

## CAPÍTULO I – CONCEITOS BÁSICOS EM MODELAGEM NUMÉRICA

1

### 1.1 - Introdução

O método científico consiste em quatro etapas:

- 1) observação de um fenômeno;
- 2) medição de parâmetros, de modo a quantificar o fenômeno;
- 3) elaboração de teorias para explicar o fenômeno;
- 4) reprodução do fenômeno em laboratório ou sua previsão.

Como exemplo da aplicação da metodologia científica, em meteorologia, são observados períodos de frio em latitudes médias da América do Sul; são realizadas medições de temperatura, pressão atmosférica, umidade e ventos; teorias sobre a geração de frentes frias em altas latitudes e sua evolução são desenvolvidas; e novos períodos de frio podem então ser previstos.

Em Oceanografia, a modelagem numérica utiliza medições e teorias sobre o comportamento do oceano, de modo a possibilitar simulações e previsões dos processos que nele ocorrem, como a circulação marítima, o transporte de sedimentos, a cadeia alimentar, etc. Em particular, a modelagem numérica hidrodinâmica utiliza medições de nível do mar, correntes e propriedades físico – químicas da água do mar e resolve numericamente as equações hidrodinâmicas básicas, de modo a reproduzir e prever a circulação marítima e a distribuição de propriedades. De fato, a modelagem da circulação constitui a base dos demais modelos em Oceanografia, visto que seus resultados são utilizados na modelagem de ondas, sedimentos, poluentes, etc ...

Há dois tipos de modelos de circulação marítima, os gerais e os específicos. Os modelos gerais procuram modelar o oceano da maneira mais completa possível, sintetizando conjuntamente diversos processos físicos, e adotando hipóteses simplificadoras e parametrizações dos processos de escala menores. Um exemplo de um modelo geral é o da circulação geral dos oceanos, que considera conjuntamente todas as componentes da circulação, devidas a ventos, marés e variações de densidade. Já os específicos procuram estudar fenômenos de forma individual, isolando-os de outros processos (até onde possível). Um exemplo de modelo específico é um modelo da circulação de maré, que evidentemente não inclui as componentes de circulação geradas pelo vento e por variações de densidade.

Uma divisão importante nos modelos em Oceanografia (hidrodinâmicos, do transporte de sedimentos, da cadeia alimentar, etc ... ) é referente a suas escalas espaciais:

- 1) grande escala: para simulações em escala global ou de bacia oceânica;
- 2) meso-escala: estuda processos em plataformas continentais; e
- 3) pequena escala: cobre regiões costeiras e estuários.

A escala está intimamente relacionada com a resolução de um modelo, definida pela distância horizontal entre os pontos de cálculo de uma grade computacional ( $\Delta x$ , “espaçamento de grade”). A evolução da informática, de certa forma, definiu ao longo dos últimos anos a resolução adotada por cada escala, como exemplificado na Tabela (1.1).

Tabela 1.1 – Evolução dos espaçamentos de grade utilizados em modelos numéricos em Oceanografia no decorrer das últimas décadas.

	Espaçamentos de grade			
Escalas	Década de 1980	Década de 1990	Década de 2000	Década de 2010
grande	100 km	10 km	1 km	0,1 km
meso	10 km	1 km	0,1 km	0,01 km
pequena	1 km	0,1 km	0,01 km	0,001 km

A resolução de um modelo define que fenômenos são efetivamente incluídos nas simulações e quais são omitidos ou simplesmente parametrizados, por possuírem distâncias horizontais características da mesma ordem (ou menor) que os espaçamentos de grade adotados. É importante notar que os espaçamentos de grade devem ser muito menores que os comprimentos de ondas das oscilações modeladas ( $\Delta x \ll L$ ), ou seja, deve haver um grande número de pontos (e espaçamentos) de grade para representar um comprimento de onda (no mínimo,  $L = 20 \Delta x$  ou  $L = 30 \Delta x$ ).

Em geral, modelos requerem dados iniciais e de contorno para o seu processamento, além de dados para calibração e validação; esses dados podem ser obtidos através de medições in situ ou remotas, ou de resultados de outros modelos. A calibração consiste na comparação de resultados do modelo com um conjunto de dados, visando obter os valores dos coeficientes de fricção e de atenuação mais adequados. Uma vez calibrado um modelo, a validação consiste na comparação de seus resultados com outro conjunto de dados, de modo a inferir a qualidade dos resultados das simulações do modelo.

