Systems Biology Club
Universidade Federal do Ceará
Workshop de capacitação 2013.2

Órbitas de sistemas dinâmicos e diagramas de bifurcação em Python

Renato Marques de Oliveira

Neste tutorial vamos estudar técnicas importantes e simples para a exploração de sistemas dinâmicos. A principal utilidade deste documento é introduzir o leitor aos algoritmos usados para gerar os gráficos qualitativos de sistemas dinâmicos. Não é necessária a compreensão letra-por-letra dos scripts reproduzidos aqui, apenas se propõe que o leitor entenda o que está acontecendo por detrás do código: a motivação pelo qual ele foi escrito.

Reconceituando, um sistema dinâmico é um modelo formal (matemático) de um processo envolvendo diferentes elementos. Utilizamos o termo "sistema" para delimitar fronteiras no mundo real: dizemos que o nosso organismo é um grande sistema constituído de um conjunto de sistemas, como o sistema circulatório, o sistema digestório e o sistema linfático. Ao mesmo tempo, cada ser humano pertence a um ecossistema (mesmo que isso não seja óbvio nos centros urbanos), e toda a biosfera, a superfície e o interior da Terra pertencem ao sistema solar. Um sistema dinâmico é uma forma de representação quantitativa de modo a auxiliar na nossa compreensão do sistema original.

Sistemas dinâmicos geralmente variam com o tempo, e são totalmente descritos pelas três seguintes partes:

Variável independente Em suma, todo o sistema dinâmico evolui de acordo com o tempo, que é escolhido como a variável independente do qual todas as outras variáveis vão depender. No entanto, além do tempo, também é comum adotar o espaço como variável independente.

Variáveis dependentes São os elementos (as diferentes partes) de um sistema que se conectam e interagem ao longo do tempo. As variáveis dependentes são por sua vez funções da variável independente (pois variam com o tempo).

Regra de evolução Uma função das variáveis dependentes que determina as relações entre elas e o modo como elas evoluem com o tempo.

A grande utilidade desse formalismo é a compreensão completa do comportamento do sistema modelado. Claro, todo modelo é uma aproximação, e é justamente escolhendo modelos úteis para as situações que queremos estudar que podemos compreender bastante sobre o nosso sistema, dentro do âmbito do modelo. Um dos objetivos deste minicurso é a introdução de técnicas para a análise do comportamento de sistemas dinâmicos. Para tanto, vamos começar com um modelo bem simples.

Digamos que nós queremos montar um biorreator para a produção de um metabólito. Vamos supor condições tais que não precisamos nos preocupar com a capacidade máxima do reator. Nosso sistema será constituído de três partes, a taxa de produção do metabólito (por unidade de tempo), a concentração do metabólito (a cada unidade de tempo) e o tempo; respectivamente a regra de evolução, a variável dependente e a variável independente. Além disso, vamos fazer medidas do reator em intervalos regulares, de modo que nosso modelo vai evoluir com o tempo de forma discreta (ao invés de contínua). Para definir nosso modelo, apresentamos as relações entre todas as partes através de uma equação:

$$F(x) = x^2 + c \tag{1}$$

onde x é a concentração de metabólito no instante t, $F(x)$ é a concentração de metabólito no instante $t+1$ e c é um parâmetro que representa algo como a extração ou a complementação de metabólito, de acordo com o sinal. No caso, temos um modelo simplificado de produção metabólica. Expressamos a produção através da própria concentração de metabólito, numa espécie de feedback positivo, desconsiderando ou simplificando caminhos intermediários.

Para entendermos a dinâmica do nosso sistema, começamos buscando pelos pontos mais evidentes: a concentração de equilíbrio. Quantas e quais concentrações de equilíbrio podemos ter? Bom, temos que, no equilíbrio, a concentração de metabólito não varia. Portanto, substituímos a concentração de equilírio x^* na equação 1 e calculamos o seu valor:

$$x^* = (x^*)^2 + c$$
$$(x^*)^2 - x^* + c = 0$$
$$x^*_- = \frac{1-\sqrt{-4c+1}}{2}\ ;\ x^*_+ = \frac{1+\sqrt{-4c+1}}{2} \tag{2}$$

temos portanto não mais que dois possíveis pontos de equilíbrio. Vemos que se $c > \frac{1}{4}$, não há equilíbrio; se $c = \frac{1}{4}$, há um equilíbrio; e se $c < \frac{1}{4}$, há dois equilíbrios. Neste ponto já podemos fazer o gráfico de $F(x)$. Lembrando que, em Python, comentários são marcados com #.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
## A linha acima é necessária para uso de caracteres latinos ##
# Este é um comentário. Tudo o que estiver escrito após o "#"
# será ignorado pelo interpretador.
```

