da fronteira entram em Γ° . Isto também implica que para as órbitas positivas que estão sob a aresta de condições $i + r = 1$ e $e = 0$ permanecem na face num primeiro instante, mas imediatamente entram em Γ° .

2. $i = 0$.

Temos as seguintes desigualdades:

$$\frac{de}{dt} = -(\mu + \epsilon)e \leq 0;$$

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e \geq 0;$$

$$\frac{dr}{dt} = -(\delta + \mu)r \leq 0.$$

Vamos analisar em primeiro lugar as arestas com condições $i = 0$ e $e + r = 1$, e o segmento dos e' s:

- $i = 0$ e $e + r = 1$.

Esta aresta não é invariante porque $\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0$ (excepto para o ponto $(0, 0, 1)$, já analisado) e pertence também ao plano de equação $e + i + r = 1$. Notemos ainda que

$$\left(\frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{dr}{dt} \right) \cdot (1, 1, 1) = -\delta(1 - e) - \mu < 0,$$

o que implica que as órbitas positivas entram em Γ° (vamos excluir desta análise o ponto $(1, 0, 0)$, que será analisado posteriormente).

- segmento do eixo dos e' s.

Temos que $\frac{de}{dt} = -(\mu + \epsilon)e \leq 0$, $\frac{di}{dt} = \epsilon e \geq 0$ e $\frac{dr}{dt} = 0$, e juntando a condição $\frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} = -\mu e \leq 0$ (a igualdade nas duas desigualdades é atingida no ponto de equilíbrio da não doença), fica provado que as órbitas positivas entram primeiro na face $r = 0$ que será analisada posteriormente.

No que diz respeito aos pontos do interior desta face do tetraedro a condição $\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0$ implica que entram imediatamente no interior de Γ .

3. $r = 0$.

Temos as seguintes igualdades:

$$\frac{de}{dt} = \lambda i^p (1 - e - i)^q - (\mu + \epsilon) e;$$

$$\frac{di}{dt} = \epsilon e - (\gamma + \mu) i;$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i.$$

Falta apenas analisar a aresta em Γ definida pelas condições $e + i = 1$ e $r = 0$. Neste caso a aresta não é positivamente invariante já que, para esses pontos, $\frac{dr}{dt} = \gamma i = \gamma(1 - e) > 0$ (a não ser para o ponto $(1, 0, 0)$ que já foi analisado por ser ponto da aresta do eixo dos e' s). Temos ainda que $\frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} = -\gamma(1 - e) - \mu < 0$ e $\frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = -\mu < 0$, mas em conjunto com a condição anterior temos que a órbita-positiva de cada um desses pontos entra no interior de Γ .

A condição $\frac{dr}{dt} = \gamma i > 0$ para os pontos no interior desta face assegura que as órbitas positivas entrem no interior de Γ . Voltando ao caso da aresta do eixo dos e' s cujas órbitas positivas entravam na face $r = 0$, sabemos agora que entram também imediatamente no interior de Γ .

4. $e + i + r = 1$.

Observemos que para os pontos do interior desta face,

$$\frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = -\mu e - \mu i - (\delta + \mu)r = -\delta r - \mu < 0,$$

o que implica que esta região da fronteira os pontos entram no interior de Γ .

Ficou assim demonstrado que Γ é positivamente invariante com respeito ao sistema (6.7).

De seguida, iremos analisar os pontos de equilíbrio deste sistema. Chegamos trivialmente à conclusão que $P_0 = (0, 0, 0) \in \Gamma$ é um ponto de equilíbrio desse sistema, o único ponto de equilíbrio na fronteira de Γ .

Para estudarmos a estabilidade local do ponto equilíbrio da não doença, P_0 começemos por estudar os valores próprios da matriz Jacobiana.

No ponto de equilíbrio da não doença temos a seguinte matriz Jacobiana do sistema (6.7) quando $p > 1$:

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -(\epsilon + \mu) & 0 & 0 \\ \epsilon & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \mu) \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Os valores próprios da matriz jacobiana no ponto de equilíbrio da não doença são:

$$k_1 = -(\epsilon + \mu) < 0, \quad k_2 = -(\gamma + \mu) < 0 \quad \text{e} \quad k_3 = -(\delta + \mu) < 0,$$

logo podemos afirmar que P_0 é localmente assintoticamente estável para $p > 1$.

Para $p = 1$, a matriz jacobiana do sistema no ponto de equilíbrio da não doença é:

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -(\epsilon + \mu) & \lambda & 0 \\ \epsilon & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \mu) \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Os valores próprios desta matriz jacobiana são então:

$k_1 = -(\delta + \mu)$ e as duas raízes da seguinte equação em k ,

$$k^2 + ((\mu + \epsilon) + (\gamma + \mu))k - \epsilon\lambda + (\mu + \epsilon)(\gamma + \mu) = 0.$$

Ora, as duas raízes desta equação são:

$$k_2 = \frac{-(\mu + \epsilon) - (\gamma + \mu) - \sqrt{((\mu + \epsilon) + (\gamma + \mu))^2 - 4[-\epsilon\lambda + (\mu + \epsilon)(\gamma + \mu)]}}{2}$$

e

$$k_3 = \frac{-(\mu + \epsilon) - (\gamma + \mu) + \sqrt{((\mu + \epsilon) + (\gamma + \mu))^2 - 4[-\epsilon\lambda + (\mu + \epsilon)(\gamma + \mu)]}}{2}$$

Temos que o radicando envolvido é não negativo, pois:

$$\begin{aligned} & ((\mu + \epsilon) + (\gamma + \mu))^2 - 4[-\epsilon\lambda + (\mu + \epsilon)(\gamma + \mu)] \\ &= (\mu + \epsilon)^2 + (\gamma + \mu)^2 - 2(\mu + \epsilon)(\gamma + \mu) + 4\epsilon\lambda \\ &= [(\mu + \epsilon) - (\gamma + \mu)]^2 + 4\epsilon\lambda \geq 0. \end{aligned}$$

A raiz k_2 é negativa e vamos impor uma condição para que a raiz k_3 também o seja:

$$\begin{aligned} & [(\mu + \epsilon) + (\gamma + \mu)]^2 > [(\mu + \epsilon) - (\gamma + \mu)]^2 + 4\epsilon\lambda \\ & \Leftrightarrow 4(\mu + \epsilon)(\gamma + \mu) > 4\epsilon\lambda \\ & \Leftrightarrow \frac{\epsilon\lambda}{(\mu + \epsilon)(\gamma + \mu)} < 1. \end{aligned}$$

Isto significa que temos a condição $\theta < 1$, onde $\theta = \frac{\epsilon\lambda}{(\mu + \epsilon)(\gamma + \mu)}$ é o número de contacto modificado.

Concluímos assim que sob a condição $p = 1$ e $\theta < 1$, o ponto de equilíbrio da não doença P'_0 é localmente assintoticamente estável.

Para provar a instabilidade no caso $0 < p < 1$ e também no caso $p = 1$ e $\theta > 1$ vamos usar um critério de instabilidade que usa uma função de Lyapunov, a mesma que vai ser depois usada para provar a estabilidade global de P_0 para $p \geq 1$.

Assim, consideraremos a seguinte função de Lyapunov:

$$L = e + \frac{\epsilon + \mu}{\epsilon} i.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{de}{dt} + \frac{\epsilon + \mu}{\epsilon} \frac{di}{dt} \\ &= \lambda i^p (1 - e - i - r)^q - \frac{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)i}{\epsilon} \\ &= \frac{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\epsilon} i [\theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q - 1]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

- Consideremos o caso $0 < p < 1$. Para toda a vizinhança U de P_0 , podemos tomar um ponto P , com coordenada i arbitrariamente pequena, tal que $\frac{dL}{dt}(P) > 0$. Então, pelo teorema A.3.11, temos que P_0 é instável.

Observação:

De facto, a prova do teorema mostra que existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $p \in B(P_0, \epsilon) \cap \Gamma \setminus \{P_0\}$ (exceptuando também o eixo dos r' s), temos $\frac{dL}{dt}(p) > 0$ e, portanto, a órbita de p sai de $B(P_0, \epsilon)$ em tempo finito.

Para $0 < p < 1$ provámos que todas as soluções que começam perto de P_0 se afastam deste ponto de equilíbrio, à excepção daquelas que começam no eixo dos r' s, pois já vimos que este eixo é positivamente invariante e as suas órbitas positivas tendem para este ponto de equilíbrio.

- Para o caso $p = 1$ e $\theta > 1$, a instabilidade de P_0 é provada de forma análoga ao caso $0 < p < 1$, verificando-se também a observação acima.

Para concluir sobre a estabilidade global do ponto de equilíbrio da não doença para $p = 1$, notemos que, quando $\theta \leq 1$ temos que $\frac{dL}{dt} \leq 0$.

Procuremos agora o maior subconjunto invariante de

$$U = \left\{ (e, i, r) \in \Gamma : \frac{dL}{dt} = 0 \right\}.$$

Os elementos de U obedecem a uma das seguintes condições:

$$i = 0 \quad \vee \quad \theta = \frac{1}{(1 - e - i - r)^q}.$$

Assim, a igualdade $\frac{dL}{dt} = 0$ é atingida quando $i = 0$ ou $\theta = 1$ e $e = i = r = 0$.

Vamos agora encontrar o maior subconjunto invariante de U .

Para $i = 0$ temos $\frac{di}{dt} = \epsilon e > 0$ (para $e \neq 0$), logo este conjunto não é invariante. Se $i = 0$ e $e = 0$ temos um subconjunto positivamente invariante, e temos que $r(t) \rightarrow 0$ pois neste subconjunto $\frac{dr}{dt} = -(\delta + \mu)r < 0$. Concluimos que sob a condição $i = 0$ e $e = 0$ temos uma órbita que tende para o ponto de equilíbrio da não doença. Logo o maior subconjunto invariante é $(0, 0, 0)$.

A estabilidade global de P_0 segue do princípio de invariância de LaSalle (teorema A.4.4).

- Em relação ao caso $p > 1$ notemos que

$$\frac{dL}{dt} = \frac{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\epsilon} i [\theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q - 1].$$

Temos então

$$\frac{dL}{dt} \leq 0 \Leftrightarrow \theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q \leq 1.$$

Ora, $\theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q \leq \theta i^{p-1} (1 - i)^q$.

Estudando o comportamento da função

$$g(i) = i^{p-1} (1 - i)^q,$$

para $p > 1$, temos

$$g'(i) = (p-1)i^{p-2}(1-i)^q - q i^{p-1}(1-i)^{q-1}$$

e o máximo de g é atingido quando

$$\begin{aligned} & (p-1)i^{p-2}(1-i)^q - q i^{p-1}(1-i)^{q-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & i^{p-2} [(p-1)(1-i)^q - q i(1-i)^{q-1}] = 0 \\ \Leftrightarrow & i^{p-2} = 0 \vee i = \frac{(1-i)^q(p-1)}{(1-i)^{q-1}q} \\ \Leftrightarrow & i = 0 \quad (\text{para } p > 2) \quad \vee \quad i = \frac{p-1}{p+q-1}. \end{aligned}$$

Avaliando o valor da função g nestes valores de i temos

$$g(0) = 0 \text{ (para } p > 2\text{)} \text{ e } g\left(\frac{p-1}{p+q-1}\right) = \frac{(p-1)^{p-1}q^q}{(p+q-1)^{p+q-1}} = \frac{1}{\theta_1} > 0.$$

Concluímos que a função g atinge o seu máximo, $\frac{1}{\theta_1}$, em $i = \frac{p-1}{p+q-1}$.

Vamos assim acrescentar uma condição, que será suficiente para provar a estabilidade local assimptótica de P_0 no caso $p > 1$. A condição é que

$$\theta < \theta_1, \quad (6.11)$$

onde

$$\theta_1 = \frac{(p+q-1)^{p+q-1}}{(p-1)^{p-1}q^q}.$$

Note-se que

$$\theta_1 = \frac{(p+q-1)^{p+q-1}}{(p-1)^{p-1}q^q} = \frac{(p+q-1)^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} \frac{(p+q-1)^q}{q^q} > 1.$$

Procuremos agora o maior subconjunto invariante de

$$U = \left\{ (e, i, r) \in \Gamma : \frac{dL}{dt} = 0 \right\},$$

ou seja, os pontos (e, i, r) de Γ tais que

$$i = 0 \quad \vee \quad \theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q - 1 = 0.$$

Notemos que sob a condição $\theta < \theta_1$

$$\theta i^{p-1} (1 - e - i - r)^q - 1 \leq \theta g(i) - 1 \leq \frac{\theta}{\theta_1} - 1 < 0,$$

logo não pode ser atingida a igualdade referida acima.

Assim, ficamos apenas com a condição $i = 0$ e o processo para encontrar o maior subconjunto invariante de U é análogo ao já realizado para o caso $p = 1$ e $\theta \leq 1$. Como o maior subconjunto invariante de U é $\{(0, 0, 0)\}$ a sua estabilidade global assimptótica fica provada através do princípio de invariância de LaSalle.

Tal como foi feito no início do capítulo 5 para o modelo SEIR com incidência não linear, veremos que sob a condição $\theta > 1$ e $p = 1$ ou $0 < p < 1$ o sistema (6.7) é uniformemente persistente, ou seja, existe uma constante $0 < c < 1$ tal que qualquer solução $(e(t), i(t), r(t))$ com condições iniciais $(e(0), i(0), r(0)) \in \Gamma^\circ$ satisfaz

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} e(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} i(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} r(t) \right\} \geq c. \quad (6.12)$$

Se (6.7) é uniformemente persistente quer a fracção dos infecciosos, quer a fracção dos latentes persistem acima de um determinado nível e portanto a doença é endémica.

