

CAPÍTULO III – ANÁLISE DE ERROS EM MODELOS NUMÉRICOS

1

3.1 - Conceitos básicos

Para um modelo ser funcional, é preciso que cumpra três premissas (Sod, 1985; Haltiner & Williams, 1980). A primeira é a consistência entre as equações a diferenças finitas e diferencial, ou seja, quando os incrementos Δx e Δt tendem a zero, a equação a diferenças finitas tende à equação diferencial. A segunda é que a solução a diferenças finitas tenha estabilidade, de forma que sua amplitude não aumente indefinidamente e erroneamente no tempo. Por fim, é necessário que haja convergência da solução da equação a diferenças finitas à solução da equação diferencial.

Consistência e estabilidade são simples de verificar, convergência não. Assim, o Teorema de Equivalência de Lax torna-se fundamental, o qual diz: “Em um problema linear de valor inicial, numa aproximação de diferenças finitas que satisfaz a condição de consistência, a estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência da solução numérica para a analítica”.

Já erros dos modelos provêm de quatro fontes principais, as quais serão apresentadas em esquemas gráficos na Figura 3.1. A primeira fonte de erro é a instabilidade computacional, ou seja, quando as amplitudes das soluções aumentam erroneamente e indefinidamente no tempo; a segunda é a dispersão, que origina os erros de fase, quando as velocidades de propagação dos distúrbios no modelo são diferentes das analíticas; a terceira corresponde a modos computacionais (ou ruídos), ou seja, oscilações espúrias estão presentes nos resultados dos processamentos; finalmente, a quarta fonte de erro é a difusão numérica, quando o modelo não mantém corretamente as formas dos sinais que se propagam ao longo da grade no decorrer do tempo.

Como a estabilidade (de uma solução numérica) é muito importante, visto que junto com a consistência (da equação a diferenças finitas com a equação diferencial) garante a convergência (entre as soluções analítica e numérica), que, afinal, é o grande objetivo da modelagem numérica, então torna-se necessário analisar as condições de estabilidade dos esquemas numéricos adotados para resolver as equações diferenciais.