```
from numpy import *
from pylab import *

# Antes de mais nada, carregamos o pacote de funções
# matemáticas "numpy" e o pacote de criação de gráficos
# "matplotlib", que é distribuído sob o nome de "pylab".

def f(x,c):
    return x**2 + c

# "def f(x,c)" é a sintaxe de declaração de uma função chamada
# "f" que recebe "x" e "c" como argumentos. ":" denota que há um
# bloco de comandos a partir da linha seguinte, pertencente à
# função "f". Neste caso, o bloco é formado por apenas um comando:
# retorne o valor de x**2 + c, lembrando que x**2 é a sintaxe do
# Python para a função quadrado.

x = linspace(-2,2,30)

# A função "linspace(a,b,c)" retorna um vetor de (a + b)/c
# elementos, iniciando em "a", terminando em "b", espaçados
# por "c". Ela gera a sequência de valores de x que vamos passar
# à função para plotagem.

plot(x, f(x,.05))

# A função "plot(a,b)" plota o vetor "b" contra o vetor "a",
# ambos de mesmo tamanho, na forma de pontos {(a1,b1),...,(an,bn)}
# se a = [a1,...,an] e b = [b1,...,bn]. O comando "f(x,.5)"
# gera um vetor de 30 elementos que corresponde à imagem do
# vetor "x" sob a função "f".

show()