Antes de provarmos a persistência uniforme do fluxo do nosso sistema vamos provar que sob as condições $\theta > 1$ e $p = 1$, ou $0 < p < 1$, o fluxo relativo a este sistema é dissipativo num dado subconjunto de Γ , segundo a definição A.3.8.

Teorema 6.0.5 *Sob as condições $p = 1$ e $\theta > 1$, ou quando $0 < p < 1$, existe $\delta' > 0$ tal que o fluxo deste sistema é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta'] \cap \Gamma^\circ$, onde*

$$S[\partial\Gamma, \delta'] = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \partial\Gamma) \leq \delta'\}.$$

Prova.

A demonstração deste teorema é em tudo análoga à do teorema 5.0.3 relativo ao modelo SEIR com incidência standard, sendo que neste caso há duas arestas do tetraedro Γ em que o campo de vectores não aponta directamente para o interior de Γ , mas para uma das suas faces, exigindo assim um cuidado adicional na análise do comportamento do fluxo do sistema. Para comodidade do leitor apresentamos a prova do teorema com o detalhe semelhante ao que foi feito na prova do teorema 5.0.3.

Sob as condições $p = 1$ e $\theta > 1$, ou quando $0 < p < 1$, vamos mostrar que existe um compacto $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \delta]$ tal que para qualquer ponto $y \in S[\partial\Gamma, \delta] \cap \Gamma^\circ$, existe $t(y) > 0$ tal que para qualquer $t > t(y)$, $\phi(y, t) \in N^\circ$. Foram feitas várias considerações aquando da prova da invariância positiva de Γ , que vamos utilizar de seguida. Para cada um dos pontos de $\partial\Gamma$, excepto a aresta contida no eixo dos r 's e as arestas de equações

$$\begin{cases} i + r = 1 \\ e = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} i = 0 \\ r = 0 \end{cases},$$

o campo de vectores em cada um desses pontos é transversal a $\partial\Gamma$ e aponta para o interior de Γ ; logo as órbitas positivas com início nesses pontos entram imediatamente em Γ° . Desta forma, para cada ponto p neste subconjunto de $\partial\Gamma$, existe $\epsilon(p)$ tal que $B(p, \epsilon(p)) \cap \Gamma$ é ainda um conjunto de pontos tais que o campo de vectores se mantém transversal a $\partial\Gamma$ e aponta para o interior de Γ .

Dadas as observações anteriormente feitas sobre a instabilidade de P_0 sob as condições $p = 1$ e $\theta > 1$, ou quando $0 < p < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer ponto que pertence à região $B(P_0, \epsilon) \cap \Gamma \setminus P_0$ abandona a $\overline{B}(P_0, \epsilon) \cap \Gamma$ em tempo finito.

Seja agora $Q = (0, 0, \frac{\epsilon}{2})$. Definimos $B_1 = B(Q, \frac{\epsilon}{4})$ (esta bola aberta está contida em $B(P_0, \epsilon)$). Tomemos $P_1 = (0, 0, 1)$. Sabemos ainda que existe $t^* > 0$ tal que $\phi(P_1, t^*) = Q$. Como ϕ é contínua, $\phi^{-1}(B_1(Q, \frac{\epsilon}{4}) \cap \Gamma)$ é uma vizinhança aberta de P_1 em Γ , que denominamos B_0 . Então, $(\phi(t, B_0))_{t \in [0, t^*]}$ é uma cobertura aberta do eixo dos r' s, que é compacto. Logo, para todo o $p \in \bigcup_{t \in [0, t^*]} \phi(B_0, t)$ existe $t(p) > 0$ tal que $F(\phi(P_1, t(p)))$ é transversal a $\partial\overline{B}(P_0, \epsilon)$ e aponta para fora de $\overline{B}(P_0, \epsilon)$, para o interior de Γ , onde F é o campo de vectores do sistema.

Em relação à aresta definida pelas condições $e = 0$ e $i + r = 1$, aquando da prova da invariância positiva em Γ observámos que dada a condição $\frac{de}{dt} = 0$ a órbita positiva permanece na face de Γ de equação $e = 0$. Provámos também que a aresta não é positivamente invariante pois

$$\frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} < 0.$$

Portanto, a órbita positiva entra no interior da face do tetraedro. Relembrando que no interior da face do tetraedro com condição $e = 0$ o campo de vectores é transversal à face, podemos agora concluir que a semi-órbita positiva entra em Γ° . Portanto, para cada ponto p pertencente a esta aresta, existe $\epsilon(p) > 0$ tal que para qualquer ponto q pertencente a $B(p, \epsilon(p)) \cap \Gamma$ a sua órbita positiva entra em Γ° .

Analizamos agora de forma análoga a aresta definida pelas condições $i = 0$ e $r = 0$. Já tínhamos observado que a órbita positiva permanece na face de equação $r = 0$. Provámos também que a aresta não é positivamente invariante pois

$$\frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} < 0,$$

e portanto a semi-órbita positiva entra no interior da face do tetraedro. No interior da face do tetraedro com condição $r = 0$, o campo de vectores é

transversal à face e podemos agora concluir que a semi-órbita positiva entra em Γ° . Portanto, para cada ponto p pertencente a esta aresta, existe $\epsilon(p) > 0$ tal que para qualquer ponto q pertencente a $B(p, \epsilon(p)) \cap \Gamma$ a sua órbita positiva entra em Γ° .

O conjunto de todas as bolas ou vizinhanças de pontos de $\partial\Gamma$ que foram referidas acima constitui uma cobertura aberta de $\partial\Gamma$. Como $\partial\Gamma$ é compacto, existe $\epsilon^* > 0$ tal que qualquer que seja $p \in \partial\Gamma$ existe $q \in \partial\Gamma$, para o qual

$$B(p, \epsilon^*) \subset B(q, \epsilon(q)).$$

Consideremos agora o conjunto compacto $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}]$. Observemos que o campo de vectores avaliado num ponto de $S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}] \cap \Gamma$ é transversal a $\{x \in \Gamma : d(x, \partial\Gamma) = \epsilon^*\}$. Provámos desta forma que existe $\delta' > 0$ tal que o fluxo é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta']$.

Teorema 6.0.6 *Suponhamos que $p = 1$ e $\theta > 1$ ou $0 < p < 1$. Então o sistema (6.7) é uniformemente persistente em Γ° .*

Prova:

Suponhamos que $p = 1$ e $\theta > 1$ ou $0 < p < 1$. Pelo teorema 6.0.5, existe um subconjunto compacto de Γ , $N = \Gamma \setminus S[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}]$, positivamente invariante tal que todas as órbitas positivas de $\Gamma \setminus N$ atingem o conjunto

$$H\left[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}\right] \cap \Gamma^\circ = \left\{x \in \Gamma^\circ : d(x, \partial\Gamma) = \frac{\epsilon^*}{2}\right\}.$$

O campo de vectores é transversal a $H\left[\partial\Gamma; \frac{\epsilon^*}{2}\right] \cap \Gamma^\circ$ em cada um dos pontos desse conjunto.

Assim, qualquer solução $(e(t), i(t), r(t))$ com $(e(0), i(0), r(0)) \in \Gamma^\circ$ satisfaz

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} e(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} i(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} r(t) \right\} \geq \frac{\epsilon^*}{2} > 0, \quad (6.13)$$

e portanto o sistema (6.7) é uniformemente persistente.

6.1 Existência de pontos de equilíbrio endémicos

Agora procuremos outros pontos de equilíbrio distintos do ponto de equilíbrio da não doença.

A existência de pontos de equilíbrio endémicos pressupõe o conceito de **persistência uniforme**, que já foi referido anteriormente.

Usando as equações (6.4) e (6.5) temos que as coordenadas de um ponto de equilíbrio $P^* = (e^*, i^*, r^*)$ em Γ satisfazem:

$$e = \frac{(\gamma + \mu)i}{\epsilon} \quad (6.14)$$

e

$$r = \frac{\gamma i}{\delta + \mu}. \quad (6.15)$$

De notar que estas condições implicam que se houvesse um ponto de equilíbrio com a condição $i = 0$, $e = 0$ ou $r = 0$, estaríamos na presença do ponto de equilíbrio da não doença.

Acrescentamos ainda a condição referente a (6.3)

$$\lambda i^p (1 - e - i - r)^q = (\epsilon + \mu)e,$$

que implica, usando (6.14) e (6.15) e a hipótese de que $i \neq 0$,

$$i^{p-1} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^q = \frac{1}{\theta}, \quad (6.16)$$

onde

$$H = \frac{\epsilon(\delta + \mu)}{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \epsilon) + \epsilon\gamma}. \quad (6.17)$$

Note-se que H verifica sempre a condição $H < 1$ e como $s = 1 - e - i - r$, temos que $0 \leq 1 - \frac{i}{H} \leq 1$, de onde se conclui que $0 < i \leq H < 1$.

Vamos denotar por f a função definida em $]0, H]$ por:

$$f(i) = i^{p-1} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^q$$

e estudar a existência dos pontos de equilíbrio endémicos do sistema analisando os pontos de intersecção do gráfico de f com a recta

$$l(i) = \frac{1}{\theta},$$

apenas quando $0 < i \leq H$.

Observação:

Comparando a condição deste modelo (6.16) que um ponto de equilíbrio deve satisfazer com a correspondente no modelo SEIR (com incidência standard),

(5.23), verifica-se que elas são equivalentes quando se fazem as devidas restrições aos modelos de forma a torná-los compatíveis.

Com efeito, no presente modelo toma-se $p = q = 1$, $\delta = 0$ e temos:

$$f(i) = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow 1 - \frac{i}{H} = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow i = (\theta - 1) \frac{H}{\theta}.$$

Para o modelo SEIR com incidência standard e as condições $\beta = \mu$ e $\alpha = 0$, a situação é a seguinte:

$$g(i) = \theta \Leftrightarrow 1 + \frac{\lambda}{\beta} i = \theta \Leftrightarrow i = \frac{\beta}{\lambda} (\theta - 1) \Leftrightarrow i = \frac{\mu}{\lambda} (\theta - 1).$$

Considerando as restrições apresentadas temos então em ambos os modelos

$$\theta = \frac{\epsilon\lambda}{(\epsilon + \beta)(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\epsilon\lambda}{(\mu + \gamma)(\epsilon + \mu)},$$

ficando apenas por provar que $\frac{H}{\theta} = \frac{\mu}{\lambda}$, o que é verdade porque

$$\frac{H}{\theta} = \frac{\epsilon\mu}{\mu(\gamma + \mu + \epsilon) + \epsilon\gamma} \frac{(\mu + \gamma)(\epsilon + \mu)}{\epsilon\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Voltando à análise dos pontos de equilíbrio endémico notemos que, para valores apropriados de p :

$$\begin{aligned} f'(i) &= (p-1)i^{p-2} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^q - \frac{q}{H} i^{p-1} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^{q-1} \\ &= i^{p-2} \left((p-1) \left(1 - \frac{i}{H}\right)^q - \frac{qi}{H} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^{q-1} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vamos analisar esta situação para os vários valores de p :

- Quando $0 < p < 1$ a função $f(i)$ tem um zero para $i = H$ e temos ainda que $\lim_{i \rightarrow 0} f(i) = \lim_{i \rightarrow 0} i^{p-1} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^q = \infty$ e $f'(i) < 0$ no intervalo considerado. Logo, existe um e só um ponto de equilíbrio endémico, e quando p se aproxima de 1 à esquerda temos que o ponto de equilíbrio endémico se aproxima do ponto de equilíbrio da não doença.
- Quando $p = 1$, temos que

$$f'(i) = -\frac{q}{H} \left(1 - \frac{i}{H}\right)^{q-1} < 0 \quad \forall i \in]0, H[,$$

ou seja, f é monótona decrescente, com ordenada na origem 1 e apenas um zero, em H . Assim, se $\theta \leq 1$, não existe nenhum ponto de equilíbrio endémico; e se $\theta > 1$ há um ponto de equilíbrio endémico que se aproxima do ponto de equilíbrio da não doença quando fazemos $\theta \rightarrow 1$.

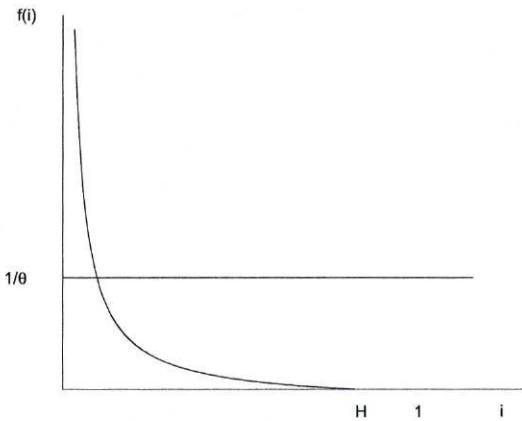


Figura 6.1: Modelo SEIRS não linear: existência de ponto de equilíbrio endémico para $0 < p < 1$.

- Sob a condição $p > 1$ observemos que $f(i)$ toma o seu máximo para $i = \frac{H(p-1)}{p+q-1}$, que está no intervalo $]0, H[$. A função f tem também um ponto crítico em $i = 0$ para $p > 2$.

