Testes de Hipóteses paramétricos TP2

JEM, AMD, TPA

Exercício 1

Escolheram-se aleatoriamente 15 computadores portáteis de uma determinada marca, e obtiveram-se as seguintes medidas para as suas espessuras (em mm):

$$30,\ \ 30,\ \ 30,\ \ 30,\ \ 31,\ \ 32,\ \ 32,\ \ 32,\ \ 32,\ \ 33,\ \ 33,\ \ 34,\ \ 34,\ \ 34,\ \ 35$$

Considerando que a espessura do computador é uma variável aleatória normal, teste a hipótese $H_0 : \mu = 32.5$ contra $H_1 : \mu \neq 32.5$ (admita que o nível de significância é 5%, $\alpha = 0.05$).

Resolução:

Trata-se de um teste de hipótese bilateral, com nível de significância $\alpha = 0,05$, para a média de uma população normal com variância desconhecida. A amostra tem dimensão $n = 15$ e sob a hipótese nula, $\mu = 32.5$, temos que a estatística teste T segue uma distribuição t-student com 14 graus de liberdade

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1}, \quad \text{onde } S \text{ é o desvio padrão amostral.}$$

Introdução dos dados:

In [1]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as stats
PCesp=[30,30,30,30,31,32,32,32,32,33,33,34,34,34,35]
mu=32.5
alfa=0.05
```

Método A

- Cálculo do valor da estatística teste:

In [2]:
```
n=len(PCesp) # tamanho da amostra
xbar = np.mean(PCesp) # média da amostra
sbar = np.std(PCesp,ddof = 1); print(sbar) # desvio padrão da amostra
to = (xbar-mu)/(sbar/np.sqrt(n))
print('valor da estatistica teste:',round(to,4))
```

```
1.6846647257229665
valor da estatistica teste: -0.843
```

- Cálculo do valor de prova:

$$P(|T| > |t_0|) = 2\,(1 - P(T < |t_0|))$$

In [3]:
```
pv=2*(1-stats.t.cdf(np.abs(to),n-1))
print('valor de prova:',pv)
```

```
valor de prova: 0.413424842001951 73
```

Método B (função *stats.ttest_1samp()*)

In [4]:
```
res=stats.ttest_1samp(PCesp,32.5,alternative='two-sided')
print(res)
print('valor da estatistica teste:',res[0])
print('valor de prova:',res[1])
```

```
TtestResult(statistic=-0.8429534208950453, pvalue=0.41342484200195206, df
=14)
valor da estatistica teste: -0.8429534208950453
valor de prova: 0.41342484200195206
```

Conclusão:

Como o p-value é maior que o nível de significância $\alpha = 0.05$ não rejeitamos H_0.

Exercício 2

Uma loja online indicou no seu website que a entrega é realizada, em média, em 5 dias. Um cliente habitual efetuou uma reclamação, afirmando que o tempo médio de entrega foi superior ao valor indicado pela loja. Para averiguar se o cliente tem razão, foram analisadas aleatoriamente 36 compras efetuadas no respetivo website, tendo-se registado os tempos de entrega, em dias, abaixo indicados:

5	4	4	5	5	5	6	5	4	4	3	4	4	5	5	7	6	5
6	4	6	5	5	6	6	6	4	4	5	5	5	3	6	3	6	5

Considerando um nível de significância de 1%:

a) Formule a hipótese nula e a respetiva hipótese alternativa para o problema. Trata-se de um teste unilateral ou bilateral?

b) Indique o valor observado da estatística teste.

c) O que se pode concluir relativamente à reclamação do cliente?

Resolução:

a)

$$H_0:\ \mu = 5 \ \text{ vs } \ H_1:\ \mu > 5$$

Trata-se de um teste unilateral à direita.

b)

A estatística teste é

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Cálculo do valor observado da estatística, t_0.

In [5]:
```
prazo=[5,4,4,5,5,5,6,5,4,4,3,4,4,5,5,7,6,5,6,4,6,5,5,6,6,6,4,4,5,5,5,3,6,
mu=5
n=len(prazo)
t0=(np.mean(prazo)-mu)/(np.std(prazo,ddof = 1)/np.sqrt(n))
print('valor da estatistica teste:',round(t0,5))
```