É evidente que modelos, teorias e observações devem se desenvolver conjuntamente, afim que haja interação entre os mesmos, com observações resultando em teorias mais aprimoradas, que conduzem a modelos mais sofisticados, os quais, por sua vez, demandam observações melhores e possibilitam aprimorar as teorias.

Por fim, vale ressaltar a grande similaridade entre a modelagem em Meteorologia e Oceanografia, uma vez que as equações que descrevem seus processos físicos são muito semelhantes (Haltiner, 1971; Haltiner & Williams, 1980; Ramming & Kowalik, 1980; Kowalik & Murty, 1993).

## 1.2 - Método de diferenças finitas

A aplicação do método de diferenças finitas na modelagem numérica consiste em discretizar o espaço e o tempo, de modo que se possa substituir derivadas por diferenças finitas (Fortuna, 2000).

A partir da discretização do espaço  $x$  com espaçamentos  $\Delta x$  e índices  $j$  ( $x = j \Delta x$ ,  $\Delta x > 0$ ), o ponto de partida do método de diferenças finitas provém da Série de Taylor (1.1) de uma função  $f(x)$ :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (1.1)$$

Isolando a primeira derivada, tem-se:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + R \quad (1.2)$$

onde o termo de maior ordem no resíduo  $R$  é  $f''(x) \frac{\Delta x}{2!}$ .

Se  $R$  for desprezado, a aproximação (1.2) é chamada de diferença finita avançada, uma vez que  $\Delta x$  é maior que zero, sendo uma diferença finita de 2 pontos e ordem  $\Delta x$ , cuja representação é  $O(\Delta x)$ . Esta ordem representa o erro de truncamento das diferenças finitas, o que indica sua precisão.

Contudo, a série de Taylor pode ser expressa também da seguinte forma:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (1.3)$$

que, analogamente ao primeiro caso, conduz a:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + R \quad (1.4)$$

A equação (1.4) representa uma diferença finita retardada, de 2 pontos e também de ordem de precisão  $O(\Delta x)$ .

Ainda é possível subtrair (1.1) de (1.3), resultando em:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + R \quad (1.5)$$

Esta aproximação é uma diferença finita centrada, de 3 pontos e ordem de precisão  $O(\Delta x^2)$ , sendo portanto superior às outras duas. Embora de melhor precisão, a diferença centrada não pode ser aplicada no primeiro e no último ponto da grade, sendo necessárias as diferenças avançada e retardada, respectivamente

Também se pode somar (1.1) e (1.3), permitindo determinar a segunda derivada, em diferença finita centrada, com 3 pontos e ordem de precisão  $O(\Delta x^2)$ :

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + R \quad (1.6)$$

Vale lembrar que para o modelo seja de qualidade é necessário que o espaçamento de grade seja muito menor que o comprimento de onda do fenômeno a ser estudado.

Expressões similares a (1.2), (1.4), (1.5) e (1.6), referentes à coordenada  $x$ , podem ser estabelecidas para derivadas em relação às coordenadas  $y$  e  $z$  e ao tempo  $t$ . Para espaçamentos  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$  e índices  $j, k, l, n$ , são consideradas discretizações da forma  $x = j \Delta x$ ,  $y = k \Delta y$ ,  $z = l \Delta z$  e  $t = n \Delta t$ , respectivamente. Uma função de  $x, y, z, t$  será representada por:

$$f = f(x, y, z, t) = f(j\Delta x, k\Delta y, l\Delta z, n\Delta t) = f_{j,k,l}^n \quad (1.7)$$

de modo que as diferenças finitas, escritas em termos de índices, para  $x$  e  $t$ , se encontram na Tabela 1.2.

Tabela 1.2 – Diferenças finitas no espaço x e no tempo t, de 1ª e 2ª ordens, de 2 e 3 pontos, laterais (avançadas ou retardadas) e centradas.