Com efeito,

$$f'(i) = 0 \Rightarrow i = \frac{H(p-1)}{p+q-1},$$

a que corresponde um valor máximo de $\frac{H^{p-1}(p-1)^{p-1}q^q}{(p+q-1)^{p+q-1}} = \frac{1}{\theta^*} > 0$.

Assim, quando $p > 1$, podem existir dois, um ou nenhum ponto de equilíbrio endémico, dependendo respectivamente das condições $\theta > \theta^*$, $\theta = \theta^*$ e $\theta < \theta^*$, em que

$$\theta^* = \frac{\left(\frac{1}{H}\right)^{p-1} (p+q-1)^{p+q-1}}{(p-1)^{p-1} q^q}. \quad (6.19)$$

Logo, o número de pontos de equilíbrio endémicos vai depender da relação entre θ e θ^* , como se mostra na figura 6.3. O valor i para o máximo da função $f(i)$ é atingido em $i_{max} = \frac{H(p-1)}{p+q-1}$ e temos ainda que $\theta^* \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow 1^+$.

Note-se que a condição usada na prova da estabilidade global de P_0 era que $\theta < \theta_1$. Temos ainda que $\theta^* = \frac{\theta_1}{H^{p-1}} > \theta_1$.

Relacionando a existência de pontos de equilíbrio endémicos com a estabilidade de P_0 , o ponto de equilíbrio da não doença, acabámos de provar o seguinte teorema:

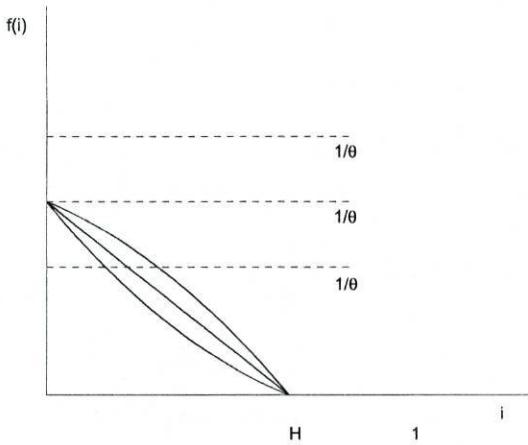


Figura 6.2: Modelo SEIRS não linear: existência de ponto de equilíbrio endémico para $p = 1$, dadas várias possibilidades para $f(i)$.

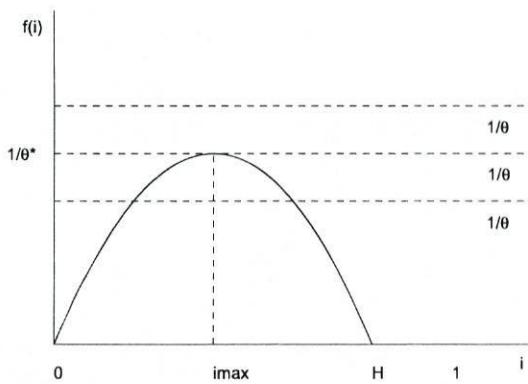


Figura 6.3: Modelo SEIRS não linear: existência de ponto(s) de equilíbrio endémico(s) para $p > 1$.

Teorema 6.1.1 *Sob a condição $p > 1$, relativamente ao sistema (6.7) temos os seguintes resultados:*

- se $\theta < \theta_1 < \theta^*$ não há pontos de equilíbrio endémicos e o ponto de equilíbrio P_0 é globalmente assintoticamente estável;
- se $\theta_1 < \theta < \theta^*$ não há pontos de equilíbrio endémicos e o ponto de equilíbrio P_0 é localmente assintoticamente estável;
- se $\theta_1 < \theta = \theta^*$ há um ponto de equilíbrio endémico e o ponto de equilíbrio P_0 é localmente assintoticamente estável;
- se $\theta_1 < \theta^* < \theta$ há dois pontos de equilíbrio endémicos e o ponto de equilíbrio P_0 é localmente assintoticamente estável.

6.2 Estabilidade assintótica local dos pontos de equilíbrio endémicos

Usando (6.14), (6.15) e (6.16) de modo a simplificar as expressões, a matriz jacobiana de (6.7) num ponto de equilíbrio endémico $P = (e, i, r) \in \Gamma$ é:

$$J(e, i, r) = \begin{bmatrix} -(bHy + \epsilon + \mu) & bp - bHy & -bHy \\ \epsilon & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \mu) \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

onde

$$y = \frac{q \frac{i}{H}}{1 - \frac{i}{H}} \quad (6.21)$$

e

$$b = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\epsilon}. \quad (6.22)$$

Neste caso vamos aplicar o critério de Routh-Hurwitz para obter as condições necessárias e suficientes para a estabilidade local assintótica de um ponto de equilíbrio endémico. Consideremos a equação característica da matriz jacobiana escrita da seguinte forma:

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0, \quad (6.23)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= bHy + \epsilon + 3\mu + \delta + \gamma \\ a_2 &= (\epsilon + \gamma + \delta + 2\mu)bHy + (\delta + \mu)(\epsilon + \gamma + 2\mu) - (\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)(p - 1) \\ a_3 &= -(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)(\delta + \mu)(p - 1 - y). \end{aligned}$$

Temos assim as seguintes condições de Routh-Hurwitz para a estabilidade assintótica local:

1. $D_0 = a_3 > 0$;
2. $D_1 = a_1 > 0$;
3. $D_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Notemos ainda que D_2 pode ser escrito como função de bHy da seguinte forma:

$$D_2 = D_2(y) = c_2(bHy)^2 + c_1(bHy) + c_0, \quad (6.24)$$

em que

$$\begin{aligned}
c_2 &= \epsilon + \gamma + \delta + 2\mu > 0 \\
c_1 &= (\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)(1 - p) + C_1 \\
c_0 &= (\epsilon + \gamma + 2\mu)(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)(1 - p) + (\delta + \mu)(\gamma + \epsilon + 2\mu)(\epsilon + \gamma + \delta + 3\mu).
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \gamma\epsilon + 2\delta\epsilon + 5\mu\epsilon + 2\delta\gamma + 5\mu\gamma + 6\mu\delta + 7\mu^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2$.

Como $c_2 > 0$, a representação gráfica desta função quadrática tem a concavidade voltada para cima.

Para concluirmos a estabilidade do(s) ponto(s) de equilíbrio endémico(s) temos que analisar cada uma das condições anteriores, para os vários valores de p .

Assim, quanto ao coeficiente $D_1 = a_1$, temos

$$D_1 = a_1 = \epsilon + \gamma + \delta + 3\mu + bHy > 0.$$

Logo esta condição é sempre verificada para qualquer valor de p .

Vamos agora analisar os valores de D_0 e D_2 para os vários valores de p .

- Quando $0 < p < 1$ ou quando $p = 1$ e $\theta > 1$ temos que $D_0 = a_3 > 0$.

Em relação a D_2 , os coeficientes c_2 , c_1 e c_0 são positivos, logo temos $D_2 > 0$, e o ponto de equilíbrio endémico existente é localmente assintoticamente estável.

- Quando $p > 1$, relembrmos que existem três hipóteses diferentes quanto ao número de pontos de equilíbrio endémicos. A estabilidade dos pontos de equilíbrio endémicos vai ser agora estudada em relação a cada uma destas hipóteses.

Quando $\theta < \theta^*$ não existe nenhum ponto de equilibrio endémico.

Quando $\theta = \theta^*$ existe um ponto de equilibrio endémico, e

$$D_0 = a_3 = -\det(J) = 0,$$

pois o ponto de equilíbrio tem coordenada $i = i_{max} = \frac{H(p-1)}{p+q-1}$ e isto implica que $y = p-1$. Logo, o ponto de equilíbrio endémico é instável.

Quando $\theta > \theta_*$ existem dois pontos de equilibrio endémicos, que vamos designar por P_1 e P_2 , sendo o primeiro ponto de equilíbrio aquele que

tem menor valor em i , i_1 , e o segundo ponto de equilíbrio o que tem maior valor, i_2 , respectivamente. Notemos que $i_1 < i_{max}$ e $i_2 > i_{max}$.

Podemos concluir ainda que quando $\theta > \theta^*$, P_1 é instável pois no intervalo $[0, H[$, $y(i)$ é uma função crescente de i . Também já referimos que em i_{max} temos $y = p - 1$ e $D_0 = a_3 = 0$. Assim, para $i < i_{max}$ temos $D_0 < 0$, o que implica que P_1 é instável. Caso contrário temos $D_0 = a_3 > 0$. Falta assim estudar a última condição para concluir a estabilidade do ponto de equilíbrio P_2 .

Falta então perceber como se comporta $D_2 = a_1 a_2 - a_3$ para P_2 .

Vamos notar que

$$\begin{aligned} c_0 &= [C_1 - B + (\delta + \mu)(\epsilon + \gamma + \delta + 3\mu)](\epsilon + \gamma + 2\mu) \\ &= (c_1 + F)(\epsilon + \gamma + 2\mu), \end{aligned}$$

e que

$$F = -(\epsilon + \mu)^2 - (\gamma + \mu)^2 - (\epsilon + \mu)(\gamma + \mu) - (\delta + \mu)(\epsilon + \mu) - (\delta + \mu)(\gamma + \mu) + \mu^2 < 0.$$

Vamos de seguida analisar o comportamento de D_2 em relação ao sinal de c_0 .

Se $c_0 \geq 0$ então $c_1 \geq -F \geq 0$ e como $c_2 > 0$, temos $D_2(y) \geq c_0$ para todo o $y \in]0, \infty[$ e então $D_2(y) > 0$ para todo o $y > p - 1$. Logo, tomando y_2^* como o valor de y correspondente ao ponto P_2 temos $y_2^* > p - 1$.

Note-se agora que

$$c_0 \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 1 + \frac{(\delta + \mu)(\epsilon + \gamma + \delta + 3\mu)}{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}. \quad (6.25)$$

Vamos denotar a quantidade do lado direito de (6.25) por p_1 . Assim concluímos a estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio endémico P_2 quando $1 < p \leq p_1$.

Se $c_0 < 0$ então $D_2(0) < 0$ e $D_2(y)$ tem uma raíz negativa, y_1 , e outra positiva $y_2 = \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2bHc_2}$.

Assim, concluímos que o ponto de equilíbrio P_2 é localmente assimptoticamente estável se $y_2(p) \leq p - 1$. Desta forma, tomando $p_2 = 1 + y_2$, garantimos a estabilidade deste ponto de equilíbrio endémico para $p \geq p_2$.

Demonstrámos assim o seguinte teorema:

Teorema 6.2.1 *Sejam*

$$H = \frac{\epsilon(\delta + \mu)}{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \epsilon) + \epsilon\gamma},$$

e

$$\theta^* = \frac{\left(\frac{1}{H}\right)^{p-1} (p+q-1)^{p+q-1}}{(p-1)^{p-1} q^q}.$$

Suponhamos que $\theta > \theta^*$ e $p > 1$. Então,

1. O sistema (6.7) possui dois pontos de equilíbrio endémicos, P_1 e P_2 , um dos quais, digamos P_1 , é instável;

2. Sejam

$$p_1 = 1 + \frac{(\delta + \mu)(\epsilon + \gamma + \delta + 3\mu)}{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu)} \quad \text{e} \quad p_2 = 1 + y_2,$$

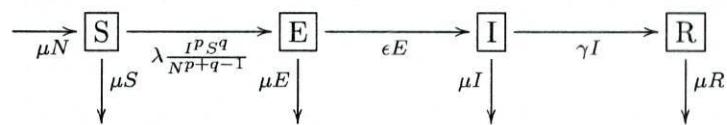
onde y_2 é a raiz positiva de (6.24) quando $p > p_1$. Então, se $p \leq p_1$ ou $p \geq p_2 > p_1$, o ponto de equilíbrio endémico P_2 é assintoticamente estável.

6.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico P^* para $\delta = 0$

Nesta secção vamos definir um novo sistema de equações já que introduzimos uma restrição, $\delta = 0$ (o modelo considerado torna-se um modelo SEIR), mantendo todas as outras hipóteses do modelo SEIRS que tínhamos considerado.

De forma análoga à secção 5.3, vamos provar para $0 < p < 1$ e também para $p = 1$ e $\theta > 1$ a estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico.

O diagrama de transferência é o seguinte:



O sistema equações diferenciais correspondentes a este modelo são:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \lambda \frac{I^p S^q}{N^{p+q-1}} \\ \frac{dE}{dt} = \lambda \frac{I^p S^q}{N^{p+q-1}} - (\mu + \epsilon) E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu + \gamma) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (6.26)$$

com as condições iniciais:

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0 \quad e \quad R(0) = R_0 \geq 0$$

$$\text{e} \quad S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Assim, o tamanho da população, N , permanece constante, tal como no modelo SEIRS já considerado neste capítulo.