```
valor da estatistica teste: -0.68086
```

c)

In [6]:
```
res=stats.ttest_1samp(prazo,5,alternative='greater')
print('Confirmação do valor da estatistica teste:',round(res[0],5))
print('valor de prova:',round(res[1],5))
```

```
Confirmação do valor da estatistica teste: -0.68086
valor de prova: 0.74978
```

Conclusão:

O p-value é maior que o nível de significância $\alpha = 0.01$ logo não há motivos para se rejeitar H_0. Ou seja, Não há evidência estatística que nos permita concluir, com um nível de significância de 1%, que o tempo médio de entrega foi superior a 5 dias.

Exercício 3

Registaram-se as velocidades máximas (em dpi) de 24 ratos de computadores de uma determinada marca, divididos em 2 grupos: com e sem fio. Os resultados foram:

Com fio	2300	2000	1800	2000	2400	2200	2000	1800	1900	2100	2200	2400
Sem fio	2400	2200	1800	1900	1800	1900	2100	2050	2200	2000	1900	2000

a) Indique se as amostras são independentes ou emparelhadas.

b) Para um nível de significância de 1%, assumindo que a velocidade é uma variável aleatória normal, teste a hipótese de igualdade das velocidades médias, nos ratos com e sem fio.

Resolução:

a) As amostras são independentes.

b)

- Devemos começar por fazer um Teste de Levene para decidir se as variâncias são iguais ou diferentes.

Introdução dos dados;

In [7]:
```
comfio=[2300,2000,1800,2000,2400,2200,2000,1800,1900,2100,2200,2400]
semfio=[2400,2200,1800,1900,1800,1900,2100,2050,2200,2000,1900,2000]
```

Teste de Levene (para testar se as variâncias são iguais)

$$H_0 \ : \sigma_{\text{com fio}} = \sigma_{\text{sem fio}} \quad \text{vs} \quad H_1 \ : \sigma_{\text{com fio}} \neq \sigma_{\text{sem fio}}$$

In [8]:
```
statistic, p_value =stats.levene(comfio,semfio)
print("P-value:", round(p_value,5))
```

```
P-value: 0.42271
```

Conclusão: O valor de prova (0.42271) é superior ao índice de significância considerado (0.01) logo não se deve rejeitar a hipótese nula do teste de levene. Ou seja, devemos considerar que as variâncias são iguais.

Nota: Geralmente considera-se o índice de significância, para o teste de Levene, igual ao nível de significância considerado para o teste às médias (neste caso de 1%).

Logo devemos efetuar um teste bilateral às médias de duas populações com variâncias desconhecidas mas iguais.

In [9]:
```
statistic, p_value =stats.ttest_ind(comfio,semfio,equal_var=False)
print("valor de prova:",round(p_value,5))
```

```
valor de prova: 0.3862
```

Conclusão:

O valor de prova ($p-value = 0.3862$) é superior ao nível de significância ($\alpha = 0.01$), logo não se rejeita a hipótese nula. Ou seja, não há evidência estatística, com um nível de significância de 0.01 de que as velocidades médias dos ratos sem fios sejam diferentes das velocidades médias dos ratos com fios.

Exercício 4

Um ensaio ensaio de rotura à compressão efetuado sobre 12 provetes cúbicos de betão conduziu aos seguintes valores da tensão de rotura ($kgf\ /\ cm^2$).

$$263 \quad 254 \quad 261 \quad 236 \quad 228 \quad 253 \quad 249 \quad 262 \quad 250 \quad 252 \quad 257 \quad 258$$

Admita que a variável em estudo segue uma distribuição normal.

a)

Um engenheiro pretende saber se a tensão esperada de rotura não é inferior a 255 $kgf\ /\ cm^2$. Que evidência fornecem os dados acerca desta questão se se admitir um nível de significância menor ou igual a 5%?

b)

Sabendo que o **valor característico da tensão de rotura** se define como o valor da variável que tem uma probabilidade de 95% de ser excedido, calcule uma estimativa do valor característico da tensão de rotura do betão em estudo.

Resolução

a)

- A amostra é pequena ($n = 12$) mas admitimos que os dados são provenientes de uma população normal logo, podemos efetuar um teste-T.
- Seja μ o valor esperado da tensão de rotura do betão em estudo.
- Trata-se de um teste unilateral com,

$$H_0 : \mu = 255 \quad vs \quad H_1 : \mu > 255$$

In [10]:
```
t_rotura = [263,254,261,236,228,253,249,262,250,252,257,258]
statistic, p_value = stats.ttest_1samp(t_rotura,255,alternative='greater'
print("valor de prova:",round(p_value,5))
```