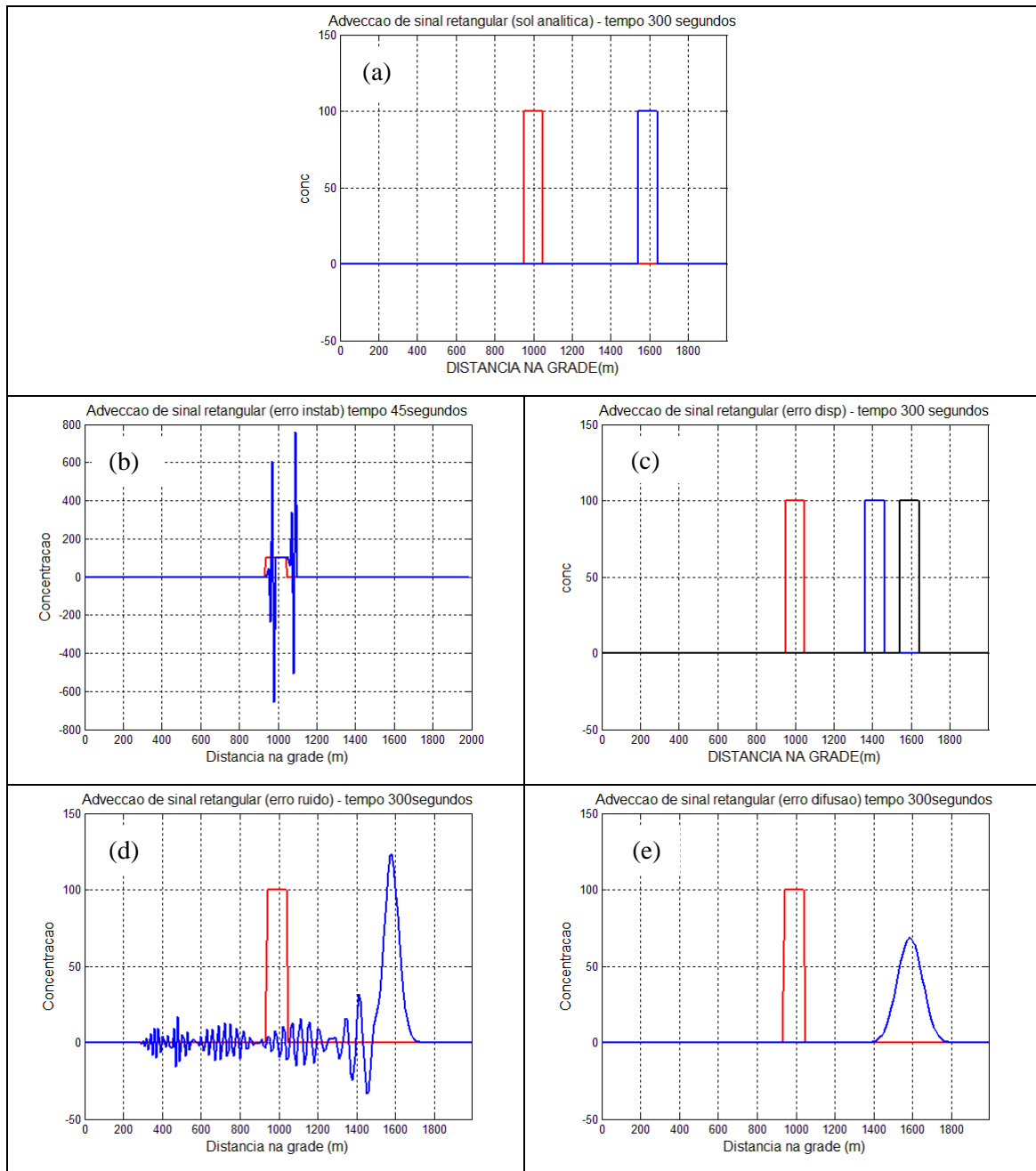


Fig. 3.1 – Solução da equação da advecção de um sinal retangular que se move numa grade uni-dimensional à velocidade de 2 m/s (posição inicial do sinal assinalada em vermelho e posição final em azul); (a) solução analítica: ao final de 300 s, o sinal se moveu 600 m; (b) erro de instabilidade: ao final de apenas 45 s, a solução apresenta amplitudes errôneas; (c) erro de dispersão: a localização do sinal advectado (em azul) é diferente da solução analítica (em preto), pois a velocidade de fase da solução é diferente da analítica; (d) existência de modos computacionais (ruído) nos resultados do modelo; e (e) erro de difusão: a forma da solução foi modificada.

3.2 – Método de von Neumann para análise de estabilidade

As condições de estabilidade indicam os valores de Δt e Δx que podem ser utilizados de modo a se obter uma solução numérica estável. Um exemplo da determinação da condição de estabilidade será dado com a equação da advecção

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

onde t é o tempo, x o espaço, f a propriedade advectada e c , diferente de zero, é a velocidade, ou ainda, a velocidade de fase, no caso de se considerar a propagação de ondas. A equação da advecção considerada pode ser discretizada através de um esquema explícito avançado no tempo e centrado no espaço, onde j é o índice no espaço e n é o índice no tempo:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.2)$$

O método mais utilizado para se determinar a condição de estabilidade é o método de von Neumann (Richtmyer & Morton, 1967), o qual inicialmente admite uma solução polinomial no tempo e harmônica no espaço (3.3):

$$f_j^n = B^n e^{iKj\Delta x} \quad (3.3)$$

onde B^n é a amplitude no nível de tempo n e K é o número de onda (note-se que, no desenvolvimento a seguir, B^n representa B elevado à potência n).

O método consiste em substituir a expressão (3.3) na equação discretizada (3.2) e, então, assume-se que há uma relação entre as amplitudes em instantes de tempo sucessivos, a qual é chamada “coeficiente de amplificação” λ :

$$\frac{B^{n+1} e^{iKj\Delta x} - B^n e^{iKj\Delta x}}{\Delta t} + c \frac{B^n e^{iK(j+1)\Delta x} - B^n e^{iK(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.4)$$

$$B^{n+1} = \lambda B^n \quad (3.5)$$

Desta forma, é possível determinar as condições de estabilidade, bastando que $|\lambda|$ seja menor que um (sistema atenuante) ou igual a um (sistema neutro). Caso o $|\lambda|$ seja maior que um, o sistema será instável.

B^n e B^{n+1} são as amplitudes das soluções nos instantes $n \Delta t$ e $(n+1) \Delta t$.

$\frac{B^{n+1}}{B^n} = \lambda$ é a relação entre as amplitudes nos instantes $(n+1) \Delta t$ e $(n) \Delta t$.

Se $|\lambda| > 1$ a solução é instável, pois amplitude aumenta à medida que (n) aumenta;

Se $|\lambda| = 1$ a solução é neutra;

Se $|\lambda| < 1$ a solução é atenuante.

Prosseguindo no exemplo, o passo seguinte da solução de von Neumann consiste em substituir B^{n+1} por λB^n em (3.4) e, para isolar λ , deve-se dividir a equação resultante por $B^n e^{iKj\Delta x}$, de modo que:

$$\frac{\lambda B^n e^{iKj\Delta x} - B^n e^{iKj\Delta x}}{\Delta t} + c \frac{B^n e^{iK(j+1)\Delta x} - B^n e^{iK(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (e^{iK\Delta x} - e^{-iK\Delta x}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\lambda = 1 - i c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(K\Delta x) \quad (3.8)$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \text{sen}^2(K\Delta x)} \quad (3.9)$$

Na solução adotada, $|\lambda| > 1$ para quaisquer Δt e Δx escolhidos. Portanto, com o esquema numérico adotado, resulta uma solução incondicionalmente instável.