# Já que o Python não mostra instantaneamente os gráficos
# gerados, precisamos pedir para que eles sejam mostrados
# através do comando "show".
```

O gráfico obtido deverá parecer com a figura 1.

Tomei a liberdade de adicionar a linha verde através do comando `plot([0,2],[0,2])`. Este comando gera uma linha que conecta os pontos $(0,0)$ e $(2,2)$, representando uma reta onde $x = x$. Logo, temos que os pontos de equilíbrio $(x_-^*, F(x_-^*))$ e $(x_+^*, F(x_+^*))$ de $F(x)$ em azul devem estar na interseção com a reta verde.

Em um curso de Cálculo introdutório, é neste ponto que costumávamos parar. Mas para continuar com a análise, temos que responder questões como: se

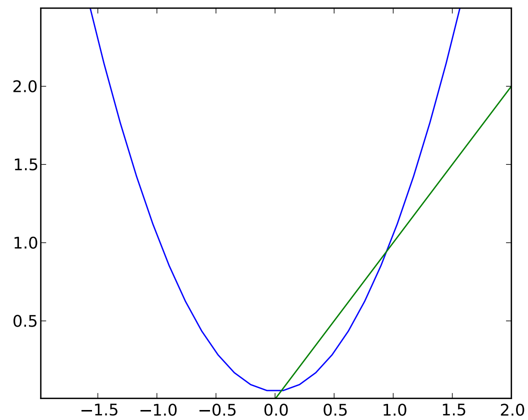


Figura 1: Gráfico de $F(x)$ com $c = \frac{1}{20}$.

o sistema iniciar com uma concentração $x = 1$, em qual dos pontos de equilíbrio ele "estacionará"? Como o sistema se aproxima dos pontos de equilíbrio? Aliás, o sistema chega realmente a se aproximar dos pontos de equilíbrio? Para tanto, é necessário introduzir o conceito de órbita.

Definição A *órbita* de um sistema discreto é o conjunto de pontos visitados pelo sistema a cada intervalo de tempo. (Tecnicamente, uma órbita é uma sequência de iterações da regra de evolução de um sistema dinâmico discreto sobre um valor inicial das variáveis dependentes)

Para observar a órbita do nosso sistema, precisamos escolher um valor inicial x_0. Em seguida, calculamos a posição do sistema no instante seguinte por $x_1 = F(x_0)$. Depois, repetimos o procedimento, $x_2 = F(x_1)$ e assim por diante, até o instante n. A posição no instante n é dada por

$$\underbrace{F(F(...(F(x_0))))}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{F \circ F \circ ... \circ F(x_0)}_{n \text{ vezes}} = F^n(x_0)$$

$F^n(x_0)$ é uma forma abreviada de expressar "n iterações de F sobre o valor inicial x_0", e não serve para representar uma potência. A órbita do nosso sistema vai ser a sequência dada por

$$\{x_0, F(x_0), F^2(x_0), ..., F^n(x_0)\} \text{ ou } \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Podemos plotar a nossa órbita de acordo com o tempo, assim como podemos inseri-la no gráfico da figura 1. Executamos a segunda opção na figura 2(a). Vamos explicar o que está acontecendo nesta figura. Iniciamos com o valor

$x_0 = 0.5$. No gráfico, representamos isso como uma linha que sobe do eixo X a partir de $x = 0.5$ até a curva azul da função em $F(0.5) = 0.3 = x_1$. Em seguida, traçamos uma linha até a reta verde $x = x$. O ponto que atingimos após traçar essa linha é $(F(x_0), F(x_0))$, pois estávamos na altura de $F(x_0)$, e seguimos nessa altura até a reta verde onde $x = F(x_0)$ e $y = F(x_0)$. Desta forma, chegamos à localização x_1 no eixo X. Em seguida, repetimos o procedimento anterior, e traçamos uma linha reta até o gráfico azul de $F(x)$ para descobrirmos $F(x_1) = 0.14 = x_2$. Mais uma vez, traçamos uma linha até a reta verde $x = x$ para descobrir a localização de x_2 no eixo X. Repetindo esse processo n vezes, descobrimos a trajetória do sistema ao longo do gráfico de $F(x)$, representada pelas linhas vermelhas, até o instante n. Na figura 2(a), notamos que a trajetória tende ao equilíbrio menor, (x_-^*, x_-^*).

Na figura 2(b), plotamos três trajetórias diferentes ao mesmo tempo, todas próximas do equilíbrio maior (x_+^*, x_+^*). Notamos que as órbitas parecem fugir desse equilíbrio. O código para gerar esses gráficos é significativamente mais complexo e será colocado ao final do tutorial.

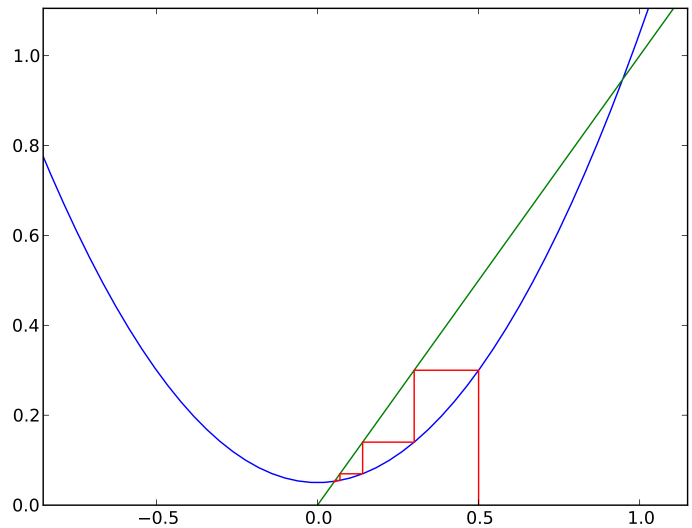
Outra forma de plotar a órbita do nosso valor inicial é fazendo um gráfico de $F(x) \times$tempo, como representado na figura 3. Note que órbitas iniciando abaixo de $x_0 = x_+^* \approx 0.94$ tendem à x_-^*, e a órbita de $x_0 = 0.955$ cresce violentamente após algumas iterações para longe de x_+^*. Apesar das órbitas próximas fugirem de x_+^*, note pela figura 4 que uma órbita iniciada em x_+^* permanecerá estática, pois afinal x_+^* é um ponto de equilíbrio!

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from pylab import *

def f(x0,c,n):
    x=zeros(n)
    x[0] = x0
    for i in range(1,n):
        x[i] = x[i-1]**2 + c
    return x

t = 10
plot(range(t),f(.5,.05,t))
show()
```