Fazendo as mudanças de variáveis adequadas temos as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dS}{dt} \\ &= -\lambda i^p s^q + \mu - \mu s \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dE}{dt} \\ &= \lambda i^p s^q - (\mu + \epsilon) e \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dI}{dt} \\ &= \epsilon e - (\gamma + \mu) i \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{N} \frac{dR}{dt} \\ &= \gamma i - \mu r. \end{aligned}$$

Temos assim o novo sistema de equações diferenciais em s , e , i e r , fracções da população:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda i^p s^q + \mu - \mu s \\ \frac{de}{dt} = \lambda i^p s^q - (\mu + \epsilon) e \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\gamma + \mu) i \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \end{cases} \quad (6.27)$$

sujeito às restrições

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad \text{e} \quad s(t), e(t), i(t), r(t) \geq 0.$$

Assim, podemos considerar apenas o seguinte sistema em s , e , e i :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\lambda i^p s^q + \mu - \mu s \\ \frac{de}{dt} = \lambda i^p s^q - (\mu + \epsilon) e \\ \frac{di}{dt} = \epsilon e - (\gamma + \mu) i \end{cases} \quad (6.28)$$

A região em análise é

$$\Gamma' = \{(s, e, i) : 0 \leq s + e + i \leq 1, \quad s \geq 0, \quad e \geq 0, \quad i \geq 0\}.$$

Relembremos que já foi provado que apenas existe um ponto de equilíbrio endémico para cada uma das situações $0 < p < 1$ ou $p = 1$ e $\theta > 1$ e foi provada também a sua estabilidade assintótica local.

Teorema 6.3.1 Se $0 < p < 1$ ou $p = 1$ e $\theta > 1$, o ponto de equilíbrio endémico P^* é globalmente assintoticamente estável no interior de Γ' para o sistema (6.28).

Vamos aplicar os mesmos teoremas que usamos na secção 5.3 do modelo SEIR com incidência standard, sendo apresentados aqui apenas os principais resultados. O objectivo destes é provar que todas as soluções em Γ'^o convergem para P^* quando $\theta > 1$, o que em conjunto com a estabilidade local de P^* implicam que P^* é globalmente assintoticamente estável em Γ'^o .

Temos que o sistema (6.28) é competitivo, de forma análoga à do capítulo anteriormente referido, considerando a matriz

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 6.3.2 Suponhamos que $\theta > 1$. Então qualquer conjunto ω -limite não vazio e compacto de (6.28) em Γ'^o é uma órbita fechada ou o ponto de equilíbrio endémico P^* .

Prova:

A prova é análoga à prova do teorema 5.3.1.

Portanto, aplicando o teorema 6.3.2 sob a condição $\theta > 1$ qualquer conjunto ω -limite não vazio e compacto de (6.28) em Γ'^o é uma órbita fechada ou o ponto de equilíbrio endémico P^* . Vamos agora mostrar, aplicando o teorema A.3.17 que qualquer solução periódica de (6.28) é assintoticamente orbitalmente estável com fase assintótica.

A matriz jacobiana do sistema (6.28) é a seguinte:

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -\lambda q i^p s^{q-1} - \mu & 0 & -\lambda p i^{p-1} s^q \\ -\lambda q i^p s^{q-1} & -\epsilon - \mu & \lambda p i^{p-1} s^q \\ 0 & \epsilon & -\gamma - \mu \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Por (A.2.8) a segunda matriz composta aditiva $J^{[2]}(P^*)$ da matriz anterior é:

$$J^{[2]}(P^*) = \begin{pmatrix} -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) & \lambda p i^{p-1} s^q & \lambda p i^{p-1} s^q \\ \epsilon & -(\lambda q i^p s^{q-1} + \gamma + 2\mu) & 0 \\ 0 & \lambda q i^p s^{q-1} & -(\epsilon + \gamma + 2\mu) \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Usando a matriz (6.30) podemos escrever o segundo sistema composto aditivo para o sistema (6.28) com respeito à solução $(s(t), e(t), i(t))$ como:

$$\begin{cases} X' = -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) X + \lambda p i^{p-1} s^q (Y + Z) \\ Y' = \epsilon X - (\lambda q i^p s^{q-1} + \gamma + 2\mu) Y \\ Z' = \lambda q i^p s^{q-1} Y - (\epsilon + \gamma + 2\mu) Z. \end{cases}$$

Definimos a seguinte norma em \mathbb{R}^3 :

$$\|(X, Y, Z)\| = \sup \{|X|, |Y| + |Z|\},$$

e a função $V(t)$:

$$V(t) = V(X(t), Y(t), Z(t); s(t), e(t), i(t)) = \sup \left\{ |X|, \frac{e(t)}{i(t)} (|Y| + |Z|) \right\}. \quad (6.31)$$

Suponhamos que a solução $(s(t), e(t), i(t))$ é periódica de período mínimo $\rho > 0$ e que $(s(0), e(0), i(0)) \in \Gamma'^o$. Como o fluxo do sistema (6.7) é dissipativo em $S[\partial\Gamma, \delta'] \cap \Gamma^o$ então também o sistema (6.28) tem fluxo dissipativo em $S[\partial\Gamma', \delta'] \cap \Gamma'^o$. A sua órbita \mathcal{O} encontra-se a uma distância positiva da fronteira $\partial\Gamma$ pela persistência uniforme provada pelo teorema 6.0.5, o que implica que a função V está bem definida.

Notemos agora que existe uma constante $c > 0$ definida por

$$c = \begin{cases} 1 & \text{se } c^* \geq 1 \\ c^* & \text{se } c^* < 1, \end{cases}$$

onde $c^* = \min \left\{ \frac{e}{i} : (s, e, i) \in \mathcal{O} \right\}$, tal que

$$V(X, Y, Z, s, e, i) \geq c \|(X, Y, Z)\|, \quad (6.32)$$

para todo $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ e $(s, e, i) \in \mathcal{O}$.

Vejamos que há dois casos a considerar:

- $c^* \geq 1$:

$$\begin{aligned} V(X, Y, Z, s, e, i) &\geq \sup \{|X|; c^*(|Y| + |Z|)\} \\ &\geq \sup \{|X|; (|Y| + |Z|)\} \\ &= \|(X, Y, Z)\|. \end{aligned}$$

- $c^* < 1$:

$$\begin{aligned} V(X, Y, Z, s, e, i) &\geq c^* \sup \left\{ \frac{1}{c^*} |X|; |Y| + |Z| \right\} \\ &\geq c^* \|(X, Y, Z)\|. \end{aligned}$$

Seja $(X(t), Y(t), Z(t))$ a solução de (6.28) e $V(t) = (X(t), Y(t), Z(t), s(t), e(t), i(t))$.

Agora observemos que quanto à derivada à direita da função $V(t)$ temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} D_+ |X(t)| &\leq -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) |X(t)| + \lambda p i^{p-1} s^q (|Y(t)| + |Z(t)|) \\ &= -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) |X(t)| + \frac{\lambda i^p s^q}{e} \left[\frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|) \right], \end{aligned} \tag{6.33}$$

$$D_+ |Y(t)| \leq \epsilon |X(t)| - (\lambda q i^p s^{q-1} + \gamma + 2\mu) |Y(t)|, \tag{6.34}$$

e

$$D_+ |Z(t)| \leq \lambda q i^p s^{q-1} |Y(t)| - (\epsilon + \gamma + 2\mu) |Y(t)|. \tag{6.35}$$

Usando as desigualdades anteriores, temos:

$$\begin{aligned} &D_+ \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|) \\ &= \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} \right) \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|) + \frac{e}{i} D_+ (|Y(t)| + |Z(t)|) \\ &\leq \frac{\epsilon e}{i} |X(t)| + \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu \right) \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|). \end{aligned} \tag{6.36}$$

Vamos agora considerar as duas possibilidades para $V(t)$:

- $V(t) = |X(t)|$;

Assim, por (6.33),

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &= D_+ |X(t)| \\ &\leq -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) |X| + \lambda p i^{p-1} s^q (|Y| + |Z|) \\ &= -(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu) |X(t)| + \frac{\lambda i^p s^q}{e} \left\{ \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|) \right\}. \end{aligned}$$

Pela definição de $V(t)$ temos que $|X(t)| \geq \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|)$, logo

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &\leq -\left(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu - \frac{\lambda - i^p s^q}{e}\right) |X(t)|, \\ &= -\left(\lambda q i^p s^{q-1} + \epsilon + 2\mu - \frac{\lambda - i^p s^q}{e}\right) V(t). \end{aligned}$$

- $V(t) = \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|)$;

Assim, por (6.36),

$$D_+ V(t) \leq \frac{\epsilon e}{i} |X(t)| + \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu\right) \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|). \quad (6.37)$$

Pela definição de $V(t)$ temos que $|X(t)| \leq \frac{e}{i} (|Y| + |Z|)$, logo

$$\begin{aligned} D_+ V(t) &\leq \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu + \frac{\epsilon e}{i}\right) \frac{e}{i} (|Y(t)| + |Z(t)|) \\ &= \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu + \frac{\epsilon e}{i}\right) V(t). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Vamos agora definir

$$g_1(t) = -\lambda q i^p s^{q-1} - \epsilon - 2\mu + \frac{\lambda i^p s^q}{e}$$

e

$$g_2(t) = \frac{\epsilon e}{i} + \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu.$$

Podemos concluir desta forma que

1. se $V(t) = |X(t)|$ temos $D_+ V(t) \leq g_1(t)V(t)$;
2. se $V(t) = \frac{e(t)}{i(t)} (|Y(t)| + |Z(t)|)$ temos $D_+ V(t) \leq g_2(t)V(t)$;

Vamos encontrar o máximo de $\{g_1(t), g_2(t)\}$.

Usando a segunda e a terceira equações do sistema (6.28), que podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\lambda i^p s^q}{e} = \frac{1}{e} \frac{de}{dt} + \epsilon + \mu$$

$$\frac{\epsilon e}{i} = \frac{1}{i} \frac{di}{dt} + \gamma + \mu,$$

reescrevemos $g_1(t)$ e $g_2(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -\lambda q i^p s^{q-1} - \epsilon - 2\mu + \frac{\lambda i^p s^q}{e} \\ &= -\lambda q i^p s^{q-1} - \epsilon - 2\mu + \frac{1}{e} \frac{de}{dt} + \epsilon + \mu \\ &= -\lambda q i^p s^{q-1} - \epsilon - \mu + \frac{1}{e} \frac{de}{dt}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{\epsilon e}{i} + \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu \\ &= \frac{1}{i} \frac{di}{dt} + \gamma + \mu + \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \frac{1}{i} \frac{di}{dt} - \gamma - 2\mu \\ &= \frac{1}{e} \frac{de}{dt} - \mu. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Assim, podemos concluir que $g_2 \leq g_1(t)$, concluindo desta forma que

$$D_+ V(t) \leq \max \{g_1(t), g_2(t)\} V(t) = g_2(t) V(t). \tag{6.40}$$

e então,

$$\int_0^\rho \max \{g_1(t), g_2(t)\} dt \leq \log e(t) |_0^\rho - \mu dt = -\mu \rho < 0$$

pela periodicidade de $e(t)$. A prova de que $V(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, é feita de forma análoga ao que foi feito na secção 5.3 e desta forma temos $(X(t), Y(t), Z(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ por (6.32).

O teorema seguinte estabelece a estabilidade do ponto de equilíbrio endémico, P^* :

Teorema 6.3.3 *Suponhamos que $0 < p < 1$ ou $p = 1$ e $\theta > 1$. Então o único ponto de equilíbrio endémico P^* do sistema (6.28) é globalmente assintoticamente estável em Γ .*

Prova:

Foi provado no início do capítulo que qualquer órbita que comece na fronteira de Γ , entra para o interior de Γ , excepto aquelas que começam no eixo dos $r's$, porque este eixo é positivamente invariante. É equivalente a esta a prova de que qualquer órbita que começa na fronteira de Γ' , entra para o interior deste conjunto, excepto aquelas que começam no eixo dos $s's$, que é positivamente invariante.

O que precisamos de provar é que P^* atrai todos os pontos em Γ'° .

Seja $U \subset \Gamma'^\circ$ o conjunto dos pontos que são atraídos por P^* (designado por base de atracção de P^*). Finalizamos a prova se mostrarmos que $\Gamma'^\circ \subset U$. A prova é análoga à que figura na prova do teorema 5.3.4, usando-se em vez dos teoremas 5.0.3 e 5.0.4, os teoremas 6.0.5 e 6.0.6 que provam, respetivamente, que o fluxo é dissipativo sobre determinadas condições e que o sistema (6.28) é uniformemente persistente em Γ'° .

Apêndice A

Resultados sobre sistemas dinâmicos

A.1 Discos de Geršgorin

Teorema A.1.1 *Dada uma matriz complexa $n \times n$ $A = (a_{ij})$ definimos os chamados discos de Geršgorin:*

$$G_i : \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}, i = 1, \dots, n.$$

$$e \quad G_j^* : \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right\}, j = 1, \dots, n.$$

Então os valores próprios λ de A satisfazem

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n G_i \cap \bigcup_{j=1}^n G_j^*.$$

Prova.

Assumimos que $Ax = \lambda x$ e que $\|x\|_\infty = 1$ para $x = (x_1, \dots, x_n)^*$.

Escolhemos i tal que $|x_i| = \|x\|_\infty = 1$.

Então:

$$|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda - a_{ii})x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

e por isso, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n G_i$.

Como os valores próprios de A^* são conjugados aos valores próprios de A também $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n G_j^*$.