```
valor de prova: 0.83454
```

Conclusão:

O valor de prova é superior ao nível ($\alpha = 0.05$) de significância considerado logo, não se rejeita a hipótese nula.

b)

Sabe-se que a variável X segue uma distribuição normal. Pela alínea anterior podemos estimar a média ($\mu = 255$) e podemos estimar o desvio padrão σ usando o desvio padrão amostral s. Logo, uma estimativa do valor característico da tensão de rotura, x_r, será dada por

Pretende-se determinar o valor x_r tal que

$$P(X > x_r) = 0.95$$

In [11]:
```
mean=255
std_amostral=np.std(t_rotura,ddof = 1)
prob=1-0.95
xr=stats.norm.ppf(prob,loc=mean,scale=std_amostral)
print("valor característico da tensão de rotura :", round(xr,4))
```

```
valor característico da tensão de rotura : 237.7279
```

Exercício 5

Para testar um novo medicamento para tratar a perturbação de hiperatividade com défice de atenção (PDAH) escolheu-se uma amostra aleatória de 24 crianças com PDAH. Cada criança foi medicada com o novo medicamento (D60) e com um placebo (DO). Após cada tratamento, cada criança respondeu a 60 perguntas. O número de respostas corretas encontram-se guardadas no ficheiro **Data_C.csv**. Supondo que o número de respostas corretas é uma variável com distribuição normal, há razões para supormos que o novo tratamento aumenta o número médio de respostas certas? Use um índice de significância de 1%.

Resolução:

- Pretende-se efetuar um teste unilateral para comparar duas médias. As amostras são **emparelhadas**.

- Para importar os dados em Python pode-se:

  - usar a biblioteca pandas *pd.read_csv('my_file.csv')*

  - usar a biblioteca numpy *np.loadtxt('my_file.csv')*

  - usar a instrução *import csv*

In [12]:
```
import pandas as pd
Data_C = pd.read_csv('Data_C.csv',delimiter=',')
Data_C.head(n=3)
# retirar 1ª coluna
Data_C.drop(Data_C.columns[0],axis=1,inplace=True)
Data_C.head(n=3)
#num_linhas, num_colunas = Data_C.shape
#print("Numero de linhas:", num_linhas)
#type(Data_C)
```

Out[12]:

	DO	D60
0	57	62
1	27	49
2	32	30

In [13]:
```
placebo=Data_C['DO'].tolist()
new_med=Data_C['D60'].tolist()
resteste=stats.ttest_rel(new_med,placebo,alternative='greater')
print('valor de prova:',round(resteste.pvalue,5))
```

```
valor de prova: 0.00189
```

Conclusão:

O valor de prova é inferior a 1% logo rejeita-se a hipótese nula. Ou seja, o novo medicamento aumenta o número médio de respostas corretas.

Exercício 6

Dois grupos de 36 estudantes foram seleccionados ao acaso para participarem numa experiência que consiste em aprender o significado de palavras numa língua que não conhecem.

Durante 30 minutos os estudantes tentaram aprender o maior número de palavras. No grupo I os estudantes trabalharam isoladamente. No grupo II os estudantes trabalharam aos pares procurando certificar-se mutuamente que iam aprendendo as palavras. Em seguida foi efectuado um teste para determinar o número de palavras aprendidas por cada aluno. Os resultados podem ser encontrados em **Data_A.csv**.

Averigue se o segundo método de aprendizagem pode considerar-se significativamente melhor do que o primeiro método.

Resolução:

As duas amostras são independentes. tem-se de efetuar um **Teste de Levene** para verificar se teem variâncias iguais ou diferentes.

In [14]:
```
Data_A = Data_A = pd.read_csv('Data_A.csv',delimiter=',')
print(Data_A.head(n=5))
num_linhas, num_colunas = Data_C.shape
print("Numero de linhas:", num_linhas)
```