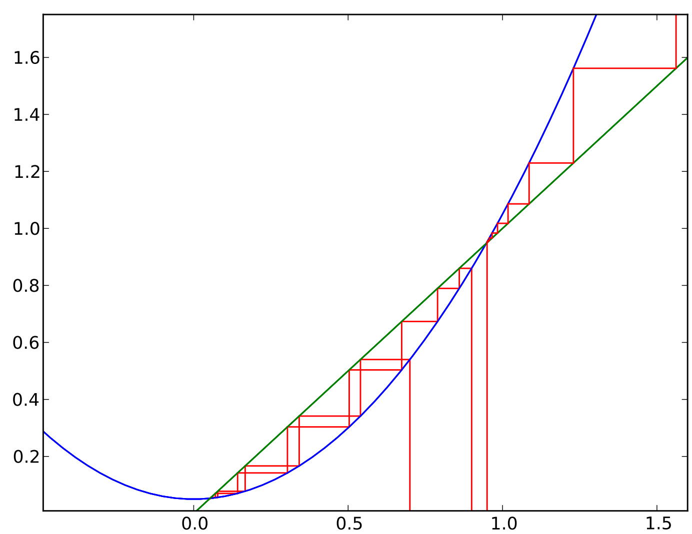
`f(x0,c,n)` é uma função que é iterada `n` vezes sobre o valor inicial `x0`, possuindo um parâmetro ajustável `c`. `x = zeros(n)` declara um vetor de tamanho n que guardará os `n` valores `x0,x1,...,xn` da órbita de `x0`.

À cada iteração do loop, a função `F(x) = x**2 + c` será iterada sobre a posição anterior `x[n - 1]`. O comando `range(1,n)` gera uma lista iniciada em 1 porque a posição `x[0]` já está determinada pelo nosso valor inicial.

`t = 10` declara a quantidade de passos que calcularemos, e logo abaixo plotamos a função `f` com valor inicial `x0 = 0.5`, parâmetro `c = 0.05` iterada por `t = 10` passos.



(a) Órbita de $F(x)$ iniciando em $x_0 = 0.5$ $(c = \frac{1}{20})$



(b) Órbitas de $F(x)$ iniciando em $x_0 = 0.7$, 0.9 e 0.95 $(c = \frac{1}{20})$

Figura 2: Órbitas de $F(x)$ plotadas no gráfico $x \times F(x)$.

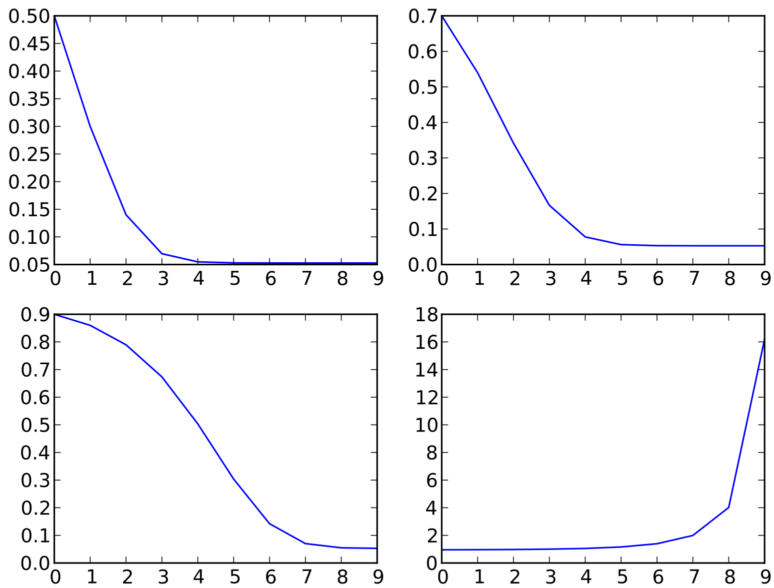


Figura 3: Órbitas dos valores iniciais $x_0 = 0.5, 0.7, 0.9$ e 0.955, respectivamente da esquerda para a direita, de cima à baixo. As órbitas são acompanhadas até o instante $t = 9$. ($c = \frac{1}{20}$)