A seguir, se tem a escolha de outro esquema explícito para análise de estabilidade, avançado no tempo e no espaço:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.10)$$

Aplicando o método de von Neumann para a equação (3.10), resulta:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} (e^{iK\Delta x} - 1) = 0 \quad (3.11)$$

$$\lambda = 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos(K\Delta x) + i \operatorname{sen}(K\Delta x) - 1) \quad (3.12)$$

$$\lambda = 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos(K\Delta x) - 1) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \operatorname{sen}(K\Delta x) \quad (3.13)$$

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos(K\Delta x) - 1)\right)^2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen}(K\Delta x)\right)^2} \quad (3.14)$$

$$|\lambda| < 1 \quad \text{se}$$

$$-1 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0 \quad (3.15)$$

Para um esquema explícito avançado no tempo e retardado no espaço

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.16)$$

Resulta a condição de estabilidade

$$0 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.17)$$

Os resultados acima obtidos demonstram que, na solução da equação da advecção (3.1) por um esquema explícito avançado no tempo (1ª ordem no tempo), há três possibilidades: o esquema centrado no tempo é incondicionalmente instável (ver equações 3.2 e 3.9), o esquema avançado no tempo é condicionalmente estável (desde que a velocidade c seja negativa, ver equações 3.10 e 3.15) e o esquema retardado no tempo é condicionalmente estável (desde que a velocidade c seja positiva, ver equações 3.16 e 3.17). Com esses resultados uma opção de uso de uma única equação na solução numérica da equação da advecção por um esquema de 1ª ordem, para qualquer valor de velocidade c (positivo ou negativo) considera a equação

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{c - |c|}{2} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.18)$$

cujas condições de estabilidade é

$$0 \leq |c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.19)$$

Em geral, na formulação de modelos, constantes das equações são definidas pelas condições do meio modelado (como por exemplo o valor da velocidade c na equação da advecção) e o espaçamento de grade Δx é definido pelo objetivo do estudo. Conseqüentemente, o passo de tempo é definido pela condição de estabilidade do esquema numérico adotado. Por exemplo, na solução da equação da advecção (3.1), para um esquema explícito, avançado no tempo e retardado no espaço (3.16): adotando a velocidade (c) como 0.2 m/s e escolhendo um espaçamento de grade (Δx) de 100 m, determina-se o passo de tempo (Δt) a ser utilizado no modelo pela condição de estabilidade (3.17):

$$0 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad 0 \leq 0.2 \frac{\Delta t}{100} \leq 1 \quad 0 \leq \Delta t \leq 500 \text{ s} \quad (3.20)$$

Neste caso, o uso de um passo de tempo Δt acima de 500 s certamente instabiliza os resultados da modelagem.

As relações 3.15, 3.17 e 3.19 são chamadas de “Condições de Courant–Friedrichs–Lewy” de estabilidade (“condições CFL”); elas indicam que um distúrbio não pode se mover mais que um espaçamento de grade Δx num passo de tempo Δt (Courant, Friedrichs & Lewy, 1967). O “Número de Courant” é definido como ($c \Delta t / \Delta x$).

Note-se que o uso de esquema com fator de amplificação muito menor que 1 acaba por atenuar demasiadamente a solução; como os parâmetros de um modelo podem variar no tempo (a velocidade de fase na equação da advecção, por exemplo), o ideal é se utilizar esquema com fator de amplificação em torno de 0,7 a 0,9 - de modo a se evitar uma atenuação excessiva de seus resultados. Em modelos com termos de fricção, o uso de um esquema atenuante é compensado com um ajuste dos coeficientes de fricção, e este procedimento é parte da calibração de um modelo.

3.3 – Análise de estabilidade para um esquema com 3 níveis de tempo

Note-se que, na análise de estabilidade para um esquema com três níveis de tempo, se estabelece $B^{n+1} = \lambda B^n$ e $B^n = \lambda B^{n-1}$, conseqüentemente, $B^{n+1} = \lambda^2 B^{n-1}$. Considere-se o exemplo para a equação da advecção (3.1), com solução através de um esquema explícito, centrado no tempo e no espaço:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.21)$$

Para estudar a estabilidade pelo método de von Neumann se considera solução com variação polinomial no tempo e harmônica no espaço, da forma (3.3), que substituído em (3.1) conduz a

$$\frac{B^{n+1} - B^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{B^n (e^{iK\Delta x} - e^{-iK\Delta x})}{2\Delta x} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{B^{n+1} - B^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{B^n i c \operatorname{sen} K\Delta x}{\Delta x} = 0 \quad (3.23)$$

A seguir é incluído o coeficiente de amplificação λ , que corresponde à relação de amplitudes nos instantes $n \Delta t$ e $(n+1) \Delta t$, ou seja, $B^{n+1} = \lambda B^n$, equação (3.5). A condição de estabilidade exige que $|\lambda|$ seja menor ou igual a 1, o que resulta em solução numérica atenuada ou neutra; para $|\lambda| > 1$ a solução é amplificada. Ao substituir (3.5) em (3.23) se tem

$$\frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2\Delta t} + \frac{i c \operatorname{sen} K\Delta x}{\Delta x} = 0 \quad (3.24)$$

$$\lambda - \lambda^{-1} + \frac{2c\Delta t i}{\Delta x} \operatorname{sen} K\Delta x = 0 \quad (3.25)$$

$$\lambda^2 + \lambda \frac{2c\Delta t i}{\Delta x} \operatorname{sen} K\Delta x - 1 = 0 \quad (3.26)$$

que é uma equação do segundo grau em λ a qual resulta em $|\lambda| = 1$ para

$$\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (3.27)$$

Portanto, a solução (3.21) é estável (e neutra) desde que a condição de estabilidade (3.27) seja respeitada.

