Aplicação de Equações Diferenciais na Exploração de Recursos Naturais Renováveis

Trabalho para a Disciplina de Modelagem com equações Diferenciais

Profª: Maria Izabel

Alunos: Israel da Silva Teixeira

Marlon Pirchiner

Thiago dos Santos Sousa

Introdução

- Os seres humanos são dependentes de uma série de recursos renováveis. Diferentes tipos de pescado (como salmão e linguado) e árvores das florestas, são exemplos desse tipo de recurso.

- Nesse contexto, é interessante definir uma estratégia para a exploração dos recursos que permita extrair o máximo de recursos sem que os mesmos fiquem abaixo do nível sustentável.

- Modelos matemáticos podem fornecer subsídios interessantes para a tomada de decisão em relação a exploração dos recursos naturais.

Introdução

- Em geral, é razoável supor que uma população comporte-se logisticamente.

- Ou seja, o crescimento de $P(t)$ (biomassa ou número de indivíduos de uma população) no instante t será dado pela seguinte equação diferencial

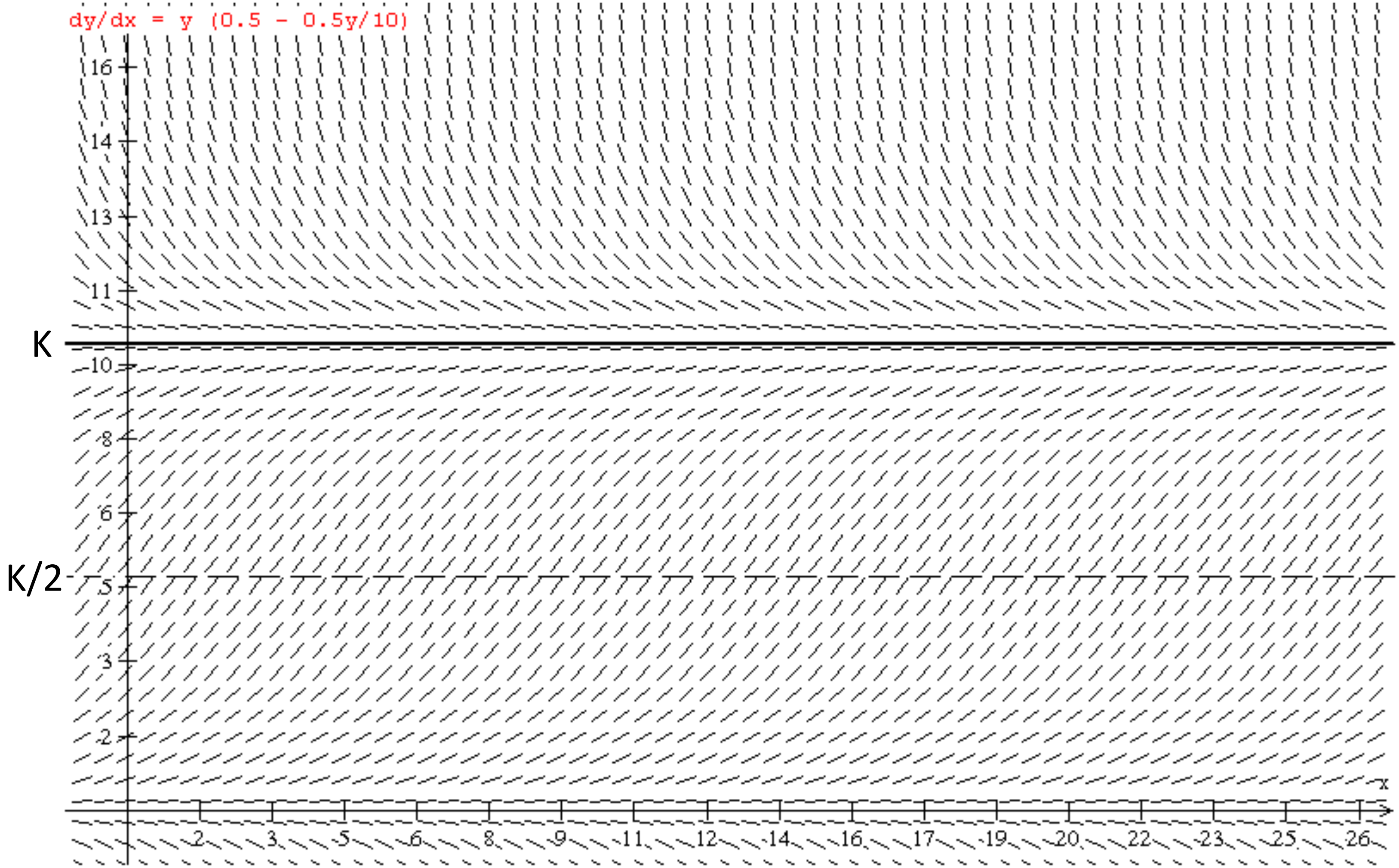
$$\frac{dP}{dt} = P(r - \frac{r}{K}P)$$

  onde $r > 0$ é a taxa de crescimento intrínseco e K é a capacidade de suporte do meio ambiente e tem como solução

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