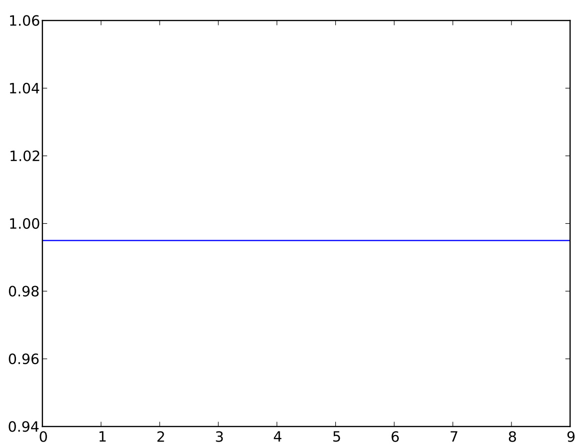


Figura 4: Órbita de $x_0 = x_+^*$. ($c = \frac{1}{20}$)

Ao invés de chamarmos (x^*, x^*) de pontos "de equilíbrio", o mais apropriado é nos referirmos a eles como *pontos fixos*. Um ponto fixo de uma função é aquele para o qual $F(x_{n+1}) = F(x_n)$. Inspirados pelos gráficos já plotados, podemos inferir que o equilíbrio menor é estável, enquanto que o equilíbrio maior é instável. Em termos técnicos, o ponto fixo menor é atrator, enquanto que o ponto fixo maior é repulsor.

Definição Um ponto fixo atrator é um ponto x^* dentro de um intervalo aberto I para o qual, se $x_0 \in I$, então $F^n(x_0) \in I$ para todo n, além disso $F^n(x_0) \to x^*$ quando $n \to \infty$.

Definição Um ponto fixo repulsor é um ponto x^* dentro de um intervalo I para o qual, se $x_0 \in I$ e $x_0 \neq x^*$, existe n tal que $F^n(x_0) \notin I$.

Essas definições não passam de formas técnicas de dizer que pontos fixos atratores atraem órbitas para si, e pontos fixos repulsores repelem órbitas de si. Como descobrir se um ponto fixo é atrator ou repulsor? Uma dica: observe a derivada de $F(x)$ no ponto fixo. Se $|F'(x^*)| > 1$, a distância

$$F^{n+1}(x) - F^n(x) = F'(x)(x_{n+1} - x_n)$$

tende a crescer a cada iteração de $F(x)$, para x próximos de x^*, e a órbita acaba se distanciando de x^*. Caso $|F'(x^*)| < 1$, essa distância tende a diminuir, e o ponto fixo x^* acaba atraindo órbitas. Caso $|F'(x^*)| = 1$, não podemos afirmar.

A esta altura, sabemos muito bem como é o comportamento completo de $F(x)$ quando $c = \frac{1}{20}$. Qualquer valor inicial $x_0 < x_+^*$ tende à x_-^*, qualquer valor inicial $x_0 > x_+^*$ tende à infinito, e quando o sistema atinge os pontos fixos lá ele permanece. No entanto, tecnicamente existe uma infinidade incontável de valores de c para os quais não descrevemos a dinâmica de $F(x)$. Vamos fazer isso agora.

Sabemos que a existência de pontos fixos depende do parâmetro c, e caso $c > 1/4$, de acordo com a equação 2 não haverão pontos fixos e $F^n(x) \to \infty$.[1] Caso $c = 1/4$, a equação 2 diz que $x_-^* = x_+^* = x^* = 1/2$, ou seja, temos apenas um ponto fixo, sendo que $F'(x^*) = 2x^* = 1$. Por fim, caso $c < 1/4$, temos dois pontos fixos, o menor sendo atrator e o maior sendo repulsor.

Agora, se olharmos bem para x_-^*, quando $c \leq -3/4$ a equação 2 nos diz que $x_-^* \leq -1/2$ e portanto que $F'(x_-^*) \leq -1$. O ponto fixo x_-^* mudaria de atrator para repulsor! Sem contar que no parágrafo acima encontramos um ponto fixo de estabilidade indeterminada. Para estudar esses fenômenos, utilizamos a **Teoria da Bifurcação**. Como uma imagem vale mais do que mil palavras, vou apresentar esta teoria com um gráfico, um **diagrama de bifurcação**.