```
   Grupo_1  Grupo_2
0       24       21
1       14       22
2       16       25
3       17       21
4       18       20
Numero de linhas: 24
```

Nota: As amostras são pequenas, para efetuarmos um t-test teremos de considerar que os dados são provenientes de uma distribuição normal.

In [15]:
```
# teste de levene
G1 = Data_A['Grupo_1'].tolist()
G2 = Data_A['Grupo_2'].tolist()
resultado_levene=stats.levene(G1,G2)
print('p-value do teste de Levene:',round(resultado_levene.pvalue,3))
```

```
p-value do teste de Levene: 0.739
```

Conclusão:

O p-value=0.7394 leva-nos a não rejeitar a hipótese nula. Pode-se considerar que as variâncias são iguais.

In [16]:
```
# t-test unilateral, amostras independentes e variâncias iguais

res6=stats.ttest_ind(G1,G2,alternative='less',equal_var=True)
# Ou...
#stats.ttest_ind(G2,G1,alternative='greater',equal_var=True)
print('p-value (t-test):',round(res6.pvalue,4))
```

```
p-value (t-test): 0.4527
```

Conclusão:

O p-value do t-test leva-nos a não rejeitar a hipótese nula. Ou seja, o segundo método não é significativamente superior ao primeiro.

Exercício 7

Efetuaram-se ensaios em 10 e 8 amostras aleatórias de $1kg$ de petróleo bruto, provenientes de furos de dois campos, para se determinar a quantidade (em gramas) de enxofre. Os resultados obtidos encontram-se indicados na seguinte tabela:

$$\begin{array}{lllllllllll} \text{Campo A}: & 111 & 114 & 105 & 112 & 107 & 109 & 112 & 110 & 110 & 106 \\ \text{Campo B}: & 109 & 103 & 101 & 105 & 106 & 108 & 110 & 104 & & \end{array}$$

Supondo que a quantidade de enxofre é uma variável com distribuição normal, poderá afirmar que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma do campo A é:

a) superior à do campo B?

b) inferior à do campo B?

Resolução:

As amostras são claramente independentes. Iremos efetuar um teste de Levene para decidirmos se há homogeneidade ou heterogeneidade de variâncias.

In [17]:
```
Campo_A=[111, 114, 105, 112, 107, 109, 112, 110, 110, 106]
Campo_B=[109, 103, 101, 105, 106, 108, 110, 104]
leveneres=stats.levene(Campo_A,Campo_B)
print('P-value do teste de Levene:',round(leveneres.pvalue,4))
```

```
P-value do teste de Levene: 0.7129
```

In [18]:
```
# Alínea a)
resA=stats.ttest_ind(Campo_A,Campo_B,alternative='greater')
print('P-value do t-test da alínea a:',round(resA.pvalue,4))
# Alínea b)
resB=stats.ttest_ind(Campo_A,Campo_B,alternative='less')
print('P-value do t-test da alínea b:',round(resB.pvalue,4))
```

```
P-value do t-test da alínea a: 0.0075
P-value do t-test da alínea b: 0.9925
```

Exercício 8

O diretor de um hotel resolveu investir numas obras durante o ano de 2014, com o objetivo de modernizar o empreendimento, melhorar a qualidade dos seus equipamentos, e assim atrair um maior número de clientes. Para verificar se esta remodelação teve um efeito positivo, foram registadas as taxas mensais de ocupação, em $\%$, em 2013 (antes das obras) e em 2015 (depois das obras). Os dados obtidos são apresentados na tabela seguinte.

Mês / Taxas médias de ocupação, em %	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Antes das obras (2013)	20	35	40	55	60	75	95	100	90	80	45	25
Depois das obras (2015)	25	30	45	75	80	100	100	100	100	85	65	30

Admitindo que os dados da amostra provêm de uma distribuição normal:

a) Indique se as amostras são independentes ou emparelhadas.

b) Formule a hipótese nula e a respetiva hipótese alternativa para o problema. Trata-se de um teste unilateral ou bilateral?

c) Indique o p-valor e interprete (use um nível de significância 5%).

d) Que podemos concluir acerca do investimento realizado?

Resolução:

a)

As amostras são emparelhadas.

b)

$$H_0 : \ \mu_1 = \mu_2 \ \ vs \ \ H_1 : \ \mu_1 < \mu_2$$

c)

In [19]:
```
antes=[20,35,40,55,60,75,95,100,90,80,45,25]
depois=[25,30,45,75,80,100,100,100,100,85,65,30]
res8=stats.ttest_rel(antes,depois,alternative='less')
print('p-value:',round(res8.pvalue,5))
```