  onde P_0 é a população inicial.

Introdução



dy/dx = y (0.5 - 0.5y/10)
K
K/2
16
14
13
11
10
8
6
5
3
2
x
2
3
5
6
8
9
11
12
14
16
17
19
20
22
23
25
26

Introdução

- Agora vamos supor que este recurso natural é explorado. Essa suposição será feita sobre duas diferentes perspectivas:

    - modelagem com a taxa de exploração constante;
    - modelagem com a taxa de exploração proporcional a população.

Taxa de Exploração Constante

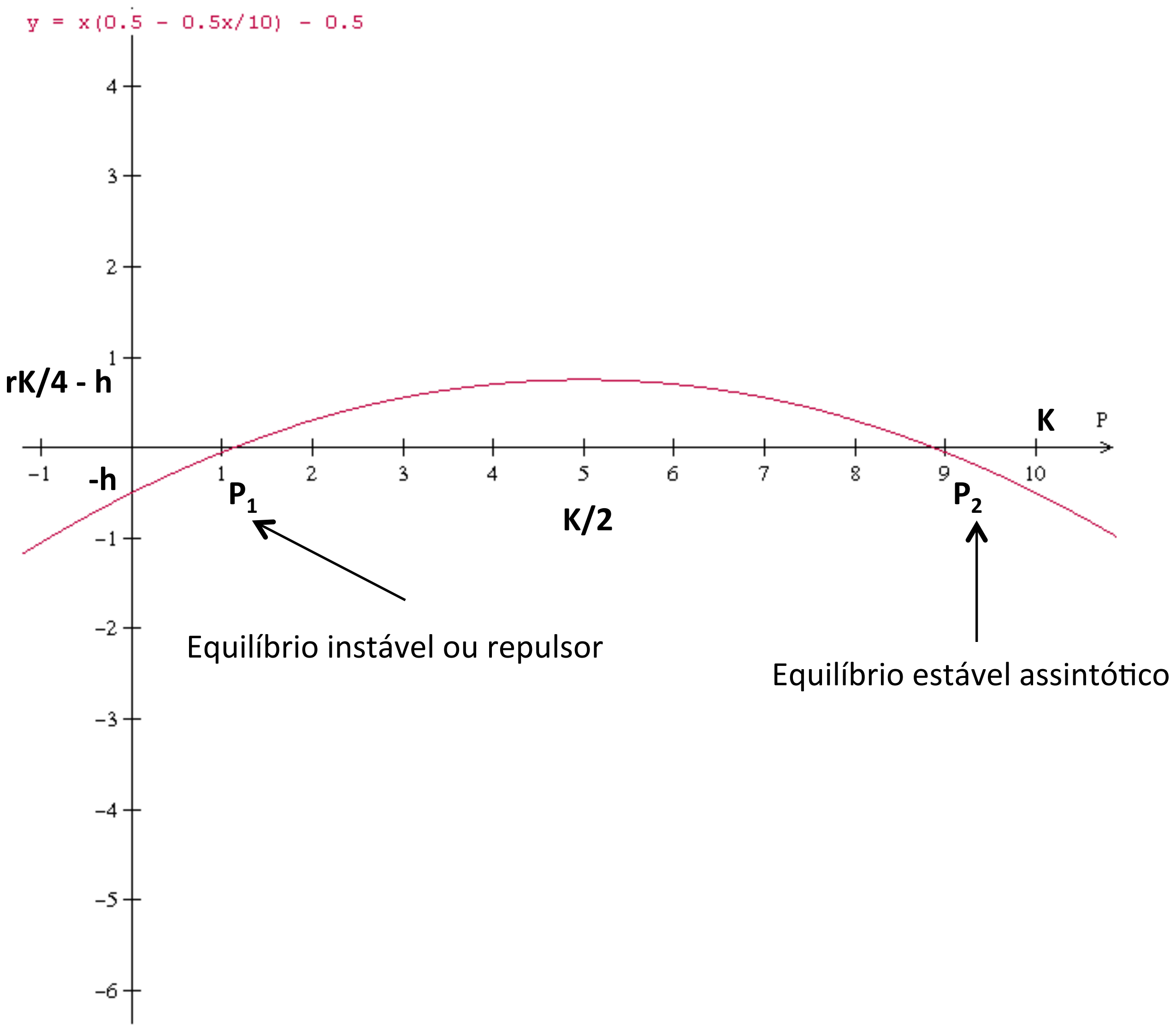
- Neste caso, vamos supor que o recurso natural é explorado a uma taxa constante *h*. Sendo assim, a equação diferencial que modela o crescimento populacional será