A figura 5, um diagrama de bifurcação, mostra um gráfico dos pontos fixos *versus* o parâmetro c. Neste gráfico está resumido quase todo o nosso conhecimento sobre o sistema $F(x) = x^2 + c$. Se traçarmos uma linha vertical em

[1] pois $F(x)$ é uma função par, simétrica sobre a origem e estritamente crescente no intervalo $[0, \infty)$

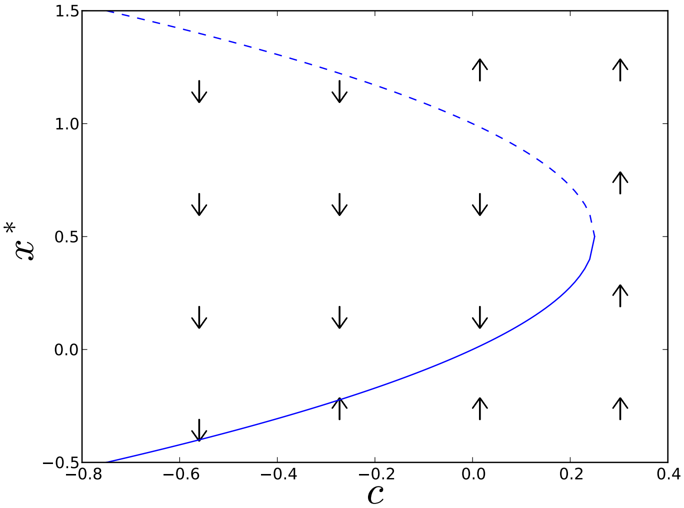


Figura 5: Diagrama de bifurcação de $F(x)$ para $-3/4 < c < 1/2$. Linhas contínuas representam atratores e linhas pontilhadas representam repulsores. As setas indicam a direção que as órbitas seguem em seus pontos de origem.

qualquer ponto do eixo c deste gráfico, obteremos um retrato do sistema que captura toda a sua dinâmica para o parâmetro c de escolha.

O código para a confecção da figura 5 encontra-se abaixo. Não foi incluído o código que gera as setas.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from pylab import *

def x_1(c):
    return (1 - sqrt(1 - 4*c))/2.

def x_2(c):
    return (1 + sqrt(1 - 4*c))/2.