3.4 – Análise de estabilidade para um esquema implícito

Para uma discretização da equação da advecção avançada no tempo e no espaço segundo um esquema implícito, a aplicação do método de von Neumann tem o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{B^{n+1} e^{iKj\Delta x} - B^n e^{iKj\Delta x}}{\Delta t} + c \frac{B^{n+1} e^{iK(j+1)\Delta x} - B^{n+1} e^{iKj\Delta x}}{\Delta x} = 0 \quad (3.29)$$

Adotando os passos descritos anteriormente, tem-se:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + \frac{c\lambda(e^{iK\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 0 \quad (3.30)$$

$$\lambda - 1 + q\lambda(e^{iK\Delta x} - 1) = 0 \quad (3.31)$$

Onde

$$q = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \quad (3.32)$$

$$\lambda + q\lambda(e^{iK\Delta x} - 1) = 1 \quad (3.33)$$

$$\lambda(1 + q(e^{iK\Delta x} - 1)) = 1 \quad (3.34)$$

$$\lambda(1 + q \cos(K\Delta x) + iq \sin(K\Delta x) - q) = 1 \quad (3.35)$$

$$\lambda = \frac{1}{(1 + q \cos(K\Delta x) - q + iq \sin(K\Delta x))} \quad (3.36)$$

Que corresponde a um número complexo na forma

$$\lambda = \frac{1}{(A + i B)} \quad (3.37)$$

$$\lambda = \frac{A - i B}{(A + i B)(A - i B)} = \frac{A - i B}{A^2 + B^2} \quad (3.38)$$

Cujo módulo é

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 + B^2} \quad (3.39)$$

e portanto $|\lambda| \leq 1$, sempre, para esta solução.

Chega-se à conclusão que esta solução implícita é incondicionalmente estável, quaisquer que sejam os Δt e Δx adotados.

Em geral, esquemas explícitos são fáceis de implementar, mas são condicionalmente estáveis, enquanto que esquemas implícitos (e semi-implícitos) são mais difíceis de implementar, porém são incondicionalmente estáveis.

É importante notar que, em geral, os coeficientes de amplificação dependem do número de onda K , donde se conclui que eventuais atenuações ou amplificações de um esquema dependem do comprimento de onda das oscilações que são modeladas, ou seja, algumas partes do espectro poderão ser simuladas com erros menores do que outras.

Deve ser mencionado que o método de von Neumann não é o único método de análise de estabilidade. Há outros métodos, como por exemplo o “método da matriz”, que calcula os auto-valores da matriz dos coeficientes representativos das relações de recorrência, cujo módulo deve ser menor ou igual a 1; este método é mais rigoroso e tem a vantagem de poder incluir as condições de contorno das equações, porém em geral envolve desenvolvimentos matemáticos muito complexos e tem sido raramente utilizado (Smith, 1978). Outro método disponível é o “método da energia”, no qual as representações de energia cinética e potencial das oscilações são consideradas em conjunto com as relações de recorrência e se requer que estas energias não aumentem no decorrer do tempo (Haltiner & Williams, 1980); no entanto, este método só pode ser usado quando é possível representar as energias com as equações do esquema analisado. Finalmente, há o “método direto”, que utiliza a própria relação de recorrência para calcular a razão dos módulos das amplitudes das oscilações em dois passos de tempo consecutivos, exigindo-se que essa razão seja menor ou igual a 1; este método só pode ser usado em alguns casos particulares em que é possível exprimir diretamente esta razão, e exemplos do mesmo serão dados nos capítulos seguintes.

A seguir, serão analisados os demais tipos de erros que ocorrem nos modelos numéricos em Oceanografia além da instabilidade, a saber: dispersão computacional, modos computacionais e difusão numérica (Haltiner & Williams, 1980).

3.5 – Erros de dispersão computacional

Quando há dispersão computacional, os sinais modelados movem-se com velocidades de fase errôneas. A dispersão ocorre quando o número de pontos de grade usados para resolver o comprimento de onda do sinal modelado (L) é pequeno. Evita-se esse erro diminuindo a razão $\frac{\Delta x}{L}$, sendo que valores ideais para o espaçamento de grade

são com $L \geq 20 \Delta x$ ou $30 \Delta x$. Para a análise da dispersão, se compara as relações de dispersão numérica e analítica. Como exemplo, considere-se a equação da advecção (3.1), com solução explícita, avançada no tempo e no espaço.

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.40)$$

Para avaliar a dispersão, inicialmente, assume-se uma solução oscilatória no tempo e no espaço, com amplitude B , frequência angular ω e número de K (onde $K = 2\pi / L$):

$$f_j^n = B e^{i\omega n \Delta t} e^{iKj\Delta x} \quad (3.41)$$

Em seguida, substitui-se esta relação (3.41) na equação em que se deseja avaliar a dispersão (equação 3.40).

$$\frac{Be^{i\omega(n+1)\Delta t}e^{iKj\Delta x} - Be^{i\omega n\Delta t}e^{iKj\Delta x}}{\Delta t} + c \frac{Be^{i\omega n\Delta t}e^{iK(j+1)\Delta x} - Be^{i\omega n\Delta t}e^{iKj\Delta x}}{\Delta x} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{e^{i\omega\Delta t} - 1}{\Delta t} + c \frac{e^{iK\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\cos(\omega\Delta t) + i.\text{sen}(\omega\Delta t) - 1}{\Delta t} + c \frac{\cos(K\Delta x) + i.\text{sen}(K\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \quad (3.44)$$

$$\cos(\omega\Delta t) - 1 + i \text{sen}(\omega\Delta t) = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos(K\Delta x) - 1 + i \text{sen}(K\Delta x)) \quad (3.45)$$