$$\frac{dP}{dt} = P(r - \frac{r}{K}P) - h = G(P)$$

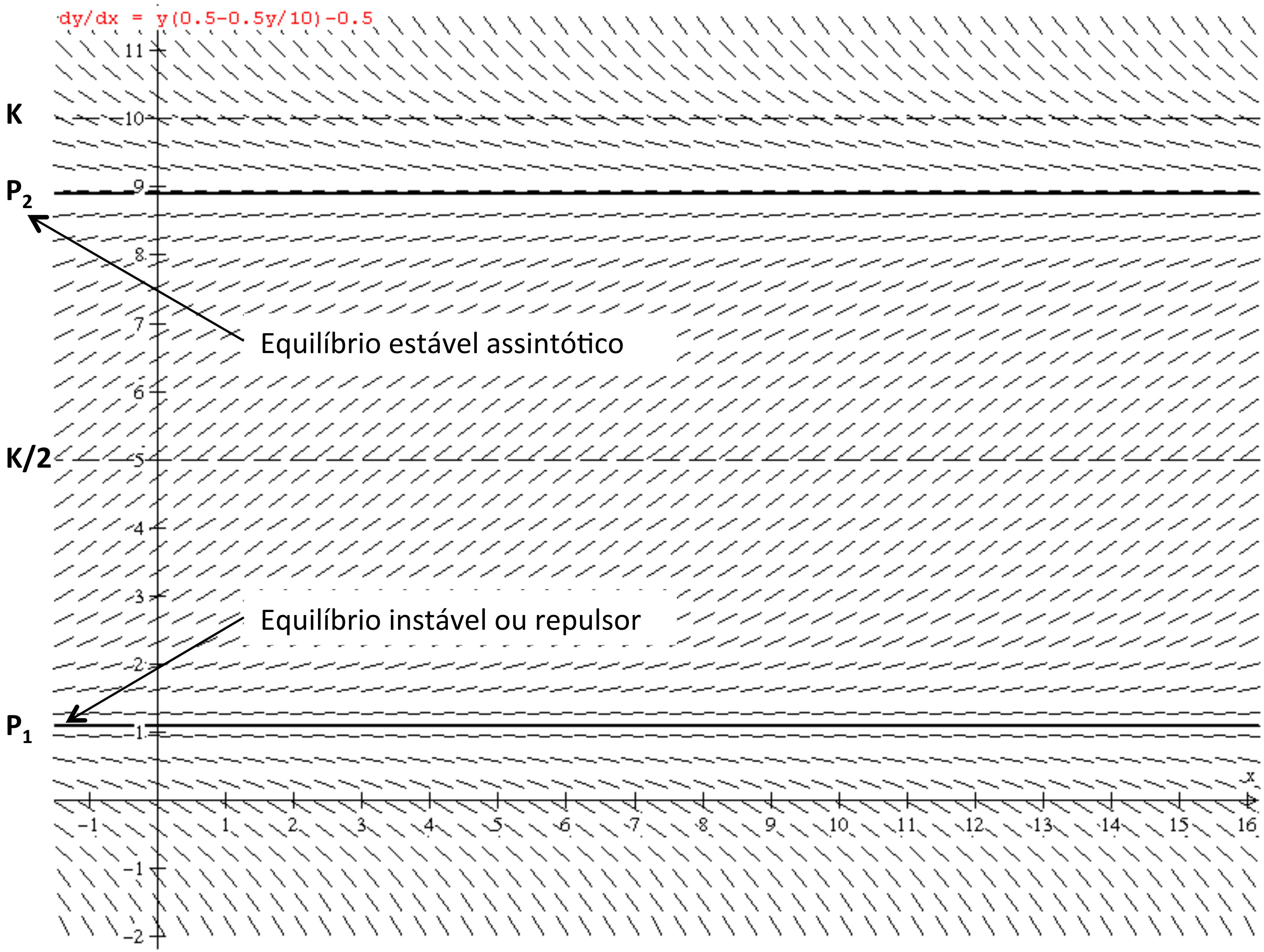
- A função *G(P)* é um polinômio de grau dois com concavidade para baixo e suas raízes são dadas por