```
p-value: 0.00236
```

• $\text{p-value} = 0.002358$. Como o valor de prova é menor que o nível de confiança então rejeita-se H_0.

O valor de prova (p-value) é o menor nível de significância que nos conduz à rejeição de H_0 com a amostra observada.

d)

Há evidência estatística que nos permita concluir, com um nível de significância de 5%, que a remodelação teve um efeito positivo.

Exercício 9

Uma empresa tem 4 fornecedores de placas de fibra de carbono. A divisão de controlo pretende averiguar se a qualidade das placas é igual em todos os fornecedores. Para o efeito selecionaram-se aleatóriamente 10 placas de cada fornecedor, e, efetuaram testes à resistência das placas. Os resultados dos testes encontram-se no ficheiro **Data_D.csv**.

Há razões para admitir que há diferenças significativas na qualidade das placas nos 4 fornecedores?

Resolução:

As quatro amostras são independentes. Para ver se há diferenças significativas teremos de efetuar um teste one-way ANOVA.

In [20]:
```
# importação dos dados
Data8=pd.read_csv('Data_D.csv',delimiter=';')
Data8.head(n=4)
F1=Data8['Fornecedor1'].tolist()
F2=Data8['Fornecedor2'].tolist()
F3=Data8['Fornecedor3'].tolist()
F4=Data8['Fornecedor4'].tolist()
```

Verificação dos pré-requesitos para o teste de one-way ANOVA

teste à normalidade dos dados

Nota: Este teste (de Shapiro) será dado nos testes não paramétricos.

- A hipótese nula é que os dados são normais e a hipótese alternativa é que os dados não são normais.

In [21]:
```
_, p_normal_grupo1 = stats.shapiro(F1)
_, p_normal_grupo2 = stats.shapiro(F2)
_, p_normal_grupo3 = stats.shapiro(F3)
_, p_normal_grupo4 = stats.shapiro(F4)
print(p_normal_grupo1)
print(p_normal_grupo2)
print(p_normal_grupo3)
print(p_normal_grupo4)
```