Espaço	Tempo	
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x}$	$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}$	1ª ordem 2 pontos avançada
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x}$	$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^n - f^{n-1}}{\Delta t}$	1ª ordem 2 pontos retardada
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2 \Delta x}$	$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^{n-1}}{2 \Delta t}$	2ª ordem 3 pontos centrada
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\Delta t^2}$	2ª ordem 3 pontos centrada

**Exemplo 01.01** – programa exp01\_01diferencas\_finitas.m, para cálculo de primeiras e segundas derivadas da função  $f(x) = \sin(x)$ , através de fórmulas analíticas e de diferenças finitas de 1ª e 2ª ordem, utilizando as relações (1.2), (1.4), (1.5) e (1.6), e incluindo estatísticas dos erros (ver Figura 1.1).

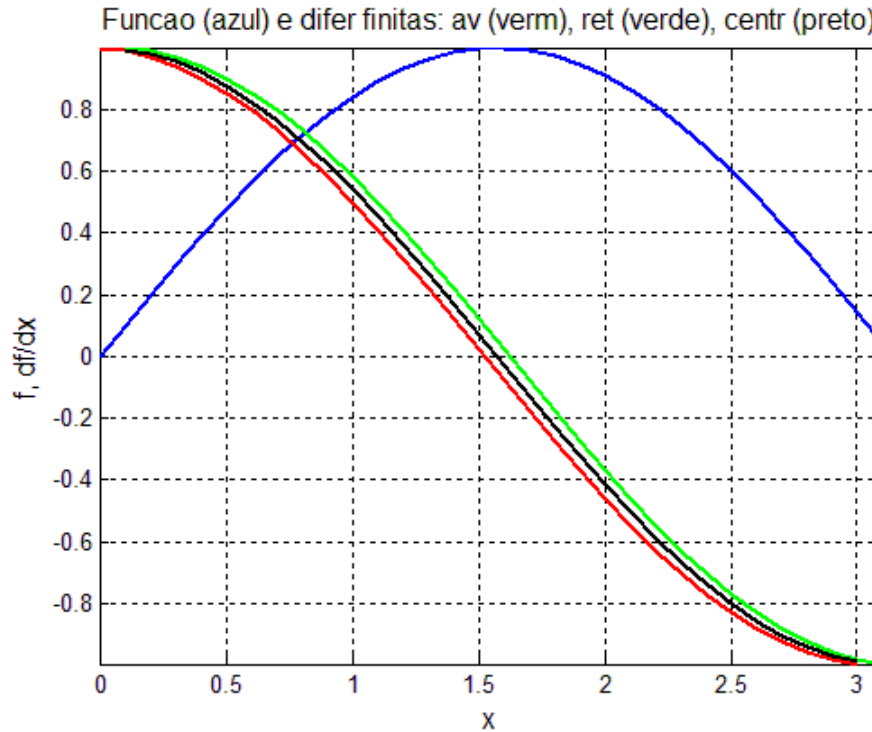


Fig. 1.1 – Gráfico da função e derivadas, calculadas pelo programa exp01\_01diferencas\_finitas.m.

### 1.3 – Diferenças finitas de alta ordem

Diferenças finitas laterais de segunda ordem podem ser obtidas através da utilização das expressões de Séries de Taylor (1.1) e (1.3), levando em conta aproximações da segunda derivada (1.6) centradas nos pontos  $(x+\Delta x)$  e  $(x-\Delta x)$ ; resultam então, para as diferenças finitas avançada e retardada de segunda ordem (Mitchell & Griffiths, 1980),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2\Delta x} + R \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{2\Delta x} + R \quad (1.9)$$

Tomando a média dessas duas expressões resulta uma diferença finita centrada de terceira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4\Delta x} + R \quad (1.10)$$

**Exercício 01.01** – desenvolver o programa `exc01_01diferencas_finitas_alta_ordem.m`, para calcular as primeiras derivadas da função  $f(x) = \sin(x)$ , através de fórmulas analíticas e de diferenças finitas de 2ª e 3ª ordem, utilizando as relações (1.8), (1.9) e (1.10), e incluindo estatísticas dos erros.

**Exercício 01.02** – desenvolver o programa `exc01_02diferencas_finitas_qq_f.m`, para calcular as primeiras derivadas da função  $f(x) = x \sin(x) \exp(-x^2)$ , através de fórmulas de diferenças finitas de 1ª, 2ª e 3ª ordem, utilizando as relações (1.2), (1.4), (1.5), (1.8), (1.9) e (1.10).