E portanto

$$\text{sen}(\omega\Delta t) = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(K\Delta x) \quad (3.46)$$

Por fim, isola-se a velocidade de fase c ; para $\omega \Delta t \rightarrow 0$ e $K \Delta x \rightarrow 0$:

$$\omega \Delta t = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} K \Delta x \quad (3.47)$$

$$c = -\frac{\omega}{K} \quad (3.48)$$

Resta verificar se o resultado corresponde ao resultado teórico esperado. Para a equação analítica (3.1), admite-se

$$f(x, t) = B e^{i\omega t} e^{iKx} \quad (3.49)$$

que, substituído em (3.1), resulta em:

$$i \omega = -i K c \quad (3.50)$$

ou seja,

$$c = -\frac{\omega}{K} \quad (3.51)$$

Para o exemplo considerado, a velocidade de fase numérica (3.48) corresponde à analítica (3.51), e o esquema (3.40) não é dispersivo, desde que $\omega \Delta t \rightarrow 0$ e $K \Delta x \rightarrow 0$; por isso se deve utilizar valores de Δx num modelo de modo que $L \geq 20 \Delta x$ ou $30 \Delta x$.

11

Na realidade, a conclusão obtida no caso analisado é válida para a grande maioria dos modelos numéricos que utilizam equações a diferenças finitas. Note-se que erros de dispersão computacional podem ser facilmente constatados pela ocorrência de atrasos ou adiantamentos sistemáticos dos máximos (ou mínimos) das soluções de um modelo em relação aos correspondentes instantes de ocorrência nas soluções analíticas.

3.6 – Erros associados ao modo computacional (ruído)

O modo computacional consiste na existência de ruído sobreposto à solução correta (modo físico). Ocorre quando se resolve uma equação através de um esquema de ordem maior. Por exemplo, ao resolver a equação da advecção de 1ª ordem (3.1) através de um esquema explícito centrado no tempo e no espaço de 2ª ordem (3.21), resulta uma equação de segundo grau (3.26) para o coeficiente de amplificação λ . Esta equação possui duas raízes, que são associadas a dois modos de oscilação no modelo, o modo físico (real) e o modo computacional (ruído), sendo este uma fonte de erro. Note-se que o modo computacional troca de sinal a cada passo de tempo e viaja no sentido oposto ao modo físico. Este ruído pode ser eliminado através de filtragens nos resultados do modelo (por exemplo, médias de 3 ou 5 pontos) ou então através da inclusão de termos difusivos nas equações do modelo numérico.

3.7 – Erros associados à difusão numérica

Quando ocorre difusão numérica, o formato do sinal é modificado erroneamente no decorrer da integração do modelo no tempo. A difusão ocorre quando se usa um esquema numérico de baixa ordem na solução da equação. Por exemplo, ao resolver a equação da advecção (3.1) por um esquema de 1ª ordem no tempo e no espaço (3.10 ou 3.16), a forma da solução é erroneamente modificada ao longo do tempo.

Esse erro pode ser observado na comparação das Figuras 1.2 e 1.3 do capítulo I, onde foram adotadas soluções de 1ª e de 2ª ordem para a equação da advecção, aplicada a uma oscilação harmônica no primeiro ponto de grade.

3.8 - Conclusão

Concluindo, ao implementar um modelo, é necessário conhecer as características dos distúrbios e oscilações que se propagam na área de interesse, de modo que se escolha um passo de tempo que evite instabilidade numérica, um espaçamento de grade que não provoque dispersão numérica, que o esquema numérico mantenha o menor ruído computacional possível (se necessário através de filtragens dos resultados) e que as formas dos distúrbios e oscilações não sejam erroneamente alteradas no decorrer da integração do modelo no tempo.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

Note-se que a adoção de soluções da forma (3.3) e (3.41), para análise de estabilidade e dispersão, é justificada pela possibilidade de representação de uma função como série de senos e cossenos, tanto no espaço como no tempo. E as conclusões obtidas para uma componente dessas séries pode ser estendida para todas as componentes.

Exemplo 03.01 – o programa exp03_01adv_exp_ord01.m representa a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema explícito e diferenças finitas de primeira ordem (equação 3.18).

Exercício 03.01 – desenvolver o programa exc03_01adv_exp_ord02.m, para representar a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema explícito e diferenças finitas de segunda ordem (equação 3.21).

Exercício 03.02 – desenvolver o programa exc03_02adv_implic_ord01.m, para representar a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema implícito e diferenças finitas de primeira ordem no tempo e no espaço (avançado no tempo e no espaço) (equação 3.28).

Exercício 03.03 – desenvolver o programa exc03_03adv_implic_ord02.m, para representar a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema implícito e diferenças finitas de segunda ordem no tempo e no espaço.