A.2 Matrizes compostas aditivas

A noção de matriz composta aditiva é usada por vários autores entre os quais Muldowney em [19], Li et al. em [14] e [15], para a análise da estabilidade local de pontos de equilíbrio de equações diferenciais. Nesta seção demonstramos os resultados essenciais que foram usados no corpo principal da dissertação.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \{1, \dots, n\}$ seja

$$\mathcal{I}(k) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k \leq n\}.$$

Em $\mathcal{I}(k)$ consideremos a ordem lexicográfica e indexemos os elementos I de $\mathcal{I}(k)$ desde 1 até $\binom{n}{k}$:

$$\mathcal{I}(k) = \left\{ I_1 < \dots < I_{\binom{n}{k}} \right\},$$

sendo $I_r < I_s$ na ordem lexicográfica quando $r < s$. Para $1 \leq r \leq \binom{n}{k}$ façamos $J_r = I_r$.

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz de dimensões $n \times n$ com coeficientes complexos:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Dados $I = (i_1, \dots, i_k), J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ definimos a matriz

$$A_J^I = \begin{bmatrix} a_{j_1}^{i_1} & \dots & a_{j_n}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^{i_k} & \dots & a_{j_k}^{i_k} \end{bmatrix}.$$

Definição A.2.1 A k -ésima matriz composta multiplicativa associada à matriz A é a matriz

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \left| A_{J_1}^{I_1} \right| & \dots & \left| A_{J_{\binom{n}{k}}}^{I_1} \right| \\ \vdots & & \vdots \\ \left| A_{J_1}^{I_{\binom{n}{k}}} \right| & \dots & \left| A_{J_{\binom{n}{k}}}^{I_{\binom{n}{k}}} \right| \end{bmatrix}.$$

Decorre imediatamente desta definição que

$$(A^*)^{(k)} = (A^{(k)})^*.$$

Relembreamos o conhecido teorema de Binet-Cauchy:

Teorema A.2.2 *Sejam $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e $Y \in \mathbb{C}^{m \times n}$ com $n \leq m$. Façamos $Z = XY \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então*

$$\det(Z) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \det\left(X_{(k_1, \dots, k_n)}^{(1, \dots, n)}\right) \det\left(Y_{(1, \dots, n)}^{(k_1, \dots, k_n)}\right).$$

Prova.

Seja $Z = XY \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então $Z_j^i = \sum_{k=1}^m x_k^i y_i^k$. Logo

$$\begin{aligned} \det(Z) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sum_{k_1=1}^m x_{k_1}^1 y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots \sum_{k_n=1}^m x_{k_n}^1 y_{\sigma(n)}^{k_n} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^m x_{1k_1} \dots x_{nk_n} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sum_{k_1=1}^m y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(n)}^{k_n} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^m x_{k_1}^1 \dots x_{k_n}^n \det\left(Y_{(1, \dots, n)}^{(k_1, \dots, k_n)}\right) \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \det\left(X_{(k_1, \dots, k_n)}^{(1, \dots, n)}\right) \det\left(Y_{(1, \dots, n)}^{(k_1, \dots, k_n)}\right). \end{aligned}$$

Uma consequência imediata do teorema de Cauchy-Binet e da definição de matriz composta multiplicativa é o seguinte teorema:

Teorema A.2.3 *Se $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $1 \leq k \leq n$, então*

$$(AB)^{(k)} = A^{(k)}B^{(k)}.$$

Definição A.2.4 *A k -ésima matriz composta aditiva associada à matriz A é a matriz*

$$A^{[k]} = \frac{d}{dt}_{|t=0} (I + tA)^{(k)},$$

ou seja $A^{[k]}$ é a matriz coeficiente de t no polinómio matricial

$$(I + tA)^{(k)} = I + tA^{[k]} + t^2(A^{[k]})^2 + \dots$$

Teorema A.2.5 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz complexa de dimensões $n \times n$ e com valores próprios*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n.$$

Então os valores próprios de $A^{[k]}$ são

$$\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}$$

onde $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Prova.

Podemos escrever $A = PTP^*$, onde P é uma matriz unitária ($P^*P = I_n$) e T é uma matriz triangular inferior, com $T_{jj} = \lambda_j$. Pelo teorema de Binet-Cauchy,

$$\begin{aligned}(I + tA)^{(k)} &= (I + tPTP^*)^{(k)} = P^{(k)}(I + tT)^{(k)}(P^{(k)})^* \\ &= P^{(k)}S(t)^{(k)}(P^{(k)})^*,\end{aligned}$$

onde $S(t) = I + tT$ é triangular inferior com elementos diagonais são da forma $S_{jj}(t) = 1 + t\lambda_j$ ($j = 1, \dots, n$). Então, $S(t)^{(k)}$ é triangular inferior com entrada diagonal na posição l (correspondente a $I_l = (i_1, \dots, i_k)$) igual a

$$\prod_{j=1}^k (1 + t\lambda_{i_j}).$$

Os valores próprios de $A^{[k]}$ são os valores próprios de

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} P^{(k)}S(t)^{(k)}(P^{(k)})^* = P^{(k)} \left(\frac{d}{dt}_{|t=0} S(t)^{(k)} \right) (P^{(k)})^*,$$

ou seja, são os valores próprios de $\frac{d}{dt}_{|t=0} S(t)^{(k)}$ os quais são

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \prod_{j=1}^k (1 + t\lambda_{i_j}) = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}.$$

Teorema A.2.6 Seja I um intervalo aberto de \mathbb{R} e

$$A : I \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, t \mapsto A(t)$$

uma função contínua. Seja $X : I \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, t \mapsto X(t)$ uma solução do sistema de equações diferenciais

$$x' = A(t)x. \quad (\text{A.1})$$

Então

$$Y = X^{(k)} : I \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}}, t \mapsto X(t)^{(k)}$$

é solução do sistema de equações diferenciais

$$y' = A^{[k]}(t)y. \quad (\text{A.2})$$

Prova.

Como $X(t)$ é solução de (A.1), para $h \in \mathbb{R}$ com $|h|$ suficientemente pequeno, temos

$$X(t+h) = (I + hA(t))X(t) + o(h).$$

Pelo teorema de Binet-Cauchy,

$$X^{(k)}(t+h) = (I + hA(t))^{(k)}X(t)^{(k)} + o(h).$$

Logo $Y(t) = X^{(k)}(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais (A.2).

Corolário A.2.7 Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então,

$$(e^{tA})^{(k)} = e^{tA^{[k]}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposição A.2.8 No caso $n = 3$, a segunda matriz composta aditiva de

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

é a matriz

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, se λ_1, λ_2 e λ_3 são os valores próprios de A , então $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3$ são os valores próprios de $A^{[2]}$.

Definição A.2.9 Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A diz-se **estável** se todos os valores próprios de A têm parte real negativa.

Teorema A.2.10 Se a matriz A é estável, então toda a solução de $x' = Ax$ é assintoticamente estável.

De seguida temos um lema que nos vai permitir provar a estabilidade de uma matriz A através da sua matriz composta aditiva $A^{[2]}$:

Lema A.2.11 Seja A uma matriz real $n \times n$. A é estável se e só se:

1. a segunda matriz composta $A^{[2]}$ é estável;
2. $(-1)^n \det(A) > 0$.

Prova.

Suponhamos que A é estável, como pelo teorema A.2.5 os valores próprios de $A^{[2]}$ são somas dos valores próprios de A , estes valores próprios têm parte real negativa, portanto $A^{[2]}$ é estável. Em relação à segunda condição, $(-1)^n \det(A) > 0$, há duas hipóteses:

- n é par, $(-1)^n \det(A) = \det(A)$:

neste caso, se existirem valores próprios reais o número de valores próprios reais é um número par (o número de valores próprios complexos, caso estes existam, é um número par), logo esta quantidade é um número positivo.

- m é ímpar, $(-1)^n \det(A) = -\det(A)$:

neste caso, se existirem valores próprios reais são em número ímpar, logo o determinante é um número negativo, e a quantidade em causa é positiva.

Suponhamos agora que $A^{[2]}$ é estável, ou seja, a parte real dos seus valores próprios é negativa. Pelo teorema A.2.5, estes valores próprios são soma de dois valores próprios de A . Por isso, a soma de quaisquer dois valores próprios de A tem parte real negativa e isso implica que não podem existir dois valores próprios de A com parte real não negativa. Existe assim, no máximo, um valor próprio com parte real não negativa (e com multiplicidade um). Notemos ainda que este valor próprio não poderá ser complexo, senão o seu conjugado (que também é valor próprio de A) teria também parte real não negativa.

Analisemos agora a condição $(-1)^n \det(A) > 0$. Notando que o produto de dois valores complexos conjugados é positivo e que os valores próprios complexos aparecem aos pares, resta um número par ou um número ímpar de valores próprios reais, caso n seja par ou ímpar, respectivamente.

- se n é par, resta um número par de valores próprios reais. Se houvesse um valor próprio real não negativo

$$(-1)^n \det(A) = \det(A) \leq 0;$$

- se n é ímpar, resta um número ímpar de valores próprios reais. Se houvesse um valor próprio real não negativo

$$(-1)^n \det(A) = -\det(A) \leq 0.$$

Logo, todos os valores próprios de A têm parte real negativa e portanto A é estável.

A.3 Noções de estabilidade

Teorema A.3.1 *Seja*

$$x' = f(x, t), \quad (\text{A.3})$$

uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, onde $f(x, t)$ está definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Suponhamos que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, estão definidas e são contínuas.

Então, para cada ponto $(x_0, t_0) \in B$, existe uma única solução $x = \phi(t)$ de (A.3) que satisfaz $\phi(t_0) = x_0$ e está definida numa vizinhança de (x_0, t_0) .

Remetemos a prova deste teorema para [21], página 8.

Esclarecendo o conceito de unicidade, observemos que se duas soluções $x = \phi(t)$ e $x = \psi(t)$ de (A.3) satisfazem $\phi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$, então as soluções são idênticas no seu intervalo de definição comum.

Dada uma solução com condições iniciais (x_0, t_0) , interessa definir o intervalo maximal de definição de t , ou seja, o maior intervalo de \mathbb{R} tal que a solução esteja definida para todos os pontos desse intervalo e este contenha t_0 .

Teorema A.3.2 *Suponhamos que as hipóteses do teorema A.3.1 são satisfeitas para a equação diferencial (A.3). Então, dadas as condições iniciais (x_0, t_0) , existe uma solução $\phi(t)$ de (A.3), definida em $m_1 < t < m_2$, que satisfaz $\phi(t_0) = x_0$. Além disso se $\psi(t)$ é uma qualquer outra solução tal que $\psi(t_0) = x_0$, então o seu intervalo está contido em $]m_1, m_2[$.*

Definição A.3.3 *Seja X um espaço métrico com métrica d . Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais com a topologia e estrutura algébrica usuais.*

$\mathcal{F} = (\mathbb{R}, X, \phi)$ diz-se um fluxo contínuo definido em X , se

$$\phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

é uma função contínua tal que $\phi(x, 0) = x$ para todo $x \in X$ e

$$\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s) \quad \forall x \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Para facilitar a escrita, vamos referir-nos daqui em diante a ϕ como o fluxo em X . Quando fazemos a restrição $t \geq 0$ denotamos ϕ por semi-fluxo.

Consideramos agora um sistema autónomo de equações diferenciais ordinárias (ou seja, não depende do tempo)

$$x' = f(x) \tag{A.4}$$

onde f é um campo de vectores de classe C^∞ definido num subconjunto aberto X de \mathbb{R}^n . Vamos denotar por $\phi(x, t)$ a solução do sistema (A.4) que passa no ponto x no instante $t = 0$. Para s numa vizinhança suficientemente pequena de $0 \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s).$$

Sob condições apropriadas sobre f , temos o semi-fluxo

$$\begin{aligned}\phi : & X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X \\ & (x, t) \mapsto \phi(x, t)\end{aligned}$$

correspondente ao sistema (A.4).

Seja $M \subset X$ e $K \subset \mathbb{R}$ então $\{\phi(x, t) : x \in M, t \in K\}$ pode ser denotado por $\phi(M, K)$. Seguem-se ainda as definições:

$$\gamma(M) = \phi(M, \mathbb{R}), \quad \gamma^+(M) = \phi(M, \mathbb{R}_0^+), \quad \gamma^-(M) = \phi(M, \mathbb{R}_0^-).$$

Esta notação ajuda a definir os conceitos de órbita (ou trajectória), órbita positiva e órbita negativa.

Definição A.3.4 Dado um conjunto singular $\{x\}$, $x \in X$, denotamos por **órbita ou trajectória** de x o conjunto $\gamma(x)$; por **órbita positiva** de x o conjunto $\gamma^+(x)$ e por **órbita negativa** de x o conjunto $\gamma^-(x)$.

Introduzimos de seguida as definições de conjunto limite, ou seja, os conjuntos ω -limite e α -limite:

Definição A.3.5 Dado um ponto $x \in X$, e $\phi(x, t)$ o fluxo correspondente ao sistema (A.4) definimos

$$\omega(x) = \{y \in X : \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}_0^+, t_n \rightarrow +\infty, \text{ e } \phi(x, t_n) \rightarrow y \text{ quando } n \rightarrow +\infty\},$$

o conjunto ω -limite de x .

Definição A.3.6 Dado um ponto $x \in X$, e $\phi(x, t)$ o fluxo correspondente ao sistema (A.4) definimos

$$\alpha(x) = \{y \in X : \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}_0^-, t_n \rightarrow -\infty, \text{ e } \phi(x, t_n) \rightarrow y \text{ quando } n \rightarrow -\infty\},$$

o conjunto α -limite de x .

Apresentamos ainda a definição de conjunto positivamente invariante e invariante.