#### 1.4 - Equação da advecção

Uma primeira abordagem do método das diferenças finitas pode ser feita em uma equação linear simples com coeficientes constantes, comumente chamada de equação da advecção, que representa o transporte de uma propriedade:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.11)$$

onde  $t$  é o tempo,  $x$  o espaço,  $f$  a propriedade advectada e  $c$ , diferente de zero, é a velocidade, ou ainda, a velocidade de fase, no caso de se considerar ondas.

A equação (1.11) é similar à versão linearizada dos primeiros termos da equação do movimento, da equação da termodinâmica e da equação da vorticidade, entre outras.

A equação da advecção considerada pode ser aproximada pelas diferenças descritas acima, sendo que, inicialmente, será utilizada a diferença finita avançada no tempo e retardada no espaço (portanto, de 1ª ordem):

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.12)$$

cujas fórmula de recorrência é:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_j^n - f_{j-1}^n) \quad (1.13)$$

onde  $\Delta x$  corresponde ao espaçamento de grade e  $\Delta t$ , ao passo no tempo. A seguir, a Tabela 1.3 apresenta a notação matricial (dependente do espaço) da variável  $f$  em função dos níveis de tempo  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ . Ao programar a fórmula de recorrência (1.13), a variável  $f$  é considerada em dois níveis de tempo, sendo portanto representada no espaço por duas matrizes,  $f^n$  e  $f^{n+1}$  (ver Tabela 1.3).

Tabela 1.3 – Níveis de tempo e representação da variável f na forma matricial.

Níveis de tempo	Variáveis	Matrizes	Instante
(n-1)	$f^{n-1}$	fant	“anterior”
n	$f^n$	fatn	“atual”
(n+1)	$f^{n+1}$	fren	“renovado”

Portanto, a equação de recorrência para a equação da advecção (1.13), na forma matricial, pode ser escrita como:

$$fren(j) = fatn(j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (fatn(j) - fatn(j-1)) \quad (1.14)$$

A solução da equação da advecção (1.11) por diferenças finitas centradas no tempo e no espaço, de 2ª ordem portanto, conduz a:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.15)$$

cujas relação de recorrência é

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad (1.16)$$

e sua forma matricial corresponde a

$$fren(j) = fant(j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (fatn(j+1) - fatn(j-1)) \quad (1.17)$$

### 1.5 - Estrutura de um modelo

Primeiramente, vale lembrar que as variáveis em um modelo são usualmente representadas como matrizes espaciais. Além disso, uma variável em instantes distintos de tempo é representada através de uma matriz para cada instante, a qual é renovada a cada passo de tempo. Desta forma, nas equações discretizadas segundo a forma matricial, se considera que: o termo  $f_j^{n-1}$  corresponde à matriz fant (variável no instante de tempo anterior), o termo  $f_j^n$  corresponde a fatn (variável no instante atual) e  $f_j^{n+1}$  corresponde à matriz fren (variável no instante renovado).

Assim, um modelo pode ser estruturado segundo as seguintes etapas:

- 1) Definição dos parâmetros do modelo ( $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $c$ , etc.)
- 2) Estabelecimento da grade computacional
- 3) Cálculo de constantes iniciais
- 4) Imposição de condições iniciais, por exemplo:  $f_j^{n=1}$  e  $f_j^{n=2}$
- 5) Início do laço (*loop*) no tempo
- 6) Especificação de condições de contorno, quando houver
- 7) Evolução da solução no tempo com a fórmula de recorrência
- 8) Gravação de resultados (gráficos, arquivos, etc.)
- 9) Transferência de variáveis no tempo ( $fatn = fatu$  e  $fatn = fren$ , nesta ordem)
- 10) Retorno ao início do laço no tempo, até atingir o número total de iterações
- 11) Final do processamento

### 1.6 – Método de elementos finitos

Quanto à solução numérica das equações que compõem um modelo, há duas formulações: 1) no método de diferenças finitas, acima apresentado, as derivadas são substituídas por diferenças finitas, para pontos de grade no espaço e níveis de tempo (Ferziger & Peric, 1997; Strickwerda, 1989); 2) no segundo método, o de elementos finitos, uma solução é expressa em termos de uma expansão com funções base que levam em conta sua dependência espacial (pré-estabelecidas), tendo cada função base um coeficiente que depende do tempo (a determinar). Ao substituir as expansões nas equações do modelo, resultam equações diferenciais ordinárias para os coeficientes; esses coeficientes, por sua vez, evoluem no tempo através de cálculos por diferenças finitas (Zienkiewicz & Morgan, 1984; Reddy, 1984).