c = linspace(-.75,.25,100)
plot(c,x_1(c),'b')          # 'b' é um argumento opcional
plot(c,x_2(c),'--b')        # 'b--' quer dizer "linha tracejada azul"
xlabel('$c$',fontsize=30)   # rótulos dos eixos x e y, tipografados
ylabel('$x^*$',fontsize=30) # e com tamanho de fonte personalizado.
show()
```

Interpretação bioquímica do modelo matemático

Enfim, agora que temos uma imagem tão geometricamente completa do nosso modelo na figura 5, o que podemos dizer do sistema original a partir disso? Primeiro e mais importante de tudo, podemos checar nossas suposições iniciais. Não fui totalmente honesto à princípio, pois não declarei as unidades que utilizaríamos para nossas variáveis. x é a concentração de metabólito, mas seria ela em mol/L, porcentagem ou pressão parcial (obviamente, temos por análise dimensional que $F(x)$ e c possuem as mesmas unidades de x), por exemplo? E quanto ao tempo t? Apesar de não entrar diretamente na equação, t representa a unidade de tempo relevante do estudo e norteará a magnitude dos outros parâmetros estudados. Para muitos modelos populacionais importantes, a unidade de tempo t considera é um ano, mas quando falamos de populações humanas ou bacterianas, um ano tende a ser uma unidade de tempo muito inadequada.

Neste tutorial, estamos fazendo alguns passos na ordem inversa: escolhendo as suposições antes de definir o modelo, mas isto é apenas para ilustrar o poder de generalização dos modelos. Observemos a figura 5: o ponto fixo maior sempre é repulsor (em termos mais familiares, o equilíbrio maior sempre é instável). Se temos uma população inicial superior à x_+^*, ela crescerá, do contrário, diminuirá **até zero**, na direção de x_-^*. Isso é muito importante: num sistema químico ou biológico real, concentrações e populações jamais atingem valores negativos, não faria sentido! Para entender melhor, vamos considerar a reta vertical $c = 0$. Lembre que no início nós definimos c como um fator externo que retira ou repõe a concentração do nosso metabólito. Na reta $c = 0$, o modelo reduz para

$$F(x) = x^2 \tag{3}$$

E os pontos fixos se tornam

$$x_-^* = 0, x_+^* = 1 \tag{4}$$

Ou seja, a concentração de metabólito no instante $t + 1$ só depende da concentração no instante anterior, sem influência externa. Portanto, se a concentração inicial for 1, a concentração permanecerá em 1. Qualquer concentração maior do que 1 crescerá de forma não-linear. Qualquer concentração menor do que 1 tenderá a diminuir até 0, o ponto fixo menor. Ignoramos concentrações negativas. Nestes termos, nossa regra de evolução, equação 3, se comporta quase exatamente como um crescimento exponencial $G(x) = \mu x$. Fica bastante fácil de interpretar o modelo geral, $F(x) = x^2 + c$, pensando nele como um modelo $G(x)$ com a adição de um fator de reposição/retirada. O efeito do parâmetro c é apenas de reduzir/aumentar o ponto fixo maior, ignorando o fato de o ponto fixo menor atingir valores negativos para $c < 0$ (apenas mapeamos valores negativos de x de volta para o zero e lavamos as mãos).

Com isso, temos que é inadequado adotar variáveis *adimensionais* para x, tais como porcentagem e frações totais, pois o modelo não apresenta comportamento interessante entre 0 e 1 - é recomendado que se utilizem concentrações ou quantidades absolutas, como peso, volume ou molar.

Exercícios

1 Relembre o caso $F(x) = x^2 + c$, com $c = 1/4$. Neste caso, tínhamos apenas um ponto fixo, com $F'(x^*) = 1$. Descreva as trajetórias de órbitas iniciando ao redor desse ponto. O que ocorre com uma órbita iniciando em $x_0 < 1/4$? E se $x_0 > 1/4$, ou $x_0 = 1/4$? O que podemos inferir sobre a estabilidade desse ponto? Utilize o diagrama de bifurcação, ou plote as respectivas órbitas caso precise visualizar o que acontece.

2 Ainda no caso $c = 0$. Existe diferença no modo pelo qual uma órbita iniciando em x_0 é atraída para x_-^* nos casos $x_0 < x_-^*$ e $x_0 > x_+^*$. Descreva essa diferença e explique por que ela acontece. (**Dica:** você pode inclusive utilizar uma calculadora para calcular $F(x_0), F^2(x_0), F^3(x_0)$... e obter as órbitas pedidas.)

3 Na questão 1, estudamos o caso $c = 1/4$ em que há apenas um ponto fixo. Quando $c > 1/4$ não temos pontos fixos, mas quando passamos pelo ponto $c = 1/4$ surge um ponto fixo que se "bifurca" em dois outros, x_-^* e x_+^*. É o estudo dessas bifurcações que caracteriza a Teoria da Bifurcação. Existem outras bifurcações que ocorrem para a nossa função $F(x) = x^2 + c$. Vamos analisar o caso $c = -3/4$, onde vimos que $F'(x^*) = -1$. Consideramos então

$$F(x) = x^2 - 3/4 \tag{5}$$

para a qual temos dois pontos fixos $x_-^* = -3/2$ e $x_+^* = 1/2$.

a) Plote a órbita de alguns pontos x_0 ao redor de $x_+^* = 1/2$. Descreva o comportamento "periódico" das órbitas. (**Dica:** você pode utilizar o código da figura 2 para executar esta tarefa. Por exemplo, após executar o código da figura 2, execute as seguintes linhas