Definição A.3.7 Um subconjunto A de X é um conjunto positivamente invariante se $\phi(A, t) \subset A$ para todo o instante $t \geq 0$. É invariante se $\phi(A, t) = A$ para todo o instante $t \geq 0$.

Nota: Um conjunto limite é invariante. De seguida apresentamos o conceito de fluxo dissipativo ponto a ponto como em [9].

Definição A.3.8 O fluxo \mathcal{F} é **dissipativo ponto a ponto** num conjunto não vazio $M \subset X$ se existe um conjunto compacto $N \subset X$ tal que para qualquer ponto $y \in M$, existe $t(y) > 0$ tal que para qualquer $t > t(y)$, $\phi(y, t) \in N^\circ$.

Dado um subconjunto M de X , e $\epsilon > 0$, qualquer, denotamos a vizinhança tubular de M de raio ϵ da seguinte forma:

$$S[M, \epsilon] = \{x \in X : d(x, M) \leq \epsilon\}. \quad (\text{A.5})$$

Usamos ainda a seguinte notação

$$H(M, \epsilon) = \{x \in X : d(x, M) = \epsilon\}. \quad (\text{A.6})$$

Definição A.3.9 Considerese o sistema

$$x' = f(x, t), \quad (\text{A.7})$$

onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ aberto.

Seja $\phi(t)$ uma semi-órbita positiva de (A.7).

Diz-se que $\phi(t)$ é **estável** se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (A.7) e $\|\psi(0) - \phi(0)\| < \delta$, então

$$\forall t \geq 0, \quad \psi(t) \quad \text{está definida e} \quad \|\psi(t) - \phi(t)\| < \epsilon.$$

Uma tal semi-órbita em que existe $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que

$$\|\psi(0) - \phi(0)\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t) - \phi(t)\| = 0,$$

diz-se **assimptoticamente estável**.

Definição A.3.10 Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $V = V(x)$. Esta é uma função definida positiva se

- V e as suas derivadas parciais são contínuas numa vizinhança de um ponto de equilíbrio;
- $V(x) \geq 0$, para todo $x \in X$, verificando-se a igualdade apenas no ponto de equilíbrio do sistema de equações $x' = f(x)$.

Teorema A.3.11 Dado um sistema autónomo de equações diferenciais da forma $x' = f(x)$ em X e um ponto de equilíbrio deste sistema, denominado x^* , ($f(x^*) = 0$), se existe uma função V tal que $\frac{dV}{dt}$ é definida positiva e em toda a vizinhança do ponto de equilíbrio existe um ponto x_0 onde $V(x_0) > 0$, então a solução $\phi(t)$ (tal que $\phi(x^*, 0) = x^*$) é instável.

Mais precisamente, se $R > 0$ é tal que $\overline{B}(x^*, R) \subset X$, então existe $t_1(x_0)$ tal que

$$\forall t > t_1(x_0) \quad \|\phi(x_0, t) - x^*\| > R.$$

A prova encontra-se em [21], página 110.

Definição A.3.12 Seja um sistema autónomo de equações diferenciais como (A.4). Uma solução periódica $x = p(t)$ deste sistema autónomo com período $\rho > 0$ e cuja órbita é $\mathcal{O} = \{p(t) : 0 \leq t \leq \rho\}$ é **orbitalmente estável** se dado $\eta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja a solução $x(t)$ de (A.4), e qualquer que seja $t_0 \geq 0$, verificando a condição $d(x(t_0), \mathcal{O}) < \epsilon$, então

$$d(x(t), \mathcal{O}) < \eta, \quad \forall t \geq t_0.$$

Esta órbita \mathcal{O} é **assimptoticamente orbitalmente estável** se é orbitalmente estável e existe $\delta > 0$ tal que para qualquer solução de (A.4), $x(t)$, temos que

$$d(x(t_0), p(t)) < \delta, \quad d(x(t), \mathcal{O}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Esta órbita é **assimptoticamente orbitalmente estável com fase assintótica** se existe $c \in \mathbb{R}$ (que pode depender de $x(0)$), tal que se verifica $d(x(t), p(t - c)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Necessitamos da definição de novos conceitos:

Definição A.3.13 Uma matriz $\phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base do espaço de soluções da equação homogénea $x' = A(t)x$ chama-se matriz fundamental de $x' = A(t)x$.

Se uma matriz $A(t)$ definida em \mathbb{R} , é periódica de período ρ , isto quer dizer que existe $\rho > 0$ tal que $A(t + \rho) = A(t)$. Seja $\phi(t)$ uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Então existe uma matriz C constante com coeficientes complexos, invertível, de ordem n tal que

$$\phi(t + \rho) = \phi(t)C$$

Teorema A.3.14 (Teorema de Floquet)

Seja $x' = A(t)x$, com $A(t)$ periódica de período ρ , então existe uma matriz $P = P(t)$ de ordem n periódica de período ρ e uma matriz B , de ordem n , complexa com coeficientes constantes, tais que para uma matriz fundamental $\phi(t)$ de $x' = A(t)x$ temos

$$\phi(t) = P(t)e^{Bt}.$$

Definição A.3.15 Os valores próprios de B vão ser designados por **expoentes característicos**.

Teorema A.3.16 O sistema de equações diferenciais $x' = A(t)x$ tem uma solução periódica de período ρ se e só se tem pelo menos um expoente característico nulo (módulo $\frac{2\pi i}{\rho}$).

A prova deste teorema pode ser consultada em [21], página 157. Os valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de C permitem calcular os expoentes característicos pois $\lambda_i = e^{r_i \rho}$, onde r_i são os expoentes característicos do sistema.

Teorema A.3.17 *Seja U um aberto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , e $p : \mathbb{R} \rightarrow U$ uma função periódica de período $\rho > 0$, solução de $x' = f(x)$.*

Considere-se a equação linear variacional associada à solução

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}(p(t)) y. \quad (\text{A.8})$$

Observemos que:

1. a função $y = p'(x)$ é solução (periódica de período ρ) de (A.8);
2. se os restantes $n - 1$ expoentes característicos têm parte real negativa então $p(t)$ é uma solução assintoticamente orbitalmente estável com fase assintótica.

Para provar o primeiro item observemos que se $y = p'(x)$ então $y' = p''(x) = \frac{df}{dx}(p(t)) p'(t)$.

A prova do segundo item encontra-se em [20], página 76.

Teorema A.3.18 *Seja U um aberto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , e $p : \mathbb{R} \rightarrow U$ uma função periódica de período $\rho > 0$, solução de $x' = f(x)$.*

Uma condição suficiente para que a sua órbita periódica

$$\mathcal{O} = \{p(t) : 0 \leq t \leq \rho\}$$

seja assintoticamente orbitalmente estável com fase assintótica é que o sistema linear

$$y' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{[2]}(p(t)) y \quad (\text{A.9})$$

seja assintoticamente estável.

Prova:

Por (A.3.17) basta mostrar que $n - 1$ dos expoentes característicos (módulo $\frac{2\pi i}{\rho}$) do sistema variacional (A.8) têm parte real negativa.

Um sistema fundamental de soluções de (A.8) escreve-se na forma

$$Y(t) = P(t)e^{Bt} \quad (\text{A.10})$$

onde $P = P(t)$ é periódica de período ρ e B , uma matriz complexa, ambas as matrizes de ordem n . Então, um sistema fundamental de soluções de (A.9) é

$$\begin{aligned} Y(t)^{(2)} &= P(t)^{(2)}(e^{Bt})^{(2)} \quad (\text{por A.2.3}) \\ &= P(t)^{(2)}e^{B^{[2]}t} \quad (\text{por A.2.7}) \end{aligned}$$

Suponhamos agora que (A.9) é assintoticamente estável, então os valores próprios de $B^{[2]}$ têm parte real negativa. Usando (A.2.5), os valores próprios de $B^{[2]}$ são somas de pares de valores próprios de B . Como um dos valores próprios de B é nulo (módulo $\frac{2\pi i}{\rho}$), os restantes $n - 1$ valores próprios de B são também valores próprios de $B^{[2]}$, ou seja, em particular, temos $n - 1$ expoentes característicos de B com parte real negativa.

A.4 Teorema de LaSalle

Vamos introduzir a teoria de LaSalle (com o objectivo de demonstrar o princípio de invariância de LaSalle, um importante resultado para a estabilidade de sistemas de equações diferenciais). Vamos limitar-nos às equações autónomas (isto é, que não dependem do tempo).

Vamos apresentar vários resultados em conjuntos invariantes e conjuntos limite, começando por introduzir a seguinte notação.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e seja

$$\begin{aligned} f : \quad X &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

uma função lipschitziana e

$$x' = f(x) \tag{A.11}$$

a equação diferencial associada. Denotamos por $\phi(x_0, t_0)$ a solução com condições iniciais (x_0, t_0) . Para um dado valor x_0 é definida como função de $t - t_0$, que para simplificar denotamos por τ . Assim cada solução está definida em $[0, \infty]$.

Teorema A.4.1 *Seja $x \in X$, então $\omega(x) \cap X$ é um conjunto invariante.*

Prova.

Seja $r \in \omega(x_0) \cap X$. Então existe uma sucessão $\tau_i \rightarrow \infty$ tal que $\phi(x_0, \tau_i) \rightarrow r$ quando $i \rightarrow \infty$. Mostraremos de seguida que para qualquer τ' , $\phi(r, \tau') \in \omega(x_0)$. Para i suficientemente grande, $\tau_i + \tau' \geq 0$ e $\phi(x_0, \tau_i + \tau')$ está definida. Como

$$\phi(x_0, \tau_i + \tau') = \phi(\phi(x_0, \tau_i), \tau'),$$

por continuidade $\phi(x_0, \tau_i + \tau') \rightarrow \phi(r, \tau')$ quando $i \rightarrow \infty$, o que estabelece que $\phi(r, \tau') \in \omega(x_0)$.

Proposição A.4.2 *Se $\omega(x_0)$ é não vazio e limitado então $\phi(x_0, \tau) \rightarrow \omega(x_0)$ quando $\tau \rightarrow \infty$.*

Prova.

Suponhamos o contrário. Então existiria $\epsilon > 0$ e uma sucessão τ_1, τ_2, \dots com $\tau_i \rightarrow \infty$, tal que

$$d(\phi(x_0, \tau_i), \omega(x)) = \epsilon.$$

Como o conjunto $\phi(x_0, \tau_i)$ é limitado, contém uma subsucessão $\phi(x_0, \tau'_i)$ que converge, ou seja, $\phi(x_0, \tau'_i) \rightarrow x^*$ quando $i \rightarrow \infty$. O ponto x^* , por definição, pertence a $\omega(x_0)$ e permanece a uma distância ϵ de $\omega(x_0)$, o que é uma contradição.

Lema A.4.3 *Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $V'(x)$ a sua derivada em relação ao tempo ao longo das soluções de $x' = f(x)$. Se $V'(x) \leq 0$ para todo o $x \in X$, então para cada $x_0 \in X$, V é constante em $\omega(x_0) \cap X$.*

Prova.

Sejam y e $y' \in \omega(x_0) \cap X$. Então existem duas sucessões $\{\tau_i\}$ e $\{\tau'_i\}$ que tendem para $+\infty$ tais que $\phi(x_0, \tau_i) \rightarrow y$ e $\phi(x_0, \tau'_i) \rightarrow y'$ quando $i \rightarrow +\infty$. Como V é uma função contínua,

$$V(y) = \lim_{\tau_i \rightarrow \infty} V(\phi(x_0, \tau_i)) \quad e \quad V(y') = \lim_{\tau'_i \rightarrow \infty} V(\phi(x_0, \tau'_i)).$$

Mas $V(\phi(x_0, \tau))$ é decrescente e tende para um limite quando $\tau \rightarrow +\infty$. Este limite deve ser igual a $V(y)$ e $V'(y)$, que têm de ser iguais.

Teorema A.4.4 (de LaSalle)

Considere-se a equação $x' = f(x)$ com $X = \mathbb{R}^n$ e seja

$$\begin{aligned} V : & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto V(x) \end{aligned}$$

uma função de classe C^1 limitada inferiormente tal que $V(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ e para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $V'(x) \leq 0$.

Seja $E = \{x \in \mathbb{R}^n : V'(x) = 0\}$ e seja M o maior conjunto invariante de E . Então toda a solução é limitada e tende para M quando $t \rightarrow +\infty$.

Prova.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, qualquer. Seja $V(x_0) = a$. O conjunto $K = \{x : V(x) \leq a\}$ é fechado e limitado, e por isso compacto. Temos ainda que K é positivamente invariante. Seja $E' = \{x \in K : V'(x) = 0\}$, e M' é o maior conjunto invariante contido em E' . Pelo lema A.4.3 $V(x)$ é constante em $\omega(x_0)$ e pelo teorema A.4.1 este conjunto é invariante. Assim, $V'(x) = 0$ em $\omega(x_0)$. Então $\omega(x_0) \subset M'$. Como K é compacto, $\omega(x_0)$ é compacto. Então provase (usando a proposição A.4.2) que $\phi(x_0, \tau) \rightarrow \omega(x_0)$ quando $\phi \rightarrow +\infty$ e $x(x_0, \tau) \rightarrow M'$ quando $\tau \rightarrow +\infty$. Então, $\phi(x_0, \tau) \rightarrow M$ quando $t \rightarrow +\infty$ pois $M' \subset M$.

A.5 Generalização do teorema de Dulac

Seja

$$x' = f(x) \quad (\text{A.12})$$

um sistema de equações diferenciais definido num aberto X de \mathbb{R}^n .