Um exemplo da aplicação do método de elementos finitos é dado para a equação da advecção linear 1D aplicada num canal de comprimento  $L$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.18)$$

É considerada uma expansão da solução  $f(x, t)$  com funções base dependentes do espaço pré-escolhidas  $f_r(x)$  e coeficientes dependentes do tempo a determinar  $\phi_r(t)$ ; sendo  $r$  o índice de cada termo da expansão:

$$f(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(t) f_r(x) \quad (1.19)$$

Ao substituir (1.19) em (1.18) resulta



$$\frac{\partial \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(t) f_r(x)}{\partial t} + c \frac{\partial \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(t) f_r(x)}{\partial x} = 0 \quad (1.20)$$

Levando em conta a dependência das variáveis no tempo e no espaço resulta

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_r \frac{\partial \phi_r}{\partial t} + c \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r \frac{\partial f_r}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

Multiplicando esta equação por  $f_s$  e integrando no domínio  $[0, L]$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^L f_s f_r dx \frac{\partial \phi_r}{\partial t} + c \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \phi_r = 0 \quad (1.22)$$

que pode ser escrito na forma matricial (para um número limitado de termos da expansão, suficientemente grande)

$$\left[ \int_0^L f_s f_r dx \right] \left[ \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right] + c \left[ \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \right] \left[ \phi_r \right] = 0 \quad (1.23)$$

$$\left[ \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right] + c \left[ \int_0^L f_s f_r dx \right]^{-1} \left[ \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \right] \left[ \phi_r \right] = 0 \quad (1.24)$$

a qual é resolvida por diferenças finitas

$$\left[ \frac{\phi_r^{n+1} - \phi_r^{n-1}}{2 \Delta t} \right] + c \left[ \int_0^L f_s f_r dx \right]^{-1} \left[ \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \right] \left[ \phi_r^n \right] = 0 \quad (1.25)$$

$$\left[ \phi_r^{n+1} \right] - \left[ \phi_r^{n-1} \right] + 2 \Delta t c \left[ \int_0^L f_s f_r dx \right]^{-1} \left[ \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \right] \left[ \phi_r^n \right] = 0 \quad (1.26)$$

$$\left[ \phi_r^{n+1} \right] = \left[ \phi_r^{n-1} \right] - 2 \Delta t c \left[ \int_0^L f_s f_r dx \right]^{-1} \left[ \int_0^L f_s \frac{\partial f_r}{\partial x} dx \right] \left[ \phi_r^n \right] = 0 \quad (1.27)$$

Como as funções base  $f_r$  são pré-escolhidas, as integrais que contém essas funções e suas derivadas em (1.27) podem ser calculadas antes da integração desta equação no tempo. Uma vez renovados os valores dos coeficientes  $\phi_r$ , a expansão (1.19) é utilizada para renovar a solução  $f(x, t)$  (no espaço e no tempo). Vários tipos de funções podem

ser considerados para as funções base, como por exemplo funções trigonométricas da forma:

$$f_r(x) = \cos((r-1) \pi x / L) \quad (1.28)$$

Finalizando esta secção, é importante notar que a vantagem do método de diferenças finitas está na formulação matemática simplificada, seja nos procedimentos de avanço no espaço e no tempo dos esquemas explícitos, seja na transformação de equações de 3 pontos em equações de 2 pontos dos esquemas implícitos e semi-implícitos. Por outro lado, a vantagem do método de elementos finitos se encontra na flexibilidade da escolha de pontos de grade no domínio espacial do modelo, a qual pode contemplar alta densidade de pontos em sub-áreas de interesse. Por outro lado, esquemas de diferenças finitas podem também adotar grades com espaçamentos variáveis.