$$P_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4Kh/r}}{2}$$

Taxa de Exploração Constante



Taxa de Exploração Constante



Taxa de Exploração Constante

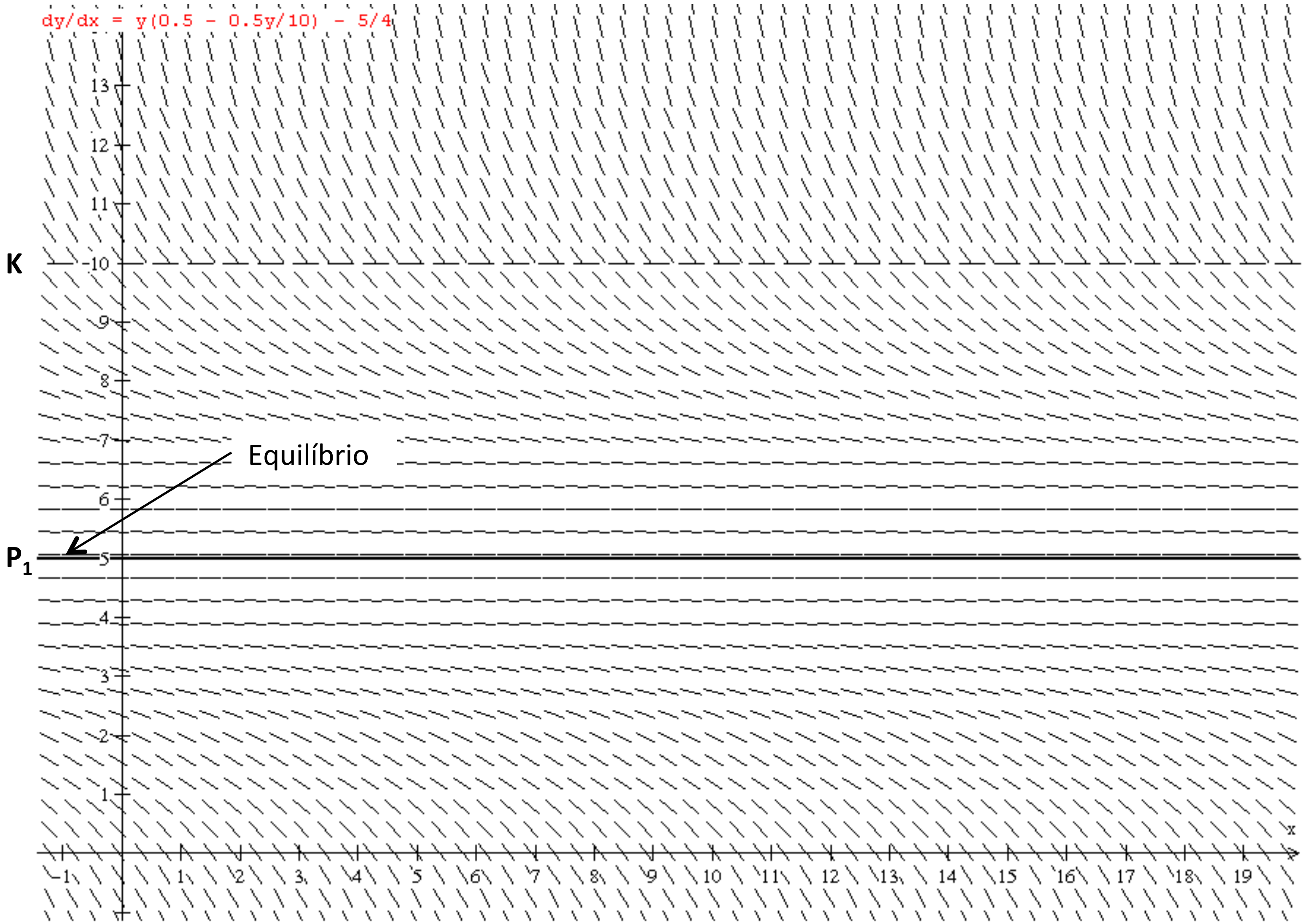
- Qual é a maior taxa de exploração (PMS – produção máxima sustentável) que mantém a população estável?