```
0.2886756956577301
0.6457613706588745
0.7351377606391907
0.5499924421310425
```

Conclusão: podemos consideerar os dados de todos os grupos normais.

teste à homogeneidade (igualdade de variâncias)

In [22]:
```
_, p_homogeneidade = stats.levene(F1,F2,F3,F4)
print(p_homogeneidade)
```

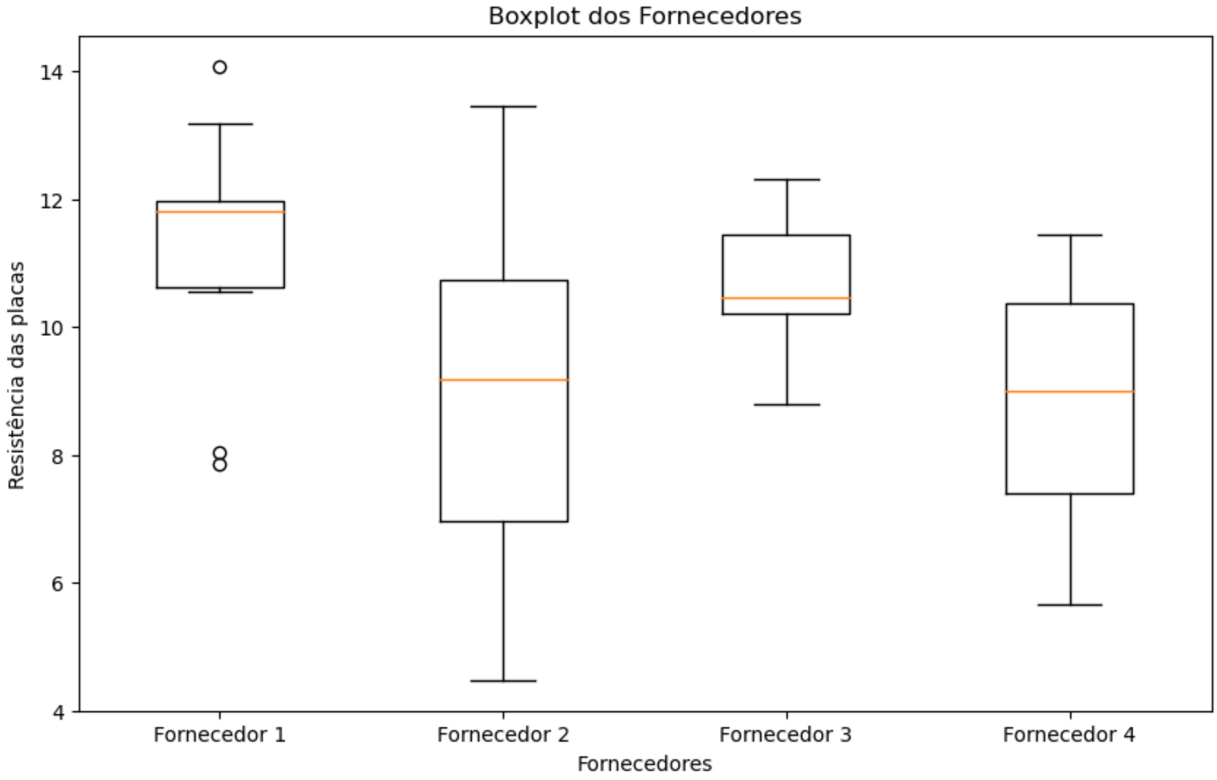
```
0.018899716521198123
```

Conclusão:

O resultado não é conclusivo. Se considerarmos um grau de significância de 5% verifica-se não homogeneidade nos dados. Por outro lado, para um grau Se considerarmos um grau de significância de 1% verifica-se a homogeneidade nos dados. **Iremos considerar que se verifica a homogeneidade nos dados.**

Visualização dos dados (outliers,...)

In [23]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.boxplot([F1, F2, F3,F4], labels=['Fornecedor 1', 'Fornecedor 2', 'For
plt.title('Boxplot dos Fornecedores')
plt.xlabel('Fornecedores')
plt.ylabel('Resistência das placas')
plt.show()
```



Conclusão:

Podemos verificar que existem outliers no Fornecedor 1. **Iremos "relaxar a condição de não existirem outliers significativos** e efetuar o teste one-way ANOVA.

Realização do teste one-way ANOVA

In [24]:
```
_,p_value=stats.f_oneway(F1,F2,F3,F4)
print('valor de prova do teste one-way ANOVA:',round(p_value,5))
```

```
valor de prova do teste one-way ANOVA: 0.03105
```

Conclusão:

A resposta vai depender do nível de significância que considerarmos! Por exemplo: se aceitarmos um nível de confiança de 5% ($\alpha = 0.05$) temos de rejeitar a hipótese nula (consideramos que há diferenças na qualidade das placas dos diversos fornecedores) porque o valor de prova ($\text{p.value} = 0.0311 < \alpha$). Contudo se considerarmos um nível de confiança de 1% ($\alpha = 0.01$) tem-se que $\text{p.value} = 0.0311 > \alpha$ logo não se rejeitava a hipótese nula.

Exercício 10

Na tabela seguinte encontram-se os quocientes entre o custo final e o custo inicialmente previsto dos projetos de I&D realizados em 4 grandes empresas.

Empresa	**Custo final/Custo previsto**					
A	1.0	0.8	1.9	1.1	2.7	
B	1.7	2.5	3.0	2.2	3.7	1.9
C	1.0	1.3	3.2	1.4	1.3	2.0
D	3.8	2.8	1.9	3.0	2.5	