Na presente publicação, serão apresentadas as técnicas de modelagem baseadas no método de diferenças finitas; a utilização de elementos finitos será restrita aos capítulos finais, em modelos numéricos hidrodinâmicos bi-dimensionais (para as duas coordenadas espaciais) e tri-dimensionais (somente para a coordenada vertical ou para as três coordenadas espaciais conjuntamente).

## 1.7 – Validação dos resultados de um modelo

Um dos aspectos mais importantes da modelagem se encontra na sua validação, ou seja, na comparação de seus resultados com outro conjunto de dados, de modo a inferir a qualidade dos resultados das simulações do modelo (Cecílio, 2006). Há vários métodos estatísticos para esta finalidade, que serão abordados a seguir, considerando  $X^n$  resultados do modelo e  $Y^n$  observações em  $N$  instantes de tempo, que possuem valores médios  $X_{med}$  e  $Y_{med}$ , respectivamente ( $n$  é o índice de tempo,  $n=1:N$ ).

O primeiro parâmetro comparativo é o coeficiente de correlação linear

$$corr = \frac{\sum_n (X^n - X_{med}) (Y^n - Y_{med})}{\sum_n \sqrt{(X^n - X_{med})^2} \cdot \sum_n \sqrt{(Y^n - Y_{med})^2}} \quad (1.29)$$

Este coeficiente varia entre -1 e 1, com os seguintes significados:

corr = 1: há uma correlação perfeita positiva entre as séries  $X^n$  e  $Y^n$ ;

corr = -1: há uma correlação negativa perfeita entre as duas séries, isto é, se uma aumenta, a outra diminui (e vice versa); e

corr = 0: as duas séries não dependem linearmente uma da outra; no entanto, pode existir uma dependência não linear entre elas e, portanto, a comparação deve ser investigada por outros meios.

O segundo parâmetro comparativo é o “erro absoluto médio (EAM)”, calculado como:

$$EAM = \frac{\sum |X^n - Y^n|}{N} \quad (1.30)$$

O terceiro parâmetro é o “erro absoluto médio relativo à média EAMR”, dado por

$$EAMR = \frac{EAM}{Y_{med}} \quad (1.31)$$

Outra forma muito conveniente de verificar a concordância entre resultados de um modelo  $X^n$  com observações  $Y^n$  (ou outras informações independentes) foi proposta por Wilmott (1981), que calcula um parâmetro “Skill”, o qual é mais próximo a 1 quanto melhor o ajuste entre as séries e mais próximo a zero quanto maior o desajuste, sendo o cálculo baseado na seguinte expressão:

$$S = 1 - \frac{\sum \left( |X^n - Y^n| \right)^2}{\sum \left( |X^n - Y_{med}| + |Y^n - Y_{med}| \right)^2} \quad (1.32)$$

**Exemplo 01.02** - o programa exp01\_02adv\_ordem01.m representa a advecção de um sinal com variação senoidal no tempo no ponto inicial da grade, com diferenças finitas de primeira ordem (equação 1.12).

**Exercício 01.03** - desenvolver o programa exc01\_03adv\_ordem02.m, análogo ao do exemplo exp01\_02adv\_ordem01.m, porém com solução de 2ª ordem, com diferenças finitas centradas no tempo e no espaço (equação 1.15).

Comparando os resultados dos dois programas de advecção (Figuras 1.2 e 1.3), se nota que, para o mesmo passo de tempo, o de 1ª ordem atenua a amplitude da oscilação no interior da grade, o que não ocorre com a solução de 2ª ordem.