$$h = \frac{1}{4} rK$$

- A essa taxa de exploração, a função *G(P)* terá uma única raiz $P_1 = K/2$. Esse valor é uma solução da constante da equação diferencial.

- **Atenção:** Em aplicações reais os valores de *r* e *K* são estimados com uma precisão de 10%. Portanto o valor para a PMS calculado a partir destes valores pode ser grande demais, resultando em um declínio da população em direção a extinção.

Taxa de Exploração Constante



Taxa de Exploração Constante

- A solução da equação diferencial para o caso onde a taxa de exploração é constante sujeita a condição inicial *P(0)*=0 é

$$P(t) = \frac{P_2(P_0 - P_1) - P_1(P_0 - P_2)e^{-\alpha t}}{P_0 - P_1 - (P_0 - P_2)e^{-\alpha t}}$$

onde $a = r(P_2 - P_1)/K = r\sqrt{(1 - 4h/Kr)}$.

- Além disso,

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = P_2$$

Taxa de Exploração Proporcional a População

- Agora, vamos supor que o recurso natural é explorado a uma taxa proporcional ao tamanho da população P. Nesse caso, a equação diferencial que modela o crescimento populacional será

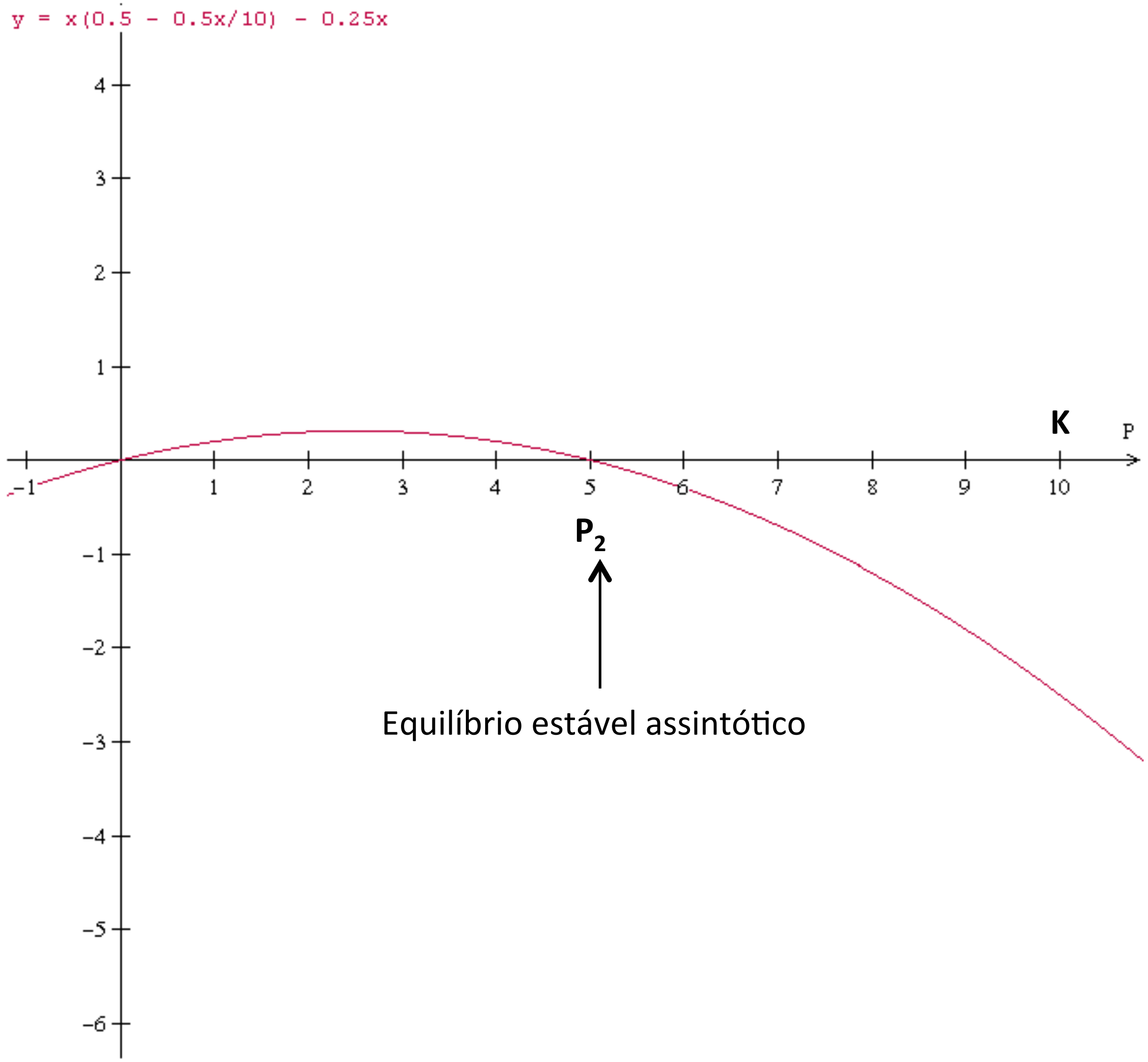
$$\frac{dP}{dt} = P(r - \frac{r}{K}P) - EP = P(r - E - \frac{r}{K}P) = F(P)$$

onde *E*>0 é uma constante denominada esforço.