Definição A.5.1 Designa-se por **polígono de fase** uma curva fechada que liga vários pontos de equilíbrio e cujos segmentos entre sucessivos pontos de equilíbrio são órbitas do sistema (A.12).

Definição A.5.2 Um polígono de fase cujas arestas são soluções do sistema (A.12) que são percorridas num mesmo sentido é chamado **polígono de fase orientado**.

Definição A.5.3 Seja $\gamma : \{x(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma solução do sistema (A.12) tal que

$$\forall x \in \gamma, \quad \alpha(x) = \omega(x) = P_1,$$

onde P_1 é um ponto de equilíbrio de (A.12). O conjunto

$$\{x(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{P_1\}$$

denomina-se por **ciclo homoclínico**.

Busenberg e van den Driessche [5] demonstraram o seguinte teorema:

Teorema A.5.4 Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores contínuo Lipschitziano e seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada, de classe C^∞ (excepto num conjunto numerável de pontos), que é a fronteira de uma superfície de classe C^∞ orientada $S \subset \mathbb{R}^3$. Suponhamos que $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^∞ numa vizinhança de S e satisfaz:

$$g(\gamma(t)) \cdot f(\gamma(t)) \leq 0 \quad (\text{ou } \geq 0), \quad \forall t \in [a, b] \quad (\text{A.13})$$

e

$$\begin{aligned} \text{rot } g \cdot n &\geq 0 \text{ ou } \leq 0 \text{ em } S, \\ \text{e } \text{rot } g \cdot n &> 0 \text{ em algum ponto de } S, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde n é um vector unitário normal a S .

Então o traço de γ não é a união finita das órbitas de

$$x' = f(x) \quad (\text{A.15})$$

que são percorridas no sentido positivo relativo à direcção de n .

Prova.

Notemos que $\gamma(t)$ é uma solução de (A.15) se e só se é uma órbita do sistema $x' = -f(x)$, que é percorrido na direcção oposta. Então, as desigualdades em (A.13) são equivalentes, o mesmo se passando com as desigualdades de (A.14) que são equivalentes.

Pelo teorema de Stokes e por (A.14)

$$0 < \int \int_S \text{rot } g \cdot n \, dA = \int_{\gamma} g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt. \quad (\text{A.16})$$

Suponhamos agora que $\gamma(t)$, de classe C^∞ (excepto num conjunto numerável de pontos), é solução de (A.15), ou seja $f(\gamma(t)) = \gamma'(t)$.

Usando (A.13) temos

$$\int_{\gamma} g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_{\gamma} g(\gamma(t)) \cdot f(\gamma(t)) \, dt \leq 0. \quad (\text{A.17})$$

Chegamos a uma contradição por (A.16), logo $\gamma(t)$ não é uma união finita de órbitas do sistema (percorridas no sentido positivo de n).

Corolário A.5.5 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de classe C^∞ orientável tal que, qualquer curva fechada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^∞ (excepto num conjunto numerável de pontos) com traço em S , é fronteira de uma superfície $S' \subset S$.*

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva nestas condições e sejam

$$f, g : \text{tr}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dois campos de vectores Lipschitzianos numa vizinhança de $\text{tr}(\gamma)$ tais que

$$g(\gamma(t)) \cdot f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{rot } g \cdot n > 0 \text{ em } S \text{ (respectivamente } < 0 \text{ em } S) \quad (\text{A.18})$$

onde n é um vector unitário normal a S . Então o traço de γ não é um polígono de fase orientado, nem é um ciclo homoclínico, nem é uma órbita periódica da equação diferencial $x'(t) = f(x(t))$.

Prova.

Suponhamos que o traço de γ contido em S é um polígono de fase orientado, ou uma órbita periódica ou um ciclo homoclínico de $x'(t) = f(x(t))$. Então, pelo teorema da curva de Jordan, existe uma superfície orientada de classe C^∞ , seccionalmente de classe C^1 , $S' \subset S$ para a qual

$$\{\gamma(t), t \geq 0\} = \partial S',$$

onde $\gamma(t)$ tem orientação positiva em relação ao vector normal, n , a S . Aplicando o teorema A.5.4 a γ e S' encontramos uma contradição.

Como corolário deste teorema temos o teorema de Dulac:

Teorema A.5.6 *Considere-se um sistema de dimensão 2 dado por:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

definido num aberto X de \mathbb{R}^2 . Seja $\beta(x, y)$ uma função de classe C^1 . Se

$$\frac{\partial}{\partial x} (\beta(x, y) F(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta(x, y) G(x, y)) \quad (\text{A.20})$$

é estritamente positivo ou estritamente negativo numa região D simplesmente conexa então não existem órbitas periódicas do sistema (A.19) em D .

Prova.

Fazendo uma extensão do sistema do plano a \mathbb{R}^3 , o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \\ \frac{dz}{dt} = \beta(x, y) \end{cases}$$

vai corresponder ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Tomando

$$g(x, y) = [-\beta(x, y)G(x, y), \beta(x, y)F(x, y), 0],$$

temos que $g.(F, G, 0) = 0$. A superfície S neste caso é o plano xOy e temos $n = (0, 0, 1)$, o vector ortogonal a este plano. Suponhamos ainda que β , F e G são de classe C^∞ , temos então

$$\text{rot } g \cdot n = \text{div}(\beta F, \beta G).$$

A condição do teorema de Dulac

$$\text{div}(\beta F, \beta G) > 0 \quad (< 0)$$

é assim um caso particular da condição (A.18) do corolário A.5.5.

Um teorema muito útil é o teorema de Poincaré-Bendixson enunciado a seguir.

Teorema A.5.7 (de Poincaré-Bendixson)

Sejam U um aberto de \mathbb{R}^2 e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Suponhamos que $x' = f(x)$ possui uma semi-órbita positiva \mathcal{O}^+ compacta. Se $\omega(\mathcal{O}^+)$ não contém pontos de equilíbrio então uma das seguintes situações acontece:

- \mathcal{O}^+ é uma órbita periódica e $\omega(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$, ou
- $\omega(\mathcal{O}^+)$ é uma órbita periódica (ciclo limite) que \mathcal{O}^+ aproxima espiralmente.

A prova encontra-se em [24], página 284.

Suponhamos que temos para um sistema apenas um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, p , e pretendemos mostrar que todas as órbitas do sistema tendem para p . Se conseguirmos mostrar que o sistema não possui órbitas periódicas (nomeadamente através do teorema de Dulac), então conseguimos o resultado pretendido.

A.6 Sistemas dinâmicos competitivos

Seja A um conjunto invariante de $x' = f(x)$ (um sistema autônomo) com fluxo $\phi(x, t)$, e seja B um conjunto invariante do sistema $y' = F(y)$ (um sistema autônomo) com fluxo $\psi(y, t)$.

Dizemos que o fluxo $\phi(x, t)$ em A é **topologicamente equivalente** ao fluxo $\psi(y, t)$ em B se houver um homeomorfismo $Q : A \rightarrow B$ tal que:

$$Q(\phi(x, t)) = \psi(Q(x), t)$$

para todo o $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}$. De uma forma pouco formal dizemos que dois fluxos topologicamente equivalentes têm a mesma dinâmica.

Definição A.6.1 Um sistema de equações diferenciais $y' = F(y)$, definido em \mathbb{R}^n , é **Lipschitziano** se F é Lipschitziana, ou seja, se existe $K > 0$ tal que

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq K \|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Definição A.6.2 Em $(\mathbb{R})^n$ define-se a seguinte relação de ordem:

$$y \leq x \text{ se } x - y \in (\mathbb{R}_+)^n.$$

Mais concretamente:

- $y \leq x$ se e só se $y_i \leq x_i$ para todo i ;
- escrevemos $y < x$ se $x_i \leq y_i$ para algum i ;
- escrevemos $y << x$ se $x_i < y_i$ para todo i .

Definição A.6.3 Um semi-fluxo ϕ é monótono se

$$\phi(x, t) \leq \phi(y, t) \text{ quando } x \leq y \text{ e } t \geq 0, \text{ para } x, y \in X.$$

Definição A.6.4 Seja $x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ um campo de vectores de classe C^∞ definido para x num conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$. O sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in X$$

é **competitivo** em F se, para alguma matriz diagonal $D = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, os elementos que não pertencem à diagonal da matriz

$$D \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right) D \tag{A.21}$$

são não positivos para todo $x \in X$.

Um sistema é **cooperativo** se sob as hipóteses deste teorema se verifica a desigualdade contrária, ou seja, os elementos da matriz (A.21) tem os elementos fora da diagonal não negativos para todo $x \in X$.

Se X é convexo, o fluxo de um sistema preserva, para $t < 0$, a ordem parcial em \mathbb{R}^n definida pelo octante $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \epsilon_i x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, descrita na definição A.6.2.

Nota: O conceito de sistema competitivo aqui usado é mais geral do que em Hirsch, em [13], pois a ordem parcial não é necessariamente definida pelo ortante standard em \mathbb{R}^n . Contudo, por uma mudança de variáveis linear $y = Dx$, um sistema como o que está definido acima pode ser transformado num sistema competitivo definido dessa forma.

Se $x' = f(x)$ é um sistema competitivo com fluxo $\phi(t)$ então

$$x'(t) = -f(x)$$

é um sistema cooperativo com fluxo $\psi(t)$ onde $\psi(x, t) = \phi(x, -t)$, e o inverso também se verifica. Notemos que um sistema cooperativo gera um sistema dinâmico monótono. Assim, um sistema competitivo tem a propriedade de que é monótono pois o seu fluxo dado o tempo reverso é monótono.

Teorema A.6.5 *Um conjunto limite compacto de um sistema competitivo ou cooperativo não pode conter dois pontos relacionados por <<.*

A prova deste resultado encontra-se em [23], página 38.

Teorema A.6.6 *O fluxo num conjunto limite compacto de um sistema competitivo ou cooperativo em \mathbb{R}^n é topologicamente equivalente a um fluxo num conjunto invariante compacto de um sistema Lipschitziano de equações diferenciais em \mathbb{R}^{n-1} .*

Prova.

Seja L o conjunto limite (ω -limite ou α -limite). Seja v um vector unitário que satisfaz $0 << v$ (ou seja, não tem nenhuma componente nula). Seja ainda H_v o hiperplano ortogonal a v , ou seja, o hiperplano constituído pelos vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $x.v = 0$.

Seja Q a projecção ortogonal em H_v , ou seja, $Q(x) = x - (x.v)v$. Pelo teorema A.6.5, Q é injectiva pois excluindo a existência de pontos com a relação referida, não temos pontos de \mathbb{R}^n com a mesma imagem por Q . Definimos ainda Q_L , a restrição de Q a L . Sendo Q uma aplicação contínua, a imagem do compacto L , $Q(L)$ é também um compacto em H_v . Seja F um fechado de L . Como L é compacto também F é compacto. Temos ainda que $Q(F)$ é um compacto de $Q(L)$. Se tomarmos a aplicação inversa, vemos

que $F = Q^{-1}(Q(F))$ é um fechado, logo Q_L^{-1} é uma aplicação contínua. Vamos provar de seguida que Q_L é um homeomorfismo Lipschitziano de L num subconjunto compacto de H_v .

Suponhamos que Q_L^{-1} é Lipschitziano em $Q(L)$, ou seja, que existe $m > 0$ tal que

$$\|Q_L(x_1) - Q_L(x_2)\| \geq m \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in L.$$

Suponhamos que isto não se verifica, então existem sucessões $x_n, y_n \in L$, $x_n \neq y_n$ tais que:

$$\frac{\|Q(x_n) - Q(y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Escrevendo este resultado de forma equivalente

$$\frac{\|Q(x_n) - Q(y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} = \frac{\|(x_n - y_n) - v[v.(x_n - y_n)]\|}{\|x_n - y_n\|},$$

podemos escrever

$$\|w_n - v(v.w_n)\| \rightarrow 0, \tag{A.22}$$

onde $w_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$.

Como L é compacto, podemos já admitir que x_n e y_n têm limite e portanto podemos admitir que w_n tem limite w , com $|w| = 1$. Por (A.22) temos $w = v(v.w)$, o que nos leva a concluir que $(v.w)^2 = 1$ e então $w = \pm v$. Mas então

$$\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} \rightarrow \pm v,$$

e, como $0 \ll v$ temos para n suficientemente grande que, $x_n \ll y_n$ ou $y_n \ll x_n$, o que contradiz o teorema A.6.5. Desta forma concluímos a prova de que Q_L^{-1} é Lipschitziano em $Q(L)$. Temos ainda que L , sendo um conjunto limite, é um conjunto invariante. Assim, se $y \in Q(L)$ então $y = Q_L(x)$ para um único $x \in L$ e verifica-se $\psi(y, t) = Q_L(\phi(x, t))$ é um sistema dinâmico em $Q(L)$ gerado pelo campo de vectores

$$F(y) = Q_L(f(Q_L^{-1}(y))).$$

Um resultado de McShane (1934) diz que um campo de vectores Lipschitziano num subconjunto arbitrário de H_v pode ser prolongado a um campo de vectores Lipschitziano em todo o H_v , preservando a constante de Lipschitz. Assim, F pode ser prolongado para todo o H_v como um campo de vectores Lipschitziano. O subconjunto compacto $Q(L)$ é um conjunto invariante para o último campo de vectores. Ficou assim estabelecida a equivalência topológica do fluxo $\phi(x, t)$ em L com o fluxo $\psi(y, t)$ em $Q(L)$.