Exercício 03.04 – desenvolver o programa exc03_04adv_semi_implic_ord01.m, para representar a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema implícito e diferenças finitas de primeira ordem no tempo e no espaço (avançado no tempo e no espaço).

Exercício 03.05 – desenvolver o programa exc03_05adv_semi_implic_ord02.m, para representar a advecção de um sinal retangular no centro da grade, com esquema semi-implícito e diferenças finitas de segunda ordem no tempo e no espaço.

As Figuras 3.2 a 3.7 mostram os resultados com os programas acima, referentes a 360 s de advecção do sinal retangular inicial. Note-se que esquemas de baixa ordem tendem a apresentar difusão numérica (mas sem ruído) e esquemas de alta ordem possuem ruído computacional (oscilações espúrias, mas sem difusão numérica); por outro lado, esquemas explícitos requerem passos de tempo menores e esquemas implícitos permitem passos de tempo maiores. Entretanto, esquemas implícitos possuem, em geral, atenuação dos distúrbios modelados, enquanto que os esquemas semi-implícitos possuem atenuação menor.

É interessante processar esses modelos sem respeitar as correspondentes condições de estabilidade: os resultados deixam de ter qualquer significado. Mesmo com esquemas implícitos, convém não utilizar passos de tempo exageradamente grandes, e uma das limitações se encontra nas escalas de tempo dos processos físicos modelados. Testes demonstram que o uso de passos de tempo exageradamente grandes em esquemas implícitos produz erros de dispersão, de modo que se sugere um limite dos passos de tempo implícitos equivalente a, no máximo, 10 passos de tempo das correspondentes soluções explícitas (Kowalik, 1975).

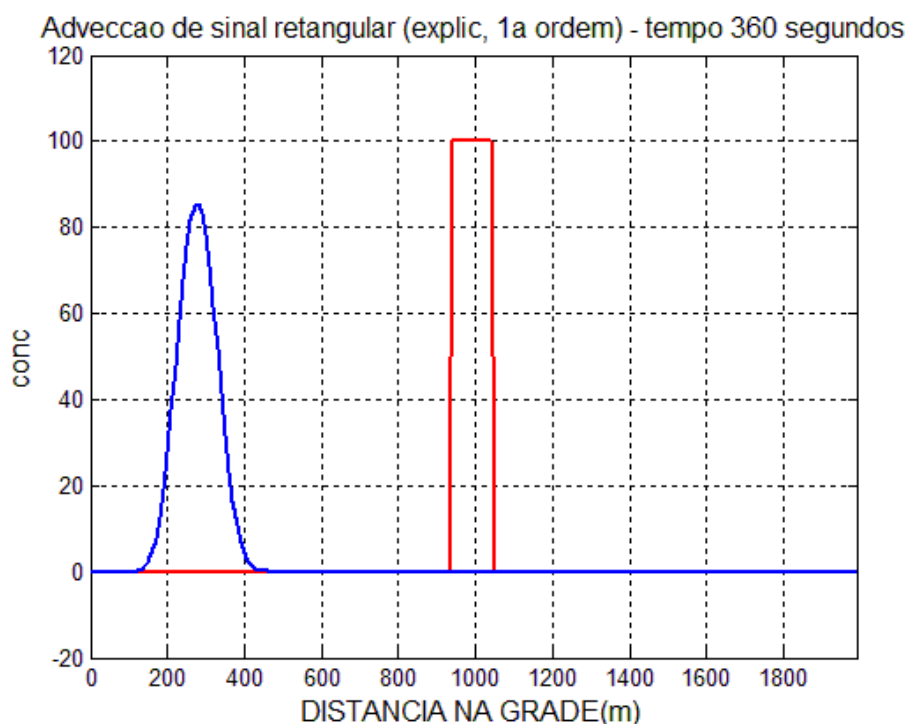


Fig. 3.2 – Resultado do modelo exp03_01adv_exp_ord01.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema explícito e diferenças finitas de primeira ordem.