```
def f(x,c):
    return x**2 + c
cobweb(f,-2,2,-3/4,1/3)
```

para plotar uma órbita iniciando em $x_0 = 1/3$ com $c = -3/4$.)

b) Para calcular o ponto x_2 na órbita de x_0, utilizamos $x_2 = F(x_1) = F(F(x_0))$, sendo que

$$F^2(x) = F(F(x)) = x^4 + 2cx^2 + c(1 + c) \tag{6}$$

que pode possuir quatro pontos fixos:

$$x_1^* = \frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2}, x_2^* = \frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2}, x_3^* = \frac{1 - \sqrt{-4c + 1}}{2}, x_4^* = \frac{1 + \sqrt{-4c + 1}}{2}$$

Pergunta-se: É possível que existam os pontos fixos x_1^* e x_2^* quando $c > -3/4$? Qual a possível implicação disso para as órbitas de x_0 sob $F(x)$ quando o parâmetro c varia entre $c > -3/4$ e $c < -3/4$?

c) Determine a estabilidade dos quatro pontos fixos da equação 6 através de $(F^2(x_n^*))'$, $n = 1, 2, 3, 4$. Qual é a relação entre as estabilidades dos pontos fixos de $F^2(x)$, x_1^*, x_2^*, e x_3^*, e o surgimento de um ciclo para $F(x) = x^2 + c$ quando $c \leq -3/4$?

d) Observe a figura 6. Ela utiliza informações dos quatro pontos fixos de $F^2(x)$ para fornecer uma diagrama de bifurcação mais completo de $F(x)$. Localize os dois pontos de bifurcação na figura. O ponto mais à direita nós já conhecíamos: a esse tipo de bifurcação se dá o nome **sela-nó**. Ao ponto de bifurcação mais à esquerda se dá o nome **duplicação de período**. Copie esse gráfico (para uma folha de papel, por exemplo) e desenhe as setas representando as direções das órbitas assim como na figura 5. Explique porque as retas cheias e pontilhadas (pontos atratores e repulsores) tem que se alternar.

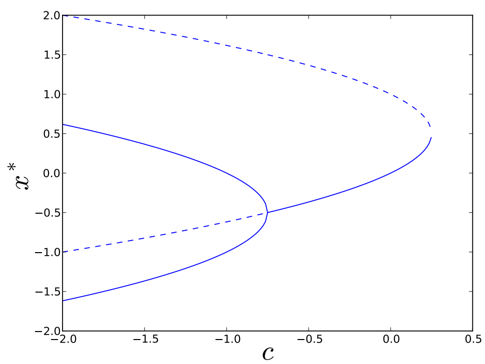


Figura 6: Diagrama de bifurcação da equação 2 para $-2 < c < \frac{1}{2}$.

Obs. Note que os pontos fixos x_1^* e x_2^* só são *estritamente* pontos fixos para $F^2(x)$. Para $F(x)$ eles são periódicos, no sentido de que se alternam a cada dois passos. Pontos que são revisitados após um período n são chamados pontos fixos periódicos de período n. Veja a figura 7.

Código da Figura 2

```
from __future__ import division
from numpy import *
from pylab import *


def cobweb(f,start,end,p,x0,steps=10,smoothness=100):
    xv = linspace(start,end,smoothness)
    plot(xv,f(xv,p),color='b')
```

```
    plot(xv,xv,color='g')
    plot([xv[0],xv[len(xv) - 1]],[0,0],color='k')
    x = zeros(steps)
    x[0] = f(x0,p)
    plot([x0,x0],[0,x[0]],color='r')
    plot([x0,x[0]],[x[0],x[0]],color='r')
    for i in xrange(steps-1):
        x[i+1] = f(x[i],p)
        plot([x[i],x[i]],[x[i],x[i+1]],color='r')
        plot([x[i],x[i+1]],[x[i+1],x[i+1]],color='r')
    show()

def f(x,c):
    return x**2 + c

cobweb(f,-2,2,.05,.7)
cobweb(f,-2,2,.05,.9)
cobweb(f,-2,2,.05,.95)
```

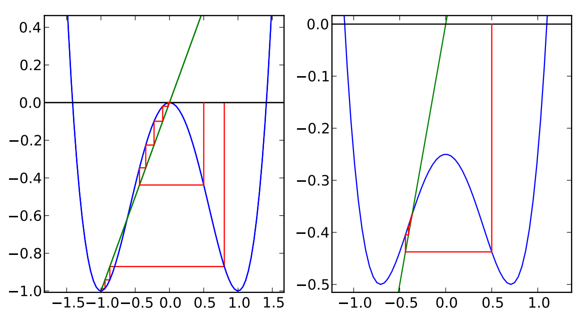


Figura 7: Gráfico de $x \times F^2(x)$, para $c = -3/4$ (esquerda) e $c = -1/2$ (direita). Note que a existência de 4 ou 2 pontos fixos para $F^2(x)$ depende da escolha do parâmetro c, que afeta o modo como o gráfico da função se curva em torno da reta $x = x$. Observe também a estabilidade de alguns dos pontos fixos.

Referências

Este tutorial foi inspirado no livro *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, por Robert L. Devaney. (1992, Addison-Wesley).