Definição A.6.7 Seja A um conjunto compacto invariante do fluxo $\psi(t)$. Dados dois pontos, z e y em A e constantes positivas ϵ e t , uma (ϵ, t) -cadeia de z para y em A é o conjunto ordenado:

$$\{z = x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1} = y; t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\} \quad (\text{A.23})$$

de pontos $x_i \in A$ e instantes $t_i \geq t$ tais que

$$\|\psi(x_i, t_i) - x_{i+1}\| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.24})$$

A é uma cadeia recorrente se para todo $z \in A$ e para todo $\epsilon > 0$ e $t > 0$, existe uma (ϵ, t) -cadeia de z para z em A .

Nota: Qualquer conjunto limite tem esta propriedade. A prova encontra-se em [23], página 163.

Teorema A.6.8 (Critério de Convergência)

Suponhamos que ϕ é monótono e $\overline{\gamma(x)}$ é um subconjunto compacto de X , para cada $x \in X$. Se $\phi(x, t) \geq x$ para algum t pertencente a um subconjunto aberto não vazio de $]0, +\infty[$, então $\phi(x, t) \rightarrow p \in E$ quando $t \rightarrow \infty$.

A prova encontra-se em [23], página 3.

Proposição A.6.9 Seja γ uma órbita periódica não trivial de um sistema cooperativo ou competitivo. Então γ não pode conter dois pontos relacionados por $<$.

A prova está em [23], página 38.

Depois destes resultados e observações estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema A.6.10 Um conjunto limite compacto de um sistema competitivo ou cooperativo em \mathbb{R}^3 que não contém pontos de equilíbrio é uma órbita periódica.

Prova.

Seja L o conjunto limite nas condições do teorema. Pelo teorema A.6.6, o fluxo $\phi(x, t)$ em L é topologicamente equivalente ao fluxo $\psi(y, t)$, gerado por um campo de vectores planar Lipschitziano, restrito ao conjunto invariante $Q(L)$, que é compacto e conexo. Este conjunto tem também a propriedade de ser cadeia recorrente pois é topologicamente equivalente ao fluxo $\phi(x, t)$. Como L não contém nenhum ponto de equilíbrio, o mesmo acontece com $Q(L)$. Como se trata de um fluxo relativo a um sistema planar então pelo teorema de Poincaré-Bendixson, $Q(L)$ consiste em órbitas periódicas e/ou órbitas cujos conjuntos limite são órbitas periódicas contidas em $Q(L)$. A

propriedade do fluxo $\psi(y, t)$ em $Q(L)$ ser cadeia recorrente vai ser explorada para mostrar que $Q(L)$ consiste somente em órbitas periódicas. Seja $z \in Q(L)$ e suponhamos que z não pertence a uma órbita periódica. Então $\omega(z)$ e $\alpha(z)$ são órbitas periódicas distintas em $Q(L)$. Seja $\omega(z) = \gamma$ e suponhamos que z pertence à componente interior de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, D , tal que $\psi(z, t)$ espirala para γ em D . (O outro caso é tratado de forma análoga).

Então γ é assimptoticamente estável relativamente a D . Argumentos usuais recorrendo a secções transversais implicam a existência de vizinhanças de γ positivamente invariantes e compactas, U_1 e U_2 , em D , tais que $U_2 \subset U_1^\circ$ (interior em D), $z \notin U_1$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\psi(U_1, t) \subset U_2$ para $t \geq t_0$. Seja $\epsilon > 0$ tal que a vizinhança tubular de raio 2ϵ de U_2 em D está contida em U_1 . Tomamos agora t_0 (maior do que o valor já atrás referido se for necessário) tal que $\psi(z, t) \in U_2$ para $t \geq t_0$. Isto pode ser feito já que $\omega(z) = \gamma$. Então, qualquer (ϵ, t_0) -cadeia (definida em (A.23)) em $Q(L)$ que comece em $x_1 = z$ satisfaz $\psi(x_1, t_1) \in U_2$ e por (A.24) e pelo facto de que a vizinhança tubular de raio 2ϵ de U_2 está contida em U_1 , $x_2 \in U_1$. Como $t_2 > t_0$, segue que $\psi(x_2, t_2) \in U_2$ e (A.24) implica novamente que $x_3 \in U_1$. Continuando este argumento, é evidente que a cadeia (ϵ, t_0) não pode voltar a z . Não pode haver em $Q(L)$ nenhuma (ϵ, t_0) -cadeia de z para z e desta maneira chegamos a uma contradição da hipótese de que $Q(L)$ era uma cadeia recorrente. Desta forma provamos que toda a órbita de $Q(L)$ é periódica. Como $Q(L)$ é conexa ou é uma órbita periódica simples ou um anel de órbitas periódicas. Segue que L é uma órbita periódica ou um cilindro de órbitas periódicas.

Para completar a prova temos que excluir a possibilidade de $Q(L)$ ser um anel de órbitas periódicas. Vamos admitir que este sistema é cooperativo, sendo que já foi referido anteriormente que analisando este sistema para um tempo reverso encontramos um sistema competitivo, e vice-versa.

Vamos separar a prova em dois casos: $L = \omega(x)$ e $L = \alpha(x)$.

- No caso $L = \omega(x)$, suponhamos que em L existe mais do que uma órbita periódica então $Q(L)$ era um anel de órbitas periódicas no plano contendo um subconjunto aberto \mathcal{O} . Então existe um $t_0 > 0$ tal que $Q(\phi(t_0, x)) \in \mathcal{O}$. Seja y o único ponto de L tal que $Q(y) = Q(\phi(x, t_0))$. Como a igualdade $y = \phi(x, t_0)$ não se pode verificar já que isto implicaria que L era uma órbita periódica simples, então segue que

$$y \ll \phi(x, t_0) \text{ ou } \phi(x, t_0) \ll y.$$

Suponhamos que é a última condição que é verificada, tendo o outro caso tratamento análogo. Então existe $t_1 > t_0$ tal que $\phi(x, t_1)$ está tão perto de y tal que

$$\phi(x, t_0) << \phi(x, t_1).$$

Mas pelo critério de convergência (A.6.8)(podemos usá-lo visto que num sistema cooperativo o fluxo é monótono), isso implica que $\phi(x, t)$ tende para um ponto de equilíbrio, o que é impossível dada a hipótese de que em L não há pontos de equilíbrio.

- Para o caso $L = \alpha(x)$, suponhamos que $Q(L)$ consiste num anel de órbitas periódicas, e seja $C \subset L$ uma órbita periódica tal que $Q(L)$ contém $Q(C)$ no seu interior. Assim, $Q(C)$ separa $Q(L)$ em duas componentes conexas. Fixemos $a, b \in L \setminus C$ tal que $Q(a)$ e $Q(b)$ pertencem a diferentes componentes de $Q(L) \setminus Q(C)$. Como $\phi(x, t)$ visita repetidamente todas as vizinhanças de a e b quando $t \rightarrow -\infty$, $Q(\phi(x, t))$ deve atravessar $Q(C)$ numa sucessão de instantes $t_k \rightarrow -\infty$. Então, existe $z_k \in C$ tal que $Q(z_k) = Q(\phi(x, t_k))$ e consequentemente, tal como no caso anterior, ou $z_k << \phi(x, t_k)$ ou $\phi(x, t_k) << z_k$ para cada k . Passando a uma subsucessão podemos admitir que $z_k << \phi(x, t_k)$ se verifica para todo k ou que $\phi(x, t_k) << z_k$ se verifica para todo o k . Suponhamos que se verifica a última hipótese. Supomos que para todo $s < 0$ exista um ponto $w \in C$ tal que $\phi(x, s) > w$. Se $t_k < s$ então

$$\phi(x, s) = \phi(\phi(x, t_k), s - t_k) < \phi(z_k, s - t_k) \in C.$$

Dado $y \in L$ então, por definição de L , $\phi(x, s_n) \rightarrow y$ para alguma sucessão $s_n \rightarrow -\infty$. Pelo que supusemos acima, existe $w_n \in C$ tal que $\phi(x, s_n) > w_n$. Passando a uma subsucessão se necessário, podemos admitir que $w_n \rightarrow w \in C$ e $y \geq w$. Então, todo o ponto de L está relacionado por \leq com algum ponto de C .

O mesmo raciocínio se aplica a toda a órbita periódica $C' \subset L$ para a qual $Q(C')$ pertence ao interior de $Q(L)$: ou todo o ponto de L é \leq do que algum ponto de C' ou todo o ponto de L é \geq para algum ponto de C' . Como existem três órbitas periódicas diferentes em L cujas projeções estão contidas no interior de $Q(L)$, duas delas vão satisfazer a mesma desigualdade entre pontos de L e pontos da órbita. Consideremos agora o caso em que existem duas órbitas periódicas C_1 e C_2 tais que todo o ponto de L é \leq que algum ponto de C_1 e \leq que algum ponto de C_2 . O caso em que as relações opostas se verificam é tratado de forma semelhante. Se $u \in C_1$ então ele pertence a L e podemos encontrar $w \in C_2$ tal que $u < w$ (notemos que a igualdade não pode ser verificada já que os pontos pertencem a duas órbitas diferentes). Mas $w \in L$, e podemos encontrar $z \in C_1$ tal que $w < z$. Consequentemente, $u, z \in C_1$ satisfazem a relação $u < z$, contrariando a proposição A.6.9. Fica assim concluída a prova do teorema.

Bibliografia

- [1] R. M. Anderson, R. M., May, Population biology of infectious diseases I., Nature 180, (1979), pp. 361-367;
- [2] R. M. Anderson, R. M. May, (eds.) Population Biology of Infectious Diseases, New York Heidelberg Berlin, Springer, (1982a),, pp. 149-176;
- [3] R. M. Anderson, and R. M. May. eds, Infectious diseases of humans: dynamics and control, Oxford University Press, Oxford, UK, (1991);
- [4] F. Brauer and C. C. Chávez, Mathematical models in population biology and epidemiology,Texts Applied Mathematics 40, Springer, 2001;
- [5] S. Busenberg and P. Van Den Driessche, Analysis of a disease transmission model in a population with varying size, J. Math. Biol., 28 (1990), pp. 257-270;
- [6] G. Butler and P. Waltman, Persistence in dynamical systems, Proc. Amer. Math. Soc. 96, (1986), pp. 425-430;
- [7] O. Dieckmann, J. A. P. Heesterbeek e J. A.J. Metz., On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, J. Math. Biol.,28 (1990), pp.365-382; 1990
- [8] K. Dietz, Transmission and control of arbovirus diseases, in Epidemiology, K. L. Cooke, ed., SIAM, Philadelphia, (1975), pp. 104-121;
- [9] H. I. Freedman, S. Ruan and M. Tang, Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set, J. Dynam. Diff. Equat. 6, (1994), pp. 583-600;
- [10] L. Q. Gao e H. W. Hethcote, Disease transmission models with density-dependent demographics, J. Math. Biol., 30 (1992), pp. 717-731;
- [11] H. W. Hethcote, The mathematics of infectious diseases, SIAM vol. 42, n.^o 4, Philadelphia, 2000, pp. 599-653;

- [12] H. W. Hethcote, e S. A. Levin, Periodicity in epidemiological models, in Applied Mathematical Ecology, L. gross, T. G. Hallam, e S. A. Levin, eds., Springer-Verlag, Berlin, (1989), pp. 193-211;
- [13] M. W. Hirsch, Systems of differential equations that are competitive or cooperative. IV: Structural stability in three-dimensional systems SIAM,J.Math.Anal.21(1990) pp. 1225;
- [14] M. Y. Li, J. R. Graef, L. Wang and J. Karsai, Global dynamics of an SEIR model with varying total population size, Math. Biosci., 160 (1999), pp. 191-213;
- [15] M. Y. Li and J. S. Muldowney, Global stability for the SEIR model in epidemiology, Math. Biosci., 125 (1995), pp. 155-164;
- [16] W. M. Liu, H. W. Hethcote and S. A. Levin, Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates, J. Math. Biol., 25, (1987), pp. 359-380;
- [17] R. M. May, R. M. Anderson, Population biology of infectious diseases II. Nature 280, (1979), pp. 455-461;
- [18] J. Mena-Lorca and H. W. Hethcote, Dynamic models of infectious diseases as regulator of population sizes, J. Math. Biol., 30 (1992), pp. 693-716;
- [19] J. S. Muldowney, Compound matrices and ordinary differential equations, Rocky Mount. J. Math. 20, (1990), pp. 857-872;
- [20] N. Rouche, J. Mawhin, Ordinary Differential Equations, Stability and Periodic Solutions, Pitman Publishing Limited, 1980;
- [21] D. A. Sánchez, Ordinary differential equations and stability theory: an introduction, W. H. Freedman and Company, 1968;
- [22] D. Schenzle, K., Dietz, Critical population sizes for endemic virus transmission. In: Fricke, W., Hinz, E. (eds) Raumlichepersitenz persistenz und diffusion von krankheiten.(Heidelb. Geogr. Arbeiten, vol. 83) Heidelberg, (1986);
- [23] H. L. Smith, Monotone dynamical systems, an introduction to the theory of competitive and cooperative systems, Am. Math. Soc., Providence 1995;
- [24] J. Sotomayor, Lições de equações diferenciais ordinárias, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979;
- [25] H. R. Thieme, Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, New Jersey, 2003.