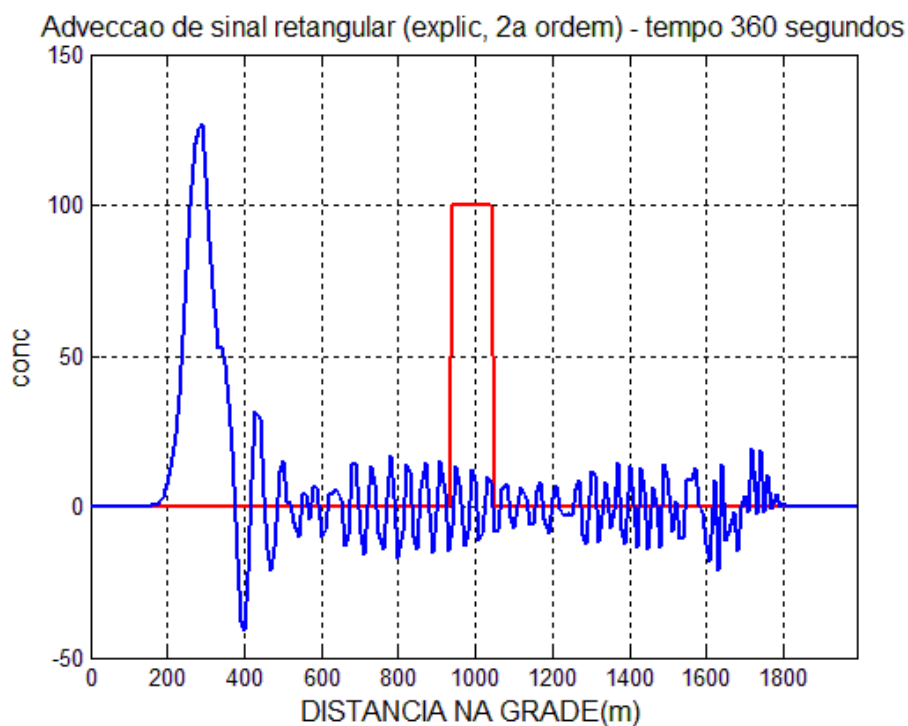


Fig. 3.3 – Resultado do modelo exc03_01adv_exp_ord02.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema explícito e diferenças finitas de segunda ordem.

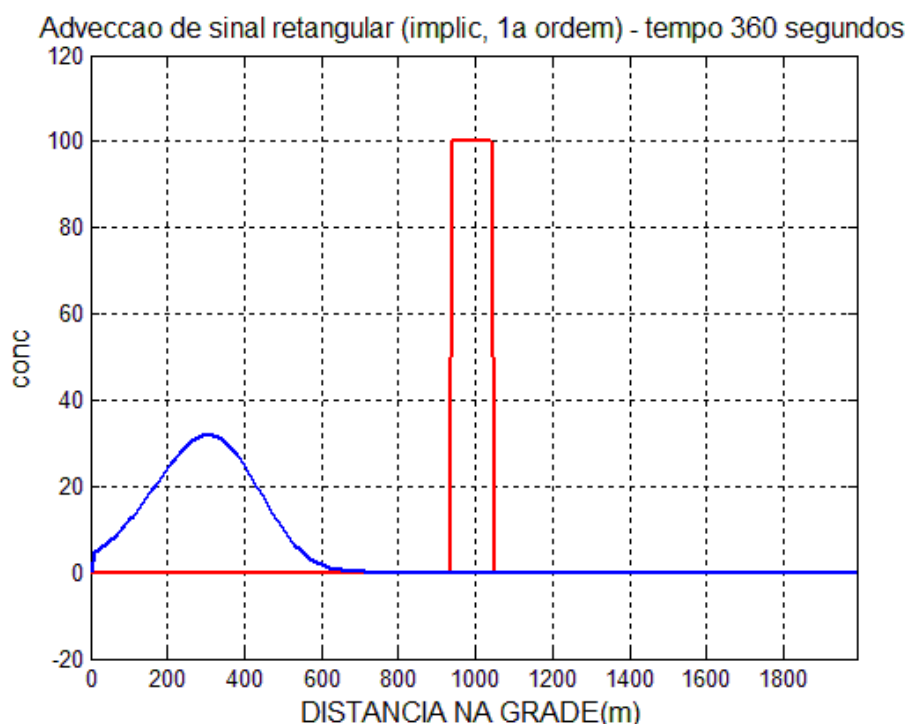


Fig. 3.4 – Resultado do modelo exc03_02adv_implic_ord01.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema implícito e diferenças finitas de primeira ordem no tempo e no espaço.

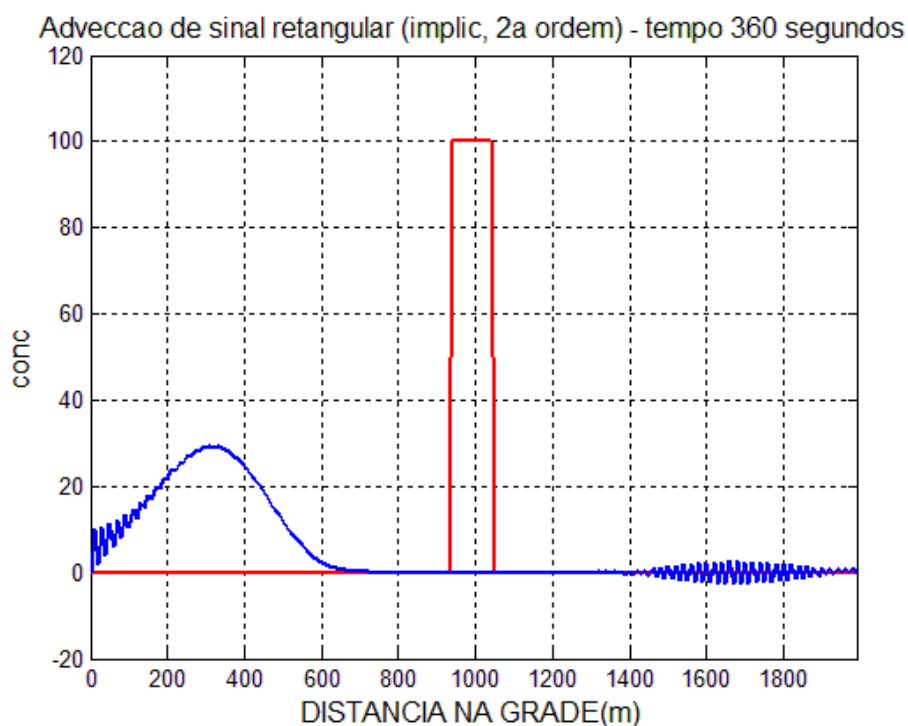


Fig. 3.5 – Resultado do modelo exc03_03adv_implic_ord02.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema implícito e diferenças finitas de segunda ordem no tempo e no espaço.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