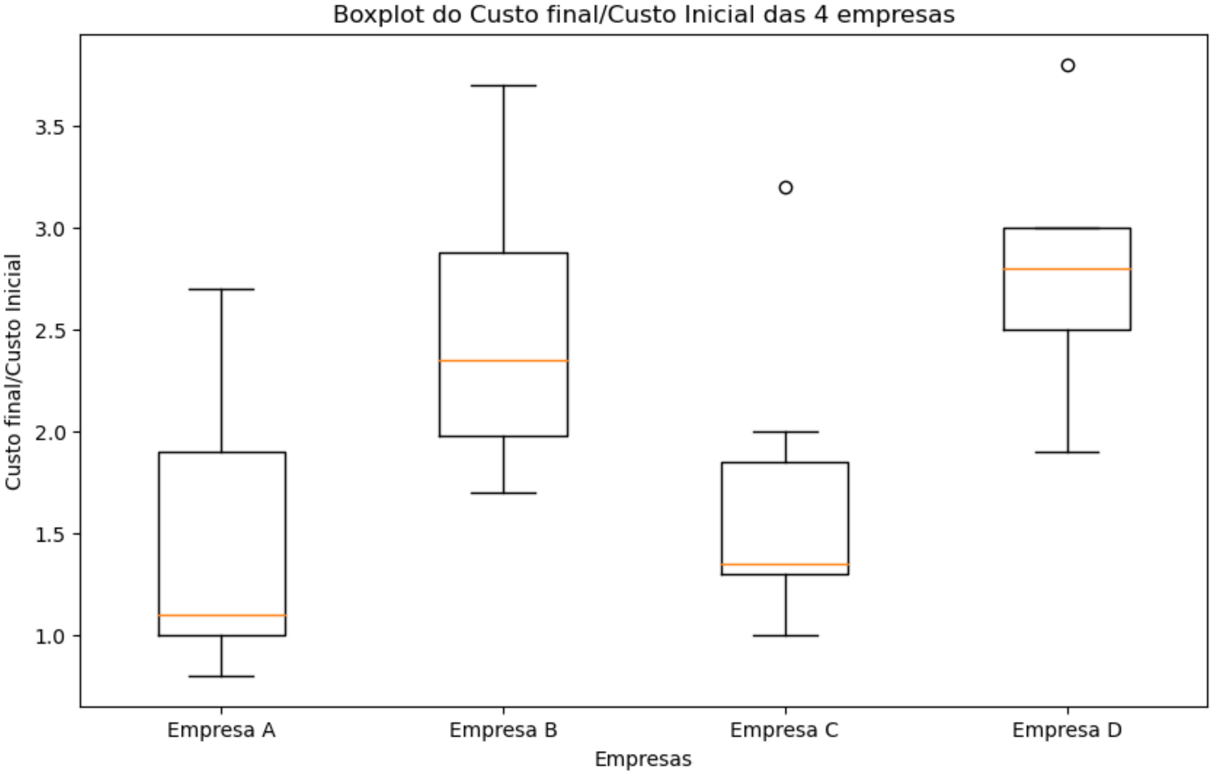
Admitindo a normalidade dos dados, pretende-se investigar se o fator "Empresa" tem efeito sobre o agravamento dos projetos. Considere um nível de significância ($\alpha = 0.05$).

Resolução:

In [25]:
```
Emp_A=[1.0,0.8,1.9,1.1,2.7]
Emp_B=[1.7,2.5,3.0,2.2,3.7,1.9]
Emp_C=[1.0,1.3,3.2,1.4,1.3,2.0]
Emp_D=[3.8,2.8,1.9,3.0,2.5]
# Pré-requesitos
#----------------------------------
# 1. normalidade assumida no enunciado
#----------------------------------
# 2. homogeneidade
_, p_homogeneidade = stats.levene(Emp_A,Emp_B,Emp_C,Emp_D)
print('p_homogeneidade:',round(p_homogeneidade,4))
# Há homogeneidade
#----------------------------------
# 3. outliers
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.boxplot([Emp_A,Emp_B,Emp_C,Emp_D], labels=['Empresa A', 'Empresa B',
plt.title('Boxplot do Custo final/Custo Inicial das 4 empresas')
plt.xlabel('Empresas')
plt.ylabel('Custo final/Custo Inicial')
plt.show()
# relaxamos a existência de alguns outliers...

# Teste one-way ANOVA
_,p_value=stats.f_oneway(Emp_A,Emp_B,Emp_C,Emp_D)
print('p-value ANOVA:',round(p_value,4))
```

```
p_homogeneidade: 0.9926
```




```
p-value ANOVA: 0.0359
```

Conclusão:

Para $\alpha = 0.05$ há diferenças significativas e seria conveniente efetuar uma análise *post-hoc*.