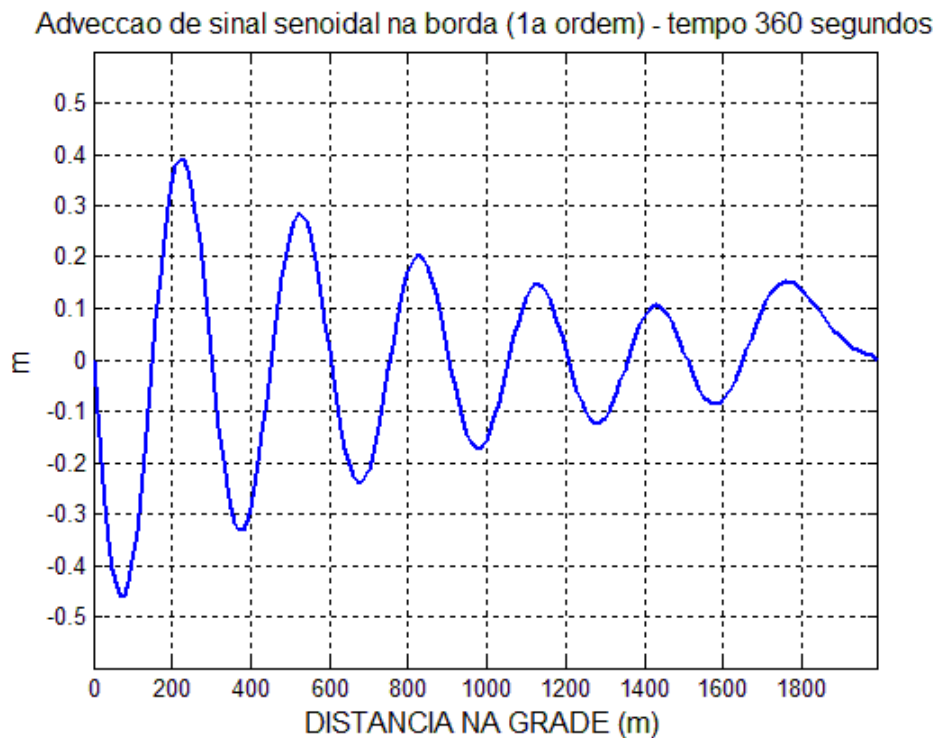


Fig. 1.2 – Configuração final do resultado do modelo exp01\_02adv\_ordem01.m.

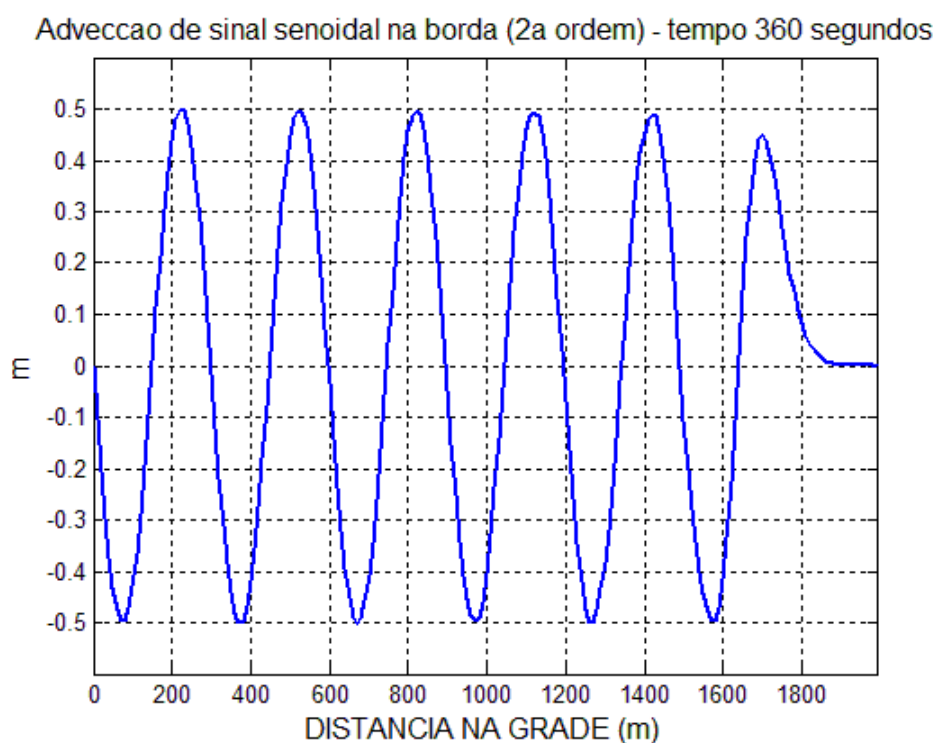


Fig. 1.3 – Configuração final do resultado do modelo exc01\_03adv\_ordem02.m.