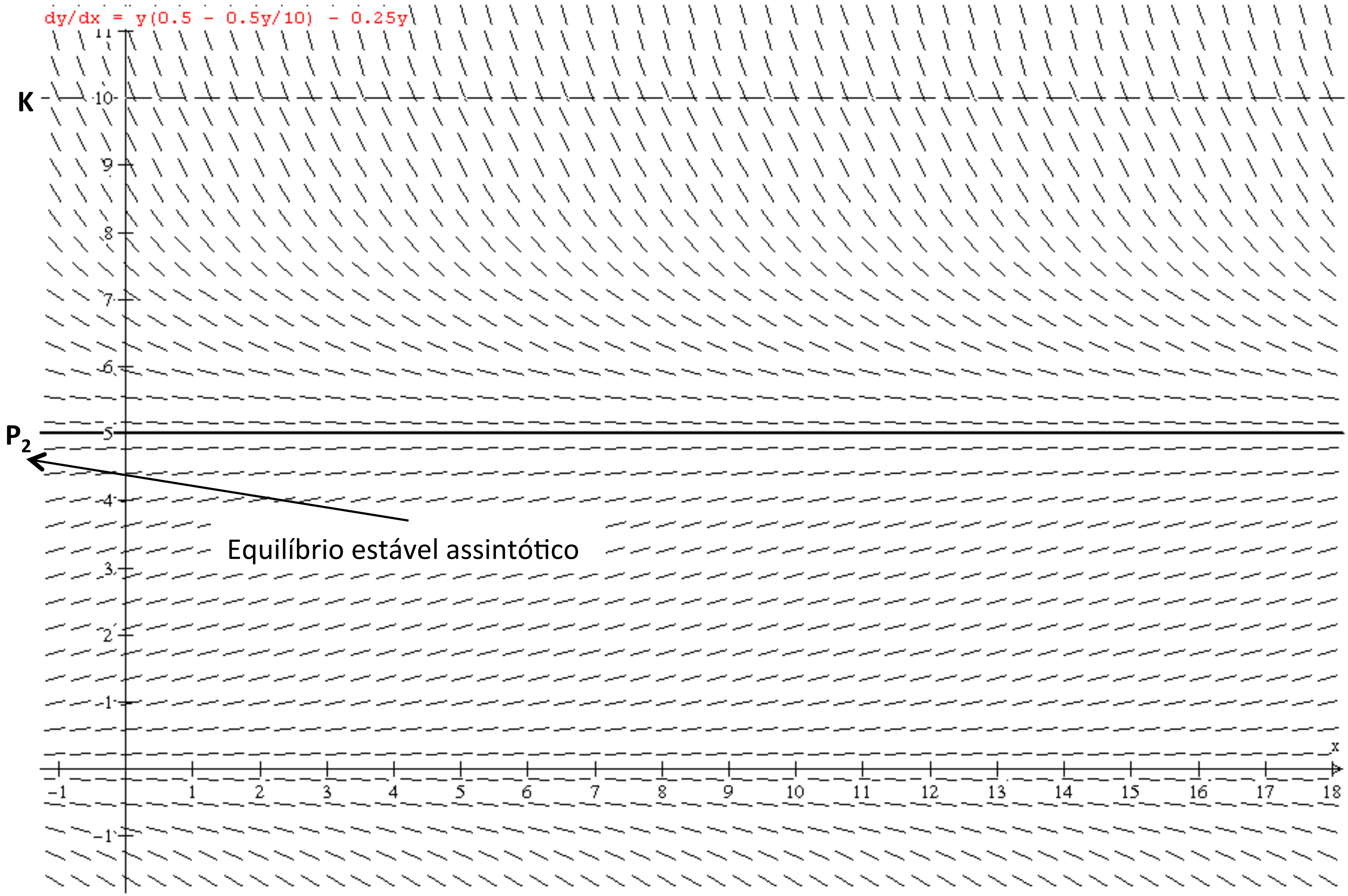
- A função *F(P)* é um polinômio de grau dois com concavidade para baixo e suas raízes são dadas por

$$P_1 = 0 \quad P_2 = K(1 - \frac{E}{r})$$

Taxa de Exploração Proporcional a População



Taxa de Exploração Proporcional a População



Taxa de Exploração Proporcional a População

- Qual é a produção máxima sustentável neste caso? A exploração sustentável será dada por

$$EP_1 = KE(1 - E/r)$$

- A função quadrática acima atinge seu máximo quando $E = r/2$ e $P_1 = K/2$. Para os valores acima, $EP_1 = Kr/4$ é a PMS.

- Obs: A taxa de exploração proporcional a população faz com que a população seja levada a extinção apenas se $E>r$.

Taxa de Exploração Proporcional a População

- A solução da equação diferencial para o caso onde a taxa de exploração é proporcional a população é

$$P(t) = \frac{(r-E)P_0}{r\,P_0/K + (r - E - r\,P_0/K)e^{-(r-E)t}}$$

- Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = K(1 - E/r)$$

Exemplos

- Clark estimou os valores r = 0,08 e K = 400.000 para a baleia Antártida, sendo o ano de 1976 correspondente a t = 0 e P_0 = P(0)=70.000.

- Considerando a taxa de exploração constante
  - ✓ Quais seriam as populações de equilíbrio para neste caso se h = 4000?
  - ✓ Qual o valor da PMS? O que acontece com a população de h = PMS?
- Considerando a taxa de exploração proporcional a população
  - ✓ Quais os valores de E e r que permitem a PMS?