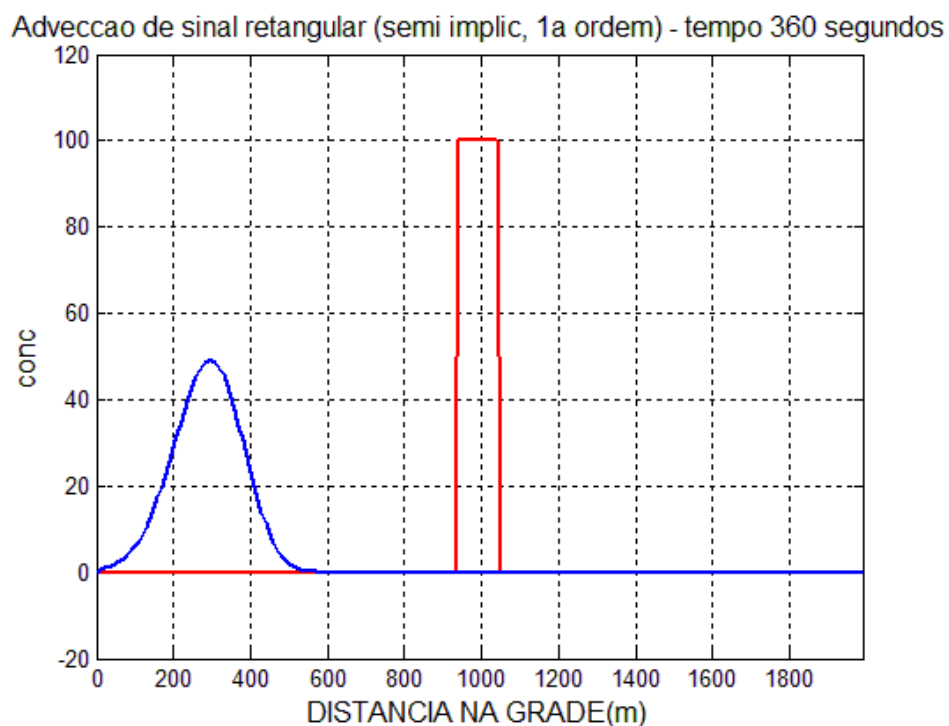


Fig. 3.6 – Resultado do modelo exc03_04adv_semi_implic_ord01.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema semi-implícito e diferenças finitas de primeira ordem no tempo e no espaço.

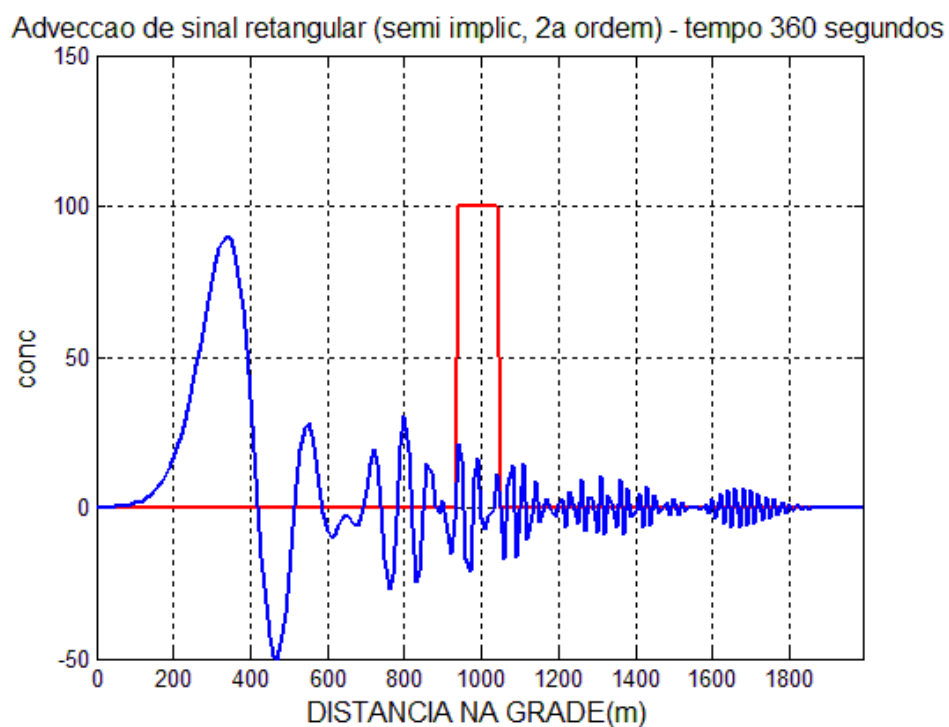


Fig. 3.7 – Resultado do modelo exc03_05adv_semi_implic_ord02.m. Advecção de um sinal retangular inicialmente no centro da grade, com esquema semi-implícito e diferenças finitas de segunda ordem no tempo e